4. 絶対値を含む関数

4.1 絶対値を含む関数

□絶対値を含む関数の扱い方

関数 $|X|=\begin{cases} X & (\ X\geq 0 \quad \text{のとき}\ ) \\ -X & (\ X<0 \quad \text{のとき}\ ) \end{cases}$

であるから,絶対値の”中身”の符号の変わり目で変数の範囲を場合分けし,絶対値記号をはずす。

例　$y=|\ x^2-2x\ |=|x(x-2)|$

$x\leq 0$, $2\leq x$ で $x(x-2)\geq 0$, $0<x<2$ で $x(x-2)<0$ であるから

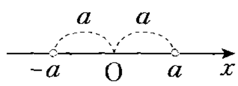
$$\begin{cases} y=x^2-2x & (x-0\ ,\ 2\leq x) \\ y=-(x^2-2x) & (0<x<2) \end{cases}$$

4.2 絶対値を含む方程式・不等式

□ a を正の定数とする。 $|x|$ とは, 数直線上で原点と点 x との距離であるから,
絶対値を含む方程式・不等式の解は次のようになる。

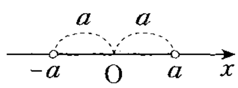
□ $|x|=a$ の解

数直線上で、原点からの距離が a である点の座標だから、方程式 $|x|=a$
の解は $x=\pm a$ となる。



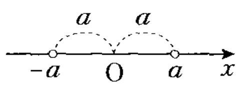
□ $|x|<a$ の解

同様に, 原点からの距離が a より小さい点の集合だから, 不等式 $|x|<a$
の解は $-a<x<a$ となる。



□ $|x|>a$ の解

原点からの距離が a より大きい点の集合だから, 不等式 $|x|>a$ の解は
$x<-a$, $a<x$ である。



□ 一般的には, 絶対値の”中身”の符号の変わり目で, 未知数の範囲を場合分けし, 各範囲の中で
絶対値記号をはずして解を求め, まとめる。

Check Exercise

4-1 関数 $y=|x|$ のグラフを書け。

4-2 次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x|=2$

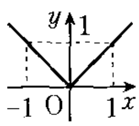
(2) $|x|<2$

(3) $|x|>2$

==

Check Exercise 解答

4-1



4-2

(1) $x=\pm 2$

(2) $-2<x<2$

(3) $x<-2$, $2<x$

TYPE58　絶対値を含む関数のグラフ　重要度 B レベル 3

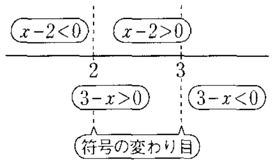
次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=|x-2|-|3-x|$

(2) $y=|x^2-4x|$

KEY　絶対値の”中身”の符号の変わり目を境に場合分け

解



(1)　符号の変わり目は、 2 ， 3

①　$x<2$ のとき、 $x-2<0$ 、 $3-x>0$

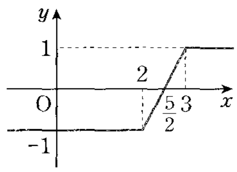
∴　$y=-(x-2)-(3-x)=-1$

②　$2\leq x\leq 3$ のとき、 $x-2\geq 0$ ， $3-x\geq 0$

∴　$y=x-2-(3-x)=2x-5$

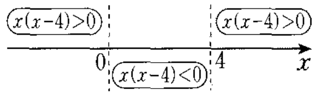
③　$3<x$ のとき、 $x-2>0$ ， $3-x<0$

∴　$y=x-2+(3-x)=1$



(2)　$x^2-4x=0$ の符号の変わり目は、

$x(x-4)=0$ より、 0 ， 4



①　$x<0$ のとき、 $x^2-4x>0$

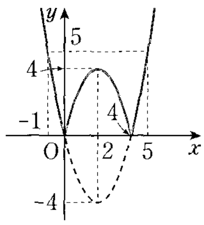
∴　$y=x^2-4x$

②　$0\leq x<4$ のとき、 $x^2-4x\leq 0$

∴　$y=-x^2+4x$

③　$4\leq x$ のとき、 $x^2-4x>0$

∴　$y=x^2-4x$



[別解]

$y=x^2-4x=(x-2)^2-4$ より、2 次関数 $y=x^2-4x$ のグラフの内、 $y\geq 0$ の部分はそのままにし、 $y<0$ の部分は x 軸に対して対称に折り返す。

類題 58　次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=2|x-1|+|x-2|+4|x-3|$

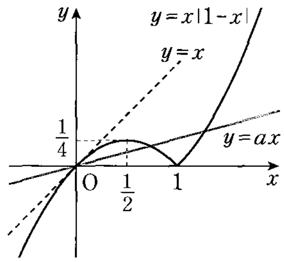
(2) $y=|x^2-3x+2|$

(3) $y=||1-2x|-2|$

TYPE59　絶対値を含む関数のグラフと直線の共有点　　重要度 B　レベル 4

a を定数とするとき、関数 $y=x|1-x|$ のグラフと直線 $y=ax$ の共有点の個数を求めよ。

KEY　直線 $y=ax$ の傾き a の値の範囲によって共有点の個数は異なる。



解　$y=x|1-x|$ は、

① $x<1$ のとき　$y=x(1-x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

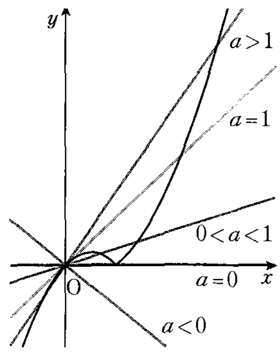
② $1\leq x$ のとき　$y=-x(1-x)=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$y=-x^2+x=ax$ より　$-x^2-(a-1)x=0$ ・・・①’

①’が共有点を 1 個もつ場合は、

$D=(a-1)^2=0$ より $a=1$ のとき、$y=-x^2+x$ と接する。

また、グラフより、$(1,0)$ を通るときは $a=0$ である。



従って、$y=x|1-x|$ のグラフと直線 $y=ax$ との共有点の個数をまとめると、

$a>1$ のとき 3 個

$a=1$ のとき 2 個

$0<a<1$ のとき 3 個

$a=0$ のとき 2 個

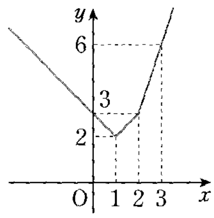
$a<0$ のとき 1 個

類題 59　a を定数とするとき、関数 $y=||x-2|-1|$ のグラフと直線 $y=ax+2$ の共有点の個数を求めよ。

TYPE60 絶対値を含む関数の最大・最小(1)　重要度 B レベル 4

(1) 関数 $y=x+|x-1|+|x-2|$ の最小値を求めよ。
(2) a を定数とするとき、関数 $y=x+|x-a|+|x-2|$ の最小値を求めよ。

KEY グラフを書いて求める。



解
(1) 符号の変わり目は、**1 , 2** ゆえ
① $x<1$ のとき、 $y=x-(x-1)-(x-2)=-x+3$
② $1\leq x<2$ のとき、 $y=x+(x-1)-(x-2)=x+1$
③ $2\leq x$ のとき、 $y=x+x-1+x-2=3x-3$
①～③をグラフに書くと右図のようになるから、 $x=1$ のとき、最小値は **2** と　なる

(2) 符号の変わり目は、 a , 2
（ｉ） $2<a$ のとき、
① $x<2$ のとき、 $y=x-(x-a)-(x-2)=-x+a+2$ 減少
② $2\leq x<a$ のとき、 $y=x-(x-a)+x-2=x+a-2$ 増加
③ $a\leq x$ のとき、 $y=x+x-a+x-2=3x-a-2$ 増加
①～③より、減少から増加へ変化する、 $x=2$ のとき、最小値は a
（ii） $2=a$ のとき、
① $x<2$ のとき、 $y=x-(x-2)-(x-2)=-x+4$ 減少
② $2\leq x$ のとき、 $y=x+x-2+x-2=3x-4$ 増加
①～②より、減少から増加へ変化する、 $x=2$ のとき、最小値 2
（iii） $a<2$ のとき、
① $x<a$ のとき、 $y=x-(x-a)-(x-2)=-x+a+2$ 減少
② $a\leq x<2$ のとき、 $y=x+x-a-(x-2)=x-a+2$ 増加
③ $2\leq x$ のとき、 $y=x+x-a+x-2=3x-a-2$ 増加
①～③より、減少から増加へ変化する、 $x=a$ のとき、最小値 2

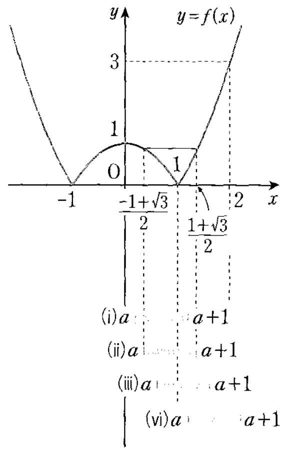
類題 **60**
(1) 関数 $y=|x+1|+|x-1|+|x-2|$ ($-1\leq x\leq 3$)の最大値と最小値を求めよ。

(2) a を正の定数とするとき、関数 $y=2|x-1|+a|x-2|+4|x-3|$ が最小値をとる x の値を求めよ。

TYPE61　絶対値を含む関数の最大･最小（2）　重要度 B　レベル 5

a を正の定数とするとき、関数 $f(x)=|x^2-1|$ の $a \leq x \leq a+1$ における最大値と最小値を求めよ。

KEY　定義域が平行移動。最大･最小の変わり目を境に場合分け。



解
符号の変わり目は、 ± 1
① $x<-1$ のとき、 $f(x)=x^2-1$
② $-1 \leq x \leq 1$ のとき、 $f(x)=-x^2+1$
③ $1 \leq x$ のとき、 $f(x)=x^2-1$
　よって、グラフは右図

$0<a<1$ において、 $f(a)=f(a+1)$ となる a の値は、
$-a^2+1=(a+1)^2-1$ → $2a^2+2a-1=0$ より、
$a=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}$ → $a=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$　　$a>0$ より、 $a=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

① $0<a<\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ のとき、 $x=a$ のとき、最大値 $f(a)=-a^2+1$ ， $x=1$ のとき、最小値 0
② $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leq a<1$ のとき、 $x=1$ のとき最小値 0 ， $x=a+1$ のとき、最大値 $f(a+1)=a^2+2a$
③ $1 \leq a$ のとき、 $x=a$ のとき、最小値 $f(a)=a^2-1$ ， $x=a+1$ のとき、最大値 $f(a+1)=a^2+2a$

類題 61
(1) a を定数とするとき、関数 $f(x)=(3-x)|x+1|$ の $a \leq x \leq a+1$ における最小値 $g(a)$ とする。
関数 $y=g(a)$ のグラフをかけ。

(2) 関数 $f(x)=|x^2-1|+|x-1|$ の $-a \leq x \leq a$ における最大値が $\frac{9}{4}$ となるように、正の定数 a の値の範囲を定めよ。

TYPE62　絶対値を含む方程式・不等式(1)　　重要度 A　レベル 3

次の方程式・不等式解け。

(1)　$|x^2-6x|=9$　　　**(2)**　$|x^2-5x|<6$　　　**(3)**　$|2x-1|>1$

KEY　$|X|$　は数直線上で原点と座標が　X　である点との距離を表す。

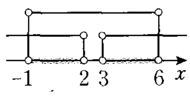
解

(1)　$x^2-6x=\pm 9$　より、　$x^2-6x-9=0$　→　$x=\dfrac{6\pm\sqrt{36+36}}{2}=3\pm 3\sqrt{2}$

$x^2-6x+9=(x-3)^2=0$　→　$x=3$

(2)　$-6<x^2-5x<6$　より、　$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)>0$　→　$x<2$　,　$3<x$　・・・①

$x^2-5x-6<0$　　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=6,-1$　→　$-1<x<6$　・・・②



①、②より、　$-1<x<2$　,　$3<x<6$

(3)　与式より　$2x-1<-1$　,　$2x-1>1$　　∴　$x<0$　、　$x>1$

類題 **62**　次の方程式・不等式を解け。

(1)　$|x^2-10x|-24=0$

(2)　$|x^2-x-3|<3$

(3)　$|x^2-3x|\geq 2$

TYPE63　絶対値を含む方程式･不等式（2）　　重要度 A　レベル 4

次の方程式･不等式を解け。

(1)　$x^2-3x+1=|x-2|$　　**(2)**　$|x^2-x-2|<2x+2$　　**(3)**　$x^2-3|x-1|<7$

KEY　絶対値の中の符号で場合分け。場合分けの条件で吟味を忘れずに！

解

(1) ①　$2\leq x$　のとき、　$x^2-3x+1=x-2$　→　$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)0$　→　$x=1,3$

$2\leq x$　より、　$x=3$

②　$x<2$　のとき、　$x^2-3x+1=-x+2$　→　$x^2-2x-1=0$　→　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

$x<2$　より、　$x=1-\sqrt{2}$　　①、②より、　$x=3$　,　$1-\sqrt{2}$

(2)　$x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0$　より、符号の変わり目は　-1　,　2

①　$x<-1$　のとき、　$x^2-x-2>0$　より、

$x^2-x-2-2x-2=x^2-3x-4=(x-4)(x+1)<0$

$-1<x<4$　→　$x<-1$　より、解なし。

②　$-1\leq x<2$　のとき、　$x^2-x-2<0$　より

$-x^2+x+2-2x-2=-x^2-x<0$

→　$x^2+x=x(x+1)>0$　→　$x<-1$　,　$0<x$

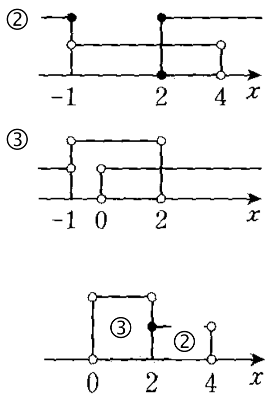
→　$-1\leq x<2$　より、　$0<x<2$

③　$2\leq x$　のとき、　$x^2-x-2>0$　より、

$x^2-x-2-2x-2=x^2--3x-4=(x-4)(x+1)<0$

→　$-1<x<4$　→　$2\leq x$　より、　$2\leq x<4$

①～③より、　$0<x<2$　、　$2\leq x<4$　従って、　$0<x<4$



(3) 符号の変わり目は、**1**

①　$x<1$　のとき、　$x-1<0$　より、

$x^2+3(x-1)-7=x^2+3x-10=(x+5)(x-2)<0$

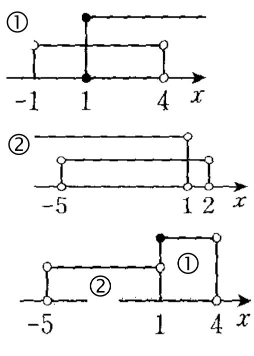
→　$-5<x<2$　→　$x<1$　より、　$-5<x<1$

②　$1\leq x$　のとき、　$x-1>0$　より、

$x^2-3(x-1)-7=x^2-3x-4=(x-4)(x+1)<0$

→　$-1<x<4$　→　$1\leq x$　より　$1\leq x<4$

①、②より、　$-5<x<4$



類題 **63** 次の方程式・不等式を解け。

(1) $|2x-1|=3x+2$

(2) $|2x-1|<x+1$

(3) $|x^2-3|\geq 4x$

TYPE64 絶対値を含む方程式・不等式（3） 重要度 A レベル 4

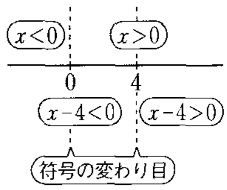
次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x|+|x-4|=2x+1$　　　**(2)** $2|x-1|+|x+4|<11$

KEY 絶対値の中身の符号の変わり目を境に場合分け。

解

(1) 符号の変わり目は $0,4$



① $x<0$ のとき、 $x<0,\ x-4<0$ ゆえ、 $-x-x+4=2x+1$

→ $4x-3=0$ → $x=\dfrac{3}{4}$ 不適（∵ $x<0$ ）

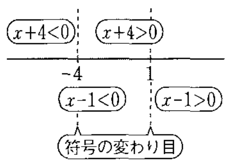
② $0\leq x<4$ のとき、 $x>0,\ x-4<0$ ゆえ、 $x-x+4=2x+1$

→ $2x-3=0$ → $x=\dfrac{3}{2}$ 適

③ $4\leq x$ のとき、 $x>0,\ x-4>0$ ゆえ、 $x+x-4=2x+1$ 解なし

①～③より、 $x=\dfrac{3}{2}$

(2) 符号の変わり目は $-4,1$



① $x<-4$ のとき、 $x-1<0,\ x+4<0$ ゆえ、 $-2(x-1)-(x+4)<11$

→ $-2x+2-x-4-11=-3x-13<0$

→ $x>\dfrac{-13}{3}$ 適

② $-4\leq x<1$ のとき、 $x-1<0,\ x+4>0$ ゆえ、 $-2(x-1)+x+4-11=-x-5<0$

→ $x<5$ 従って、 $-4\leq x<1$

③ $1\leq x$ のとき、 $x-1>0,\ x+4>0$ ゆえ、 $2(x-1)+(x+4)-11=3x-9<0$

→ $x<3$ 従って、 $1\leq x<3$

①～③より、 $-\dfrac{13}{3}<x<3$

類題 **64**　次の方程式･不等式を解け。

(1)　$|x|+|2x-3|=3$　→　符号の変わり目は、　$0,\dfrac{3}{2}$

①　$x<0$　のとき、　$x<0,2x-3<0$　ゆえ、　$-x-2x+3-3=-3x=0$
　→　$x=0$　不適（∵　$x<0$　）

②　$0\leq x<\dfrac{3}{2}$　のとき、　$x>0,2x-3<0$　ゆえ、　$x-2x+3-3=-x=0$　∴　$x=0$　適

③　$\dfrac{3}{2}\leq x$　のとき、　$x>0,2x-3>0$　ゆえ、　$x+2x-3-3=3x-6=0$　∴　$x=2$　適

①～③より、　$x=0,2$

(2)　$|x+2|+|2x-3|>10$　→　符号の変わり目は、　$-2,\dfrac{3}{2}$

①　$x<-2$　のとき、　$x+2<0,2x-3<0$　ゆえ、　$-x-2-2x+3-10=-3x-9>0$　→　$x<-3$　適

②　$-2\leq x<\dfrac{3}{2}$　のとき、　$x+2>0,2x-3<0$　ゆえ、　$x+2-2x+3-10=-x-5>0$　→　$x<-5$　不適

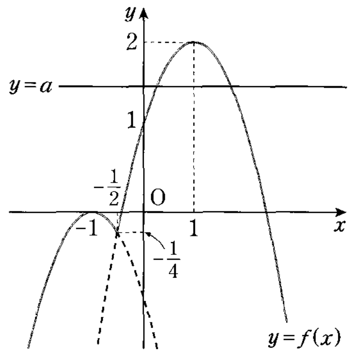
③　$\dfrac{3}{2}\leq x$　のとき、　$x+2+2x-3-10=3x-11>0$　→　$x>\dfrac{11}{3}$　適

①～③より、　$x<-3,\dfrac{11}{3}<x$

TYPE65　絶対値を含む方程式の実数解の個数　　重要度 B　レベル 4

a　を実数とするとき、方程式　$|2x+1|-x^2=a$　の異なる実数解の個数を求めよ。

KEY　y　=左辺とおいたグラフと直線　$y=a$　の共有点の個数を調べる。



解　符号の変わり目は、　$\dfrac{-1}{2}$

①　$x<-\dfrac{1}{2}$　のとき、左辺=　$-2x-1-x^2=-x^2-2x-1=-(x+1)^2$

②　$-\dfrac{1}{2}\leq x$　のとき、　左辺=　$2x+1-x^2=-(x-1)^2+2$

①、②から左辺のグラフと、右辺　$y=a$　を書き入れると 右図。
図より,

（ｉ）$a<\dfrac{-1}{4}$　のとき、共有点は **2** 個　（ⅱ）$\dfrac{-1}{4}=a$　のとき、共有点は **3** 個

（ⅲ）$\dfrac{-1}{4}<a<0$　のとき、共有点は **4** 個（ⅳ）$a=0$　のとき、共有点は **3** 個

（ｖ）　$0<a<2$　のとき、共有点は **2** 個　（ⅵ）$a=2$　のとき、共有点は **1** 個

（ⅶ）$2<a$　のとき、共有点は **0** 個

類題 **65** 方程式 $|x(x+2)|=-x+a$ が異なる **4** 個の実数解をもつように、実数 a の値の範囲を定めよ。

EXERCISE

(1) n が整数のとき、関数 $f(n)=n^2-\frac{4}{3}n+1$ の最小値を求めよ。

(2) 面積 **1** の△**ABC** において、辺 **AB** 上に **1** 点 **P** をとり、**P** を通り辺 **BC** に平行な直線と辺 **AC** との交点を **Q** とする。さらに、線分 **PQ** の中点に関して **A** と対称な点を **R** とする。点 **P** が辺 **AB** 上を動くとき、△**ABC** と△**PQR** の共通部分の面積 **S** の最大値を求めよ。

(3) **2** 次関数 $y=x^2+ax+a$ $(0\leq x\leq 1)$ が $x=1$ で最大になり、最大値と最小値の差が $\frac{1}{2}$ になるように、定数 a の値を定めよ。