第 5 章　集合と論理

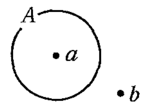
1. 集合

1-1　集合とその要素

□**集合･要素**　ある条件を満たすもの全体の集まりを**集合**といい**,**集合を作っている **1** つ **1** つのものを**,**
その集合の**要素**という。

□**有限集合･無限集合**　有限個の要素しか含まをい集合を**有限集合,**無限に多くの要素を含む集合を**無限集合**という。

□**属する**　集合は, 一般に　A,　B,　C　などの大文字のアルファベットで表し,
　a　が集合　A　の要素であるとき,　a　は　A　に**属する**といい,
　$a \in A$　(または　$A \ni a$　)で表す。
また,　b　が集合　A　の要素でないとき,　$b \notin A$　で表す。

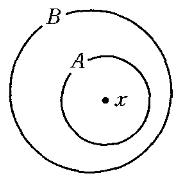


1-2　集合の表し方

□集合を表すには, 次の **2** つの方法がある。
　(1)要素を書き並べる方法
　(2)要素の満たす条件を示す方法
　いずれの場合も**{　}**によって示す。
(1)の場合は　$\{a, b . c, \cdots\}$　で「　$a, b, c,$　…が要素である集合」を意味し,
(2)の場合は　$\{\ x \mid p\ \}$　で「条件　p　を満たす　x　全体の集合」を意味する。
　例　自然数全体の集合 **N**, **1** けたの奇数全体の集合』については, 次のようになる。
　　(1)では　$N = \{1, 2, 3, \cdots\}$　、$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
　　(2)では　$N = \{x | x$　は自然数$\}$　,　$A = \{2n-1 | 1 \leq n \leq 5, n \in N\}$

1-3　部分集合

□　$A \subseteq B$　,　A　は　B　**の部分集合**　**2** つの集合　A, B　において,
　A　のどの要素もまた　B　の要素であるとき, すなわち
　$x \in A$　ならば　$x \in B$　が成り立つとき,　A　は　B　に含まれる
(または　B　は　A　を含む**)**といい,　$A \subseteq B$　(または　$B \supseteq A$　)で表す。
このとき,　A　は　B　の**部分集合**であるという。



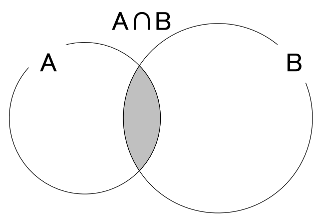
□なお,　$A \subseteq A$　であるから, **<u>A 自身 A の部分集合</u>**である。
□また,　$A \subseteq B$　かつ　$A \supseteq B$　であるとき,　A　と　B　は要素がすべて一致している
　このとき,　A　と　B　は等しいといい,　$A = B$　で表す。

1-4　空集合

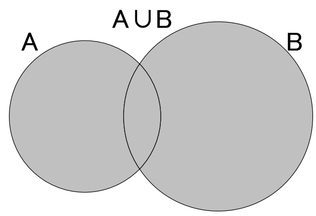
□**空集合**　Φ　　要素をまったくもたない集合を**空集合**といい,　ϕ　で表す。
空集合は任意の部分集合であると考える。

1-5　共通部分と和集合

□**共通部分**　**2** つの集合　A,　B　の両方に属する要素全体の集合を
　A,　B　の共通部分といい,　$A \cap B$　で表す。
　すなわち　$A \cap B = \{x | x \in A$ かつ $x \in B\}$



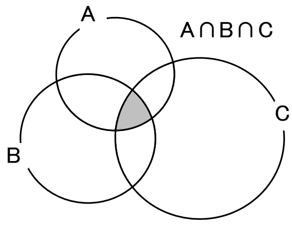
□和集合　集合　A,　B　の少なくとも一方に属する要素全体の集合を
　A,　B　の和集合といい,　$A \cup B$　で表す。
　すなわち　$A \cup B = \{x | x \in A$ または $x \in B\}$



□**3 つの集合の共通部分**　**3** つの集合　A, B, C のいずれにも属する要素全体の集合を　A, B, C の共通部分といい,

$$A\cap B\cap C$$

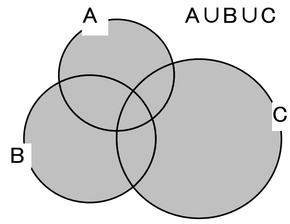
で表す。



□**3** つの集合の和集合　**3** つの集合　A, B, C　の少なくとも **1** つに属する要素全体の集合を **A**, **B**, **C** の和集合といい,

$$A\cup B\cup C$$

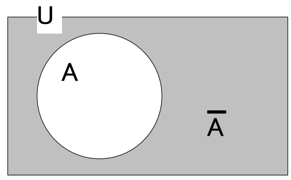
で表す。



1-6　補集合

□**全体集合**　集合を考えるときは, あらかじめ考えているもの全体の集合　U　が決まっていて, その部分集合として考えることが多い。このとき, 考えているもの全体の集合　U　を**全体集合**という。

□**補集合**　全体集合　U　の部分集合　A　に対して,　A　に属さない　U　の要素全体の集合を　U　に関する　A　の補集合といい、　$\overline{A}$　で表す。



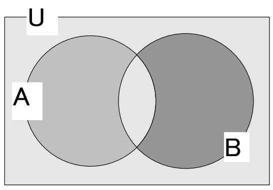
□すなわち　　$\overline{A}=\{x|x\in U \text{ かつ } x\notin A\}$

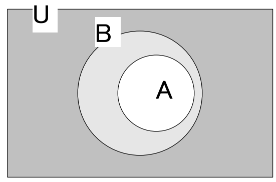
一般に　$A\cap\overline{A}=\phi$　、　$A\cup\overline{A}=U$

□**ド・モルガンの法則**　全体集合　U　の **2** つの部分集合　A, B　に対して,

$$\begin{cases}\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}\\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\end{cases}$$ **ド・モルガンの法則**

$$A\subseteq B \quad\Leftrightarrow\quad \overline{A}\supseteq\overline{B}$$





1-7　直積集合

□**直積集合**　$A\times B$　**2** つの集合　A, B　について,　A　の要素　a　と　B　の要素　b　に順序をつけた組　(a, b)　全体の集合を　A　と　B　の**直積集合**といい,　$A\times B$　で表す。

$$A\times B=\{(a, b)|a\in A \text{ かつ } b\in B\}$$

1-8　集合の要素の個数

□**2 つの集合の要素の個数**　　集合　A　の要素の個数を　$n(A)$　で表す。

2 つの集合　A, B　について,

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

□　$A\cap B=\Phi$　**のときの要素の個数**　上の公式において, 特に,　$A\cap B=\Phi$　のとき

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

□　**補集合の要素の個数**　全体集合　U　の部分集合　A　について

$$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$$

□**3 つの集合の要素の個数**　**3** つの集合　A, B, C　について

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

□**直積集合の要素の個数**　**2** つの集合　A, B　について

$$n(\ A\times B\text{¿}=n(A)\times n(B)$$

Check Exercize

1. Z を整数全体の集合とするとき，次の集合の包含関係を $\subseteq$ または=を用いて表せ。

A $=\{x|x$は3の正の約数$\}$, $B=\{2n-1|0<n<3, n\in Z\}$, $C=\{x|1\leq x\leq 3\}$

2. 集合 $\{1,2,3\}$ の部分集合をすべてあげよ。

3. $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ を全体集合とし，その部分集合 $A=\{2,\ 3,\ 7,\ 8\}$ ，
$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ について，次の集合を求めよ。

(1) $A\cap B$ **(2)** $\overline{A}$ **(3)** $\overline{A}\cup B$ **(4)** $\overline{A\cap B}$

4. 実数全体を全体集合とし，その部分集合
$A=\{x|0\leq x\leq 3\}$, $B=\{x|x<2, 4<x\}$ について，次の集合を求めよ。

(1) $A\cap B$ **(2)** $A\cup B$ **(3)** $\overline{A}$

5. 2 つの集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$ について，直積集合 $A\times B$ を求めよ。

==

Check Exercize 解答

1. $A=B\subseteq C$

2. ϕ $\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{,2,3\},\{1,2,3\}$

3. (1) $\{3,7\}$ **(2)** $\{0,1,4,5,6,9\}$ **(3)** $\{0,1,3,4,5,6,7,9\}$ **(4)** $\{0,1,2,4,5,6,8,9\}$

4. (1) $\{x|0\leq x<2\}$ **(2)** $\{x|x\leq 3, 4<x\}$ **(3)** $\{x|x<0, 3<x\}$

5. (1) $\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a)(3,b)\}$

==

TYPE101 集合の共通部分･和集合と補集合 重要度 B レベル 2

全体集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ の部分集合 A, B について，
$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1\}$, $A\cap B=\{2\}$, $\overline{A}\cap B=\{4,6\}$ が成り立つとき， A, B を求めよ。

KEY ベン図に要素を書き入れる。

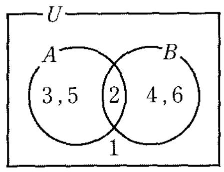
解 $B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=\{4,6\}$

ド･モルガンの法則より、 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{1\}$

$\therefore$ $A\cup B=\{2,3,4,5,6\}$

$\rightarrow$ $A\cap\overline{B}=\{3,5\}$ （ $A\cup B$ から B を除く）

よって $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=\{2,3,5\}$ ･･･(答)



類題 **101** 集合 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ の部分集合 $A,\ B$ について，
$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$, $A\cap B=\{0,5\}$, $\overline{A}\cap B=\{3,7\}$ が成り立つとき， A, B を求めよ。

TYPE102 集合の包含関係からの要素の決定　　重要度 B レベル 3

集合 $A=\{1,4,2a+1,a^2\}$, $B=\{9,b,b-3a\}$ について, $A\supseteq B$ となるように,
定数 a,b の値を定めよ。

KEY $A\supseteq B$ $\Rightarrow$ [$x\in B$ ならば $x\in A$]

解 $A\supseteq B$ となるための条件は, B のすべての要素が A の要素でもあることである。
(Ⅰ) $2a+1=9$ のとき $a=4$ で $A=\{1,4,9,16\}$, $B=\{9,b,b-12\}$
b と $b-12$ の差を考えて $b=16$
(Ⅱ) $a^2=9$ のとき $a=\pm 3$
(I) $a=3$ のとき $A=\{1,4,7,9\}$, $B=\{9,b,b-9\}$ で, $A\supseteq B$ とはならない。
(ⅱ) $a=-3$ のとき $A=\{1,4,-5,9\}$, $B=\{9,b,b+9\}$
ゆえに $b=-5$
よって $(a,b)=(4,16),(-3,-5)$ ・・・(答)

類題 102 集合 $A=\{2,4,c-1\},B=\{3,2c-a-1\},C=\{2,2c+b-2\}$ について,
$B=C\subseteq A$ となるように, 定数 a,b,c の値を定めよ。

TYPE103 集合の包含関係･相等　　重要度 B レベル 5

$A=\{k^2-l^2 \mid k,l$ は整数 $\}$, $B=\{2m+1 \mid m$ は整数 $\}$, $C=\{4n \mid n$は整数 $\}$
とするとき,次のことを証明せよ。
(l) $A\supseteq B$　　(2) $A\supseteq C$

KEY [$x\in B$ ならば $x\in A$] $\Rightarrow$ $A\supseteq B$

証明
(1) $x\in B$ ならば $x=2m+1$ (m は整数)とおける。
したがって $x=(m+1)^2-m^2=2m+1$ ($m+1,m$ は整数)
ゆえに, $m+1=k,m=l$ とおけば、 $x=k^2-l^2\in A$ であるから $A\supseteq B$ ・・・(終)

(2) $x\in C$ ならば $x=4n$ (n は整数)とおける。
したがって、 $k=n+1,l=(n-1)$ とすると、 $x=(n+1)^2-(n-1)^2=4n$ (n は整数)
ゆえに, $x\in A$ であるから $A\supseteq C$ ・・・(終)

類題 103 2 つの集合 $A=\{9l+15m \mid l,m$ は整数$\}$, $B=\{3n \mid n$は整数 $\}$ は等しいことを
証明せよ。

TYPE104　演　算　　　　　　　　　　　　重要度 B　レベル 3

正の数　a，b　に対して，演算　＊　を　$a*b=\sqrt{a}+\sqrt{b}$　と定義するとき，
$(1*4)*9$　および　$1*(4*9)$　の値を求めよ。

KEY　定義に従って，まず(　　)の中を計算する。

解　$1*4=\sqrt{1}+\sqrt{4}=3$　であるから

$(1*4)*9=3*9=\sqrt{3}+\sqrt{9}=\sqrt{3}+3$　　・・・(答)

$1*(4*9)=1*(\sqrt{4}+\sqrt{9})=1*5=\sqrt{1}+\sqrt{5}=1+\sqrt{5}$　　・・・(答)

類題 104　正の整数　m, n　に対して，演算　＊　を　$m*n$ =($2m$　を　n　で割った時の余り)
と定義するとき，　$10*8$　、$(17*10)*8$　の値を求めよ。

TYPE105　集合の要素の個数　　重要度 A　レベル 2

1 から 200 までの自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。
(1)　3 でも 5 でも割り切れる数
(2)　3 または 5 で割り切れる数
(3)　3 で割り切れない数
(4)　3 または 5 または 7 で割り切れる数

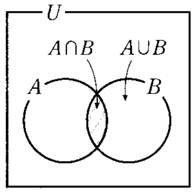
KEY　ベン図を見て，基本の集合の要素の個数で表す

解　1 から 200 までの自然数全体の集合を，全体集合　U　とすると　$n(U)=200$
U　の部分集合のうちで，3，5，7 で割り切れる数全体の集合をそれぞれ　A, B, C　とすると，

$A=\{3\times1, 3\times2, \cdots, 3\times66\}$　であるから　$n(A)=66$

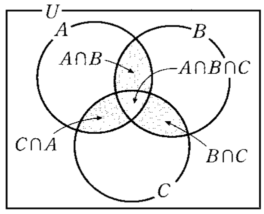
同様にして　$n(B)=40$　，$n(C)=28$

(1)　3 でも 5 でも割り切れる数全体の集合は，15 で割り切れる数全体の集合で，　$A\cap B$　で表されるから、
$A\cap B=\{15\times1, 15\times2, \cdots, 15\times13\}$　→　$n(A\cap B)=13$　・・・(答)



(2) 3 または 5 で割り切れる数全体の集合は，　$n(A\cup B)$　で表され
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=66+40-13=93$　・・・(答)

(3)　3 で割り切れない数全体の集合は，　$\overline{A}$　で表され
$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=200-66=134$　・・・(答)



(4)　3 または 5 または 7 で割り切れる数全体の集合は
$A\cup B\cup C$　で表される。
また，　$B\cap C$，　$C\cap A$，　$A\cap B\cap C$　はそれぞれ　35，21，105
で割り切れる数全体の集合であるから

$n(B\cap C)=5, n(C\cap A)=9, n(A\cap B\cap C)=1$

よって

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=66+40+28-13-5-9+1=108$　・・・(答)

類題 **105**

[1] **1** から **100** までの自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。

(1) **2** または **3** で割り切れる数

(2) **2** でも **3** でも割切れない数

(3) **2** または **3** で割り切れるが，**5** で割り切れない数

[2] **1000** 以下の自然数のうち，**15** と互いに素であるものの個数を求めよ。

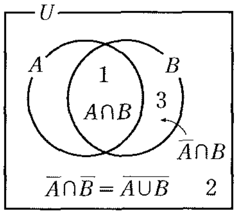
TYPE106　集合の要素の個数(2)　　重要度 B　レベル 3

全体集合 **U** の **2** つの部分集合 **A**，**B** について，

$n(U)=10$ ，$n(\overline{A}\cap B)=3$ ，$n(\overline{A}\cap\overline{B})=2$ ，$n(\overline{A\cap B})=9$ 　のとき，

$n(A),n(B)$ を求めよ。

KEY　ベン図に求まった要素の個数を書き入れていく。



解　$n(A\cap B)=n(U)-n(\overline{A\cap B})=10-9=1$

よって，　$n(B)=n(A\cap B)+n(\overline{A}\cap B)=1+3=4$　・・・(答)

また，　$n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})$

$=\ n(U)-n(\overline{A\cup B})=10-2=8$

よって，　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\therefore$　$n(A)=n(A\cup B)-n(B)+n(A\cap B)=8-4+1=5$　・・・(答)

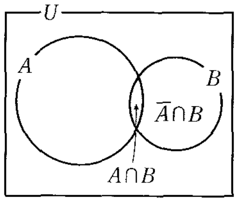
類題 **106**　**100** 人の学生のうち，数学が好きな者は **43** 人，得意な者は **29** 人，好きでも得意でもない者は **35** 人であった。数学が好きで得意な者と、好きだが得意でない者は何人いるか。

TYPE107　集合の要素の個数の範囲　　　　　　重要度 C　レベル 4

集合　U　とその部分集合　A,B　について，　$n(U)=100,n(A)=60,n(B)=48$　とするとき，

$n(A\cap B),n(\overline{A}\cap B)$ の値の範囲を求めよ。

KEY　ベン図で考える。　$P\subseteq Q$　→　$n(P)\leq n(Q)$



解　$n(A)\leq n(A\cup B)\leq n(U)$　より

$60\leq n(A\cup B)\leq 100$　　・・・①

また　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=\ 60+48-n(A\cap B)$

$=\ 108-n(A\cap B)$　・・・②

①に②を代入して　$60\leq 108-n(A\cap B)\leq 100$

よって，　$8\leq n(A\cap B)\leq 48$　・・・(答)

一方、　$n(\overline{A}\cap B)=n(A\cup B)-n(A)=n(B)-n(A\cap B)$　より、

$n(A\cap B)=n(B)-n(\overline{A}\cap B)$

$8\leq n(B)-n(\overline{A}\cap B)\leq 48$　→　$8\leq 48-n(\overline{A}\cap B)\leq 48$

よって　$0\leq n(\overline{A}\cap B)\leq 40$　・・・(答)

類題 **107** 海外旅行者 **100** 人の携帯薬品を調べたところ，カゼ薬が **75** 人，胃薬が **80** 人であった。カゼ薬と胃薬の両方とも携帯した人数，および両方とも携帯していない人数のとりうる値の範囲を求めよ。

2. 命題と証明

2-1 命題

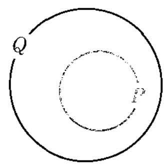
□**命題・真・偽** 正しいか正しくないかが定まっているような事柄を述べた文や式を**命題**という。命題が正しいとき，その命題は**真**であるといい，正しくないとき，その命題は**偽**であるという。

□**仮定・結論** 命題は，**2** つの条件 p, q について，

p ならば q すなわち $p \Rightarrow q$

の形に述べられるものが多い。このとき，**p** をこの命題の**仮定**，**q** を**結論**という。

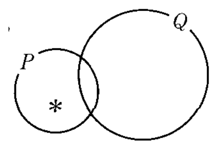
2-2 命題と集合



□**条件** p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とするとき，

（命題 $p \Rightarrow q$ **が真）**$\Leftrightarrow$ $P \subseteq Q$

（命題 $p \Leftrightarrow q$ **が真）**$\Leftrightarrow$ $P = Q$



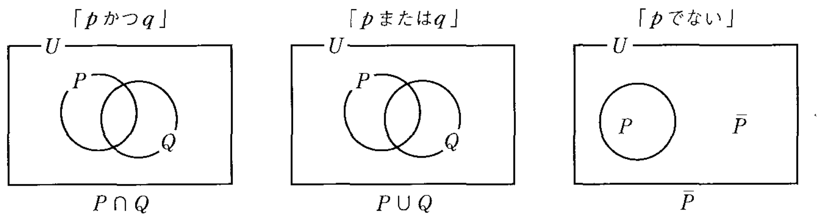
□**反例** そこで，命題 $p \Rightarrow q$ が偽であることを示すには $P \subseteq Q$ が成り立たないことを示す。すなわち，

p を満たすが q を満たさない例を **1** つあげればよい。

このような例を**反例**という。

2-3 条件と集合

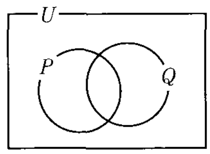
□全体集合を **U** として，条件 p, q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P, Q とすると，条件「p かつ q」，「p または q」，「p でない」を満たすもの全体の集合は，それぞれ次のようになる。



□**否定** 条件 p に対して，「p でない」という条件を p の否定といい，$\overline{p}$ で表す。

また，$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$，$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$ であるから

$$\left.\begin{array}{l}\overline{p\text{ かつ }q} \Longleftrightarrow \overline{p}\text{ または }\overline{q} \\ \overline{p\text{ または }q} \Longleftrightarrow \overline{p}\text{ かつ }\overline{q}\end{array}\right\}$$ **（ド・モルガンの法則）**

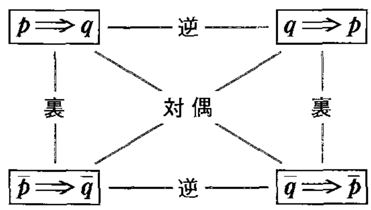


2-4 「すべて」と「ある」の否定

□**命題**「<u>すべての</u> x について p」の否定は，「<u>ある</u> x について p でない」

□命題「<u>ある</u> x について p」の否定は，「<u>すべての</u> x について p でない」

2-5 命題の逆・裏・対偶



□**逆・裏・対偶** 命題 $p \Rightarrow q$ に対して

命題 $q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の**逆**

命題 $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ を $p \Rightarrow q$ の**裏**

命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を $p \Rightarrow q$ の**対偶**

という。

□ 全体集合を U とし，条件 p, q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とすると，

$P \subseteq Q$ であっても $Q \subseteq P$ とは限らないから

命題 $p \Rightarrow q$ が真であっても，逆 $q \Rightarrow p$ が真であるとは限らない。

一方、 $P \subseteq Q \Leftrightarrow \overline{Q} \subseteq \overline{P}$ であるから

(命題 $p \Rightarrow q$ が真) $\Leftrightarrow$ (対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ が真)

したがって，命題 $p \Rightarrow q$ の代わりに，対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を証明してもよい。

2-6 背理法

□**背理法** 命題を証明するのに，その命題が成り立たないと仮定すると，矛盾が生じることを示すことによって，その命題が成り立つとする方法がある。この証明法を背理法という。

2-7 必要条件と十分条件

□**必要条件と十分条件** **2** つの条件 p, q について、 $p \Rightarrow q$ が真であるとき， q は p であるための**必要条件**， p は q であるための**十分条件**であるという。

□**必要十分条件・同値** $p \Rightarrow q$ ， $q \Rightarrow p$ がともに真であるとき，すなわち $p \Leftrightarrow q$ が真であるとき， p は q であるための必要十分条件という。このとき， p と q は同値であるともいう。

Check Exercize

1． 次の条件を否定せよ。ただし， a, b は実数とする。

(1) $a=0$ かつ $b=0$

(2) $a<-2$ または $2<a$

(3) a, b はともに整数である。

(4) a, b の少なくとも一方は正である。

==

Check Exercize 解答

1.(1) $a \neq 0$ または $b \neq 0$

(2) $-2 \leq a \leq 2$

(3) a, b は少なくとも一方は整数ではない

(4) a, b はともに負である。(a, b はともに正ではない。 **0** 以下である)

==

TYPE108 命題の真偽 **重要度 B レベル 1**

次の命題の真偽を調べよ。ただし， a, b は実数とする。

(1) $a+b>2, ab>1$ ならば $a>1$， $b>1$ **(2)** $a>1$ ならば $a^2>1$

(3)すべての実数 x について $\sqrt{x}$ は無理数である。

$p \Rightarrow q$ の場合，真なら証明する，偽なら反例をあげる。

解

(1) $a=3, b=1$ のとき， $a+b=4>2, ab=3>1$ であって

「 $a>1, b>1$ 」ではないから，命題は偽 ・・・(答)

(2) $\{a \mid a^2>1\} = \{a \mid a<-1$ または $1<a\} \supseteq \{a \mid a>1\}$ であるから，命題は真 ・・・(答)

(3) 実数 **1** について、 $\sqrt{1}=1$ は無理数ではないから，命題は偽 ・・・(答)

類題 **108** 次の命題の真偽を調べよ。

(1) 有理数と有理数の和は有理数である。

(2) 無理数と無理数の和は無理数である。

(3) 素数である偶数がある。

TYPE109 命題の否定 重要度 **B** レベル **3**

次の命題の否定を述べよ。

(1) すべての実数 x について $x^2>0$

(2) x^2 が無理数となる無理数 x がある。

KEY 「すべての x について p 」の否定は,「ある x について $\overline{p}$ 」

「ある x について p の否定は,「すべての x について $\overline{p}$ 」

解

(1) 「**ある実数** x **について** $x^2\leqq 0$ 」($x^2\leqq 0$ を満たす実数 x がある)・・・(答)

(2) 「ある無理数 x について x^2 は無理数である」ということだから, その否定は「**すべての無理数** x **について** x^2 **は有理数である**」・・・(答)

MEMO もとの命題とその否定の真偽は

(**1**)もと:偽(反例 $x=0$), 否定:真($x=0$),

(**2**)もと:真($x=\sqrt{2}-1$), 否定:偽(反例 $x=\sqrt{2}-1$)となる。

類題 **109** 次の命題の否定を述べよ。また, その真偽をいえ。

***(1)** 任意の **2** つの自然数 m,n について $m+n<mn$

(2) ある実数 x について $x^2=2x$

*(**3**) 整数 n が **6** の倍数でかつ **8** の倍数ならば, n は **48** の倍数である。

TYPE110 命題の逆・裏・対偶 重要度 **B** レベル **1**

次の命題の逆, 裏, 対偶を述べ, その真偽をいえ。ただし, x,y は実数とする。

$x>0$ かつ $y>0$ ならば $xy>0$ である。

KEY $p \Rightarrow q$ の逆: $q \Rightarrow p$ 、裏 : $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$, 対偶 : $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

解 逆「 $xy>0$ ならば $x>0$ かつ $y>0$ である」偽 ・・・(答)

「 $x=y=-1$ 」のとき「 $xy>0$ 」であって「 $x>0$ かつ $y>0$ 」ではない。

裏「 $x\leqq 0$ または $y\leqq 0$ ならば $xy\leqq 0$ である」

裏は逆の対偶で, 逆と真偽が一致するから, 偽 ・・・(答)

対偶「. $xy\leqq 0$ ならば $x\leqq 0$ または $y\leqq 0$ である」

対偶はもとの命題と真偽が一致するから, 真 ・・・(答)

類題 110　次の命題の逆および対偶を述べ，その真偽をいえ。
(1)　$ac=bc$　ならば　$a=b$　である。

(2)　$a=0$，$b=0$　ならば，すべての実数　x　に対して　$ax+b=0$　である。

TYPE111　対偶証明法　　　重要度 A　レベル 2

整数　n　の平方　n^2　が偶数ならば，　n　は偶数であることを証明せよ。

KEY　命題とその対偶の真偽は一致するから，対偶が真であることを示す。

証明　この命題の対偶は「　n　が奇数ならば，　n^2　は奇数である」である。
n　が奇数ならば，ある整数　k　を用いて，　$n=2k-1$　と表されるから
$$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1$$
$2k^2-2k$　は整数であるから，　n^2　は奇数である。
よって，対偶は真であるから，もとの命題も真である。・・・終

類題 111
(1)　a,b　が実数であるとき，　$a^2+b^2\neq 0$　ならば　$a\neq 0$　または　$b\neq 0$　であることを証明せよ。

(2)　m,n　が整数であるとき，　m^2+n^2　が 4 の倍数ならば，　m,n　はともに偶数であることを証明せよ。

TYPE112　背理法　　　重要度 A　レベル 3

$\sqrt{2}$　が無理数で，　a,b　を有理数とするとき，　$a+b\sqrt{2}=0$　ならば　$a=0$　かつ　$b=0$
であることを証明せよ。

KEY　背理法：結論の否定→矛盾→結論の肯定

証明　背理法で証明する。
ある 2 つの有理数　a,b　について，　$a+b\sqrt{2}=0$　であって，
$b\neq 0$　であると仮定すると，　$a+b\sqrt{2}=0$　より　$\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}$
a,b　は有理数であるから，　$-\dfrac{a}{b}$　も有理数である。
このことは、　$\sqrt{2}$　が無理数であることに反する。
よって，　$a+b\sqrt{2}=0$　ならば　$b=0$　である。
これを　$a+b\sqrt{2}=0$　に代入して　$a=0$
よって，　$a+b\sqrt{2}=0$　ならば　$a=0$　かつ　$b=0$　・・・(終)

類題 **112**

(1) a, b が実数であるとき， $a^2-ab\geqq 0$ または $b^2-ab\geqq 0$ であることを証明せよ。

(2) $\sqrt{6}$ が無理数であることを用いて， $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

TYPE113　等式を満たす有理数　　　　　**重要度 B　レベル 2**

等式 $(1+\sqrt{2})x+(1+2\sqrt{2})y=1$ を満たす有理数 x, y の値を求めよ。

KEY　a, b が有理数のとき　$a+b\sqrt{2}=0 \quad \Rightarrow \quad a=0$ かつ $b=0$

解　与式を展開し $\sqrt{2}$ について整理すると、 $(x+y-1)+(x+2y)\sqrt{2}=0$ ・・・①

$(x+y-1)$ ， $(x+2y)$ は有理数だから、①式が成り立つには、

$x+y-1=0$ かつ $x+2y=0$ ゆえ、 $y=-1$、$x=2$ ・・・(答)

類題 **113**

(1) 等式 $(1+2\sqrt{5})x+(-1+\sqrt{5})y=9$ を満たす有理数 x, y の値を求めよ。

(2) 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 1 つの解が $1+\sqrt{2}$ であるとき、有理数 a, b の値と他の解を求めよ。

TYPE114　必要条件と十分条件　　　　　**重要度 A　レベル 2**

次の $\boxed{\quad\quad}$ に，必要，十分，必要十分のうち最も適する語を入れよ。適する語がないときは

を入れよ。

(1) 集合 A, B について， $A\cup B=A$ は $A\cap B=B$ であるための $\boxed{\quad\quad}$ 条件である。

(2) 整数 n について， n^2 が 12 の倍数であることは、 n が 12 の倍数であるためのための

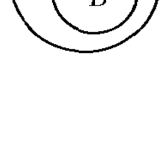
$\boxed{\quad\quad}$ 条件である。

(3) 実数 a, b について $a^2>b^2$ は $a>b$ であるための $\boxed{\quad\quad}$ 条件である。

(4) 実数 a, b について $a+b>0$ は a, b の少なくとも一方が正であるための $\boxed{\quad\quad}$ 条件である。

KEY　$p \Rightarrow q$ が真なら， p は十分条件， q は必要条件

解



(1) $A\cup B=A \quad \Leftrightarrow \quad A\supseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A\cap B=B$

よって，必要十分条件 ・・・(答)

(2)「 n^2 が 12 の倍数 $\Rightarrow$ n が 12 の倍数」 は偽（反例： $n=6$ ）

「 n が 12 の倍数 $\Rightarrow$ n^2 の倍数」は明らかに真

よって，必要条件 ・・・(答)

(3)「 $a^2>b^2 \Rightarrow a>b$ 」は偽（反例： $a=-1, b=0$ ）

「 $a>b \Rightarrow a^2>b^2$ 」は偽（反例： $a=0, b=-1$ ）

よって，必要条件でも，十分条件でもないから，× ・・・(答)

(4)「 $a+b>0 \Rightarrow a, b$ の少なくとも一方は正」は真（対偶が真）

「 a, b の少なくとも一方が正 $\Rightarrow$ $a+b>0$ 」は偽（反例 $a=1, b=-2$ ）

よって，十分条件 ・・・(答)

類題 II4　次の□にあてはまるものを，次の①から④のうちから選べ。ただし，文字はすべて実数とする。

(1)　$x>2$　は　$x^2>2x$　であるための□

(2)　$ab>0$　かつ　$bc>0$　は　$abc>0$　であるための□

(3)　$ab=0$　は　$a=0$　であるための□

(4)　$a>0$、$b>0$　は　$a+b>0$, $ab>0$　であるための□

①必要十分条件である　　②必要条件であるが，十分条件ではない
③十分条件であるが，必要条件ではない　④必要条件でも十分条件でもない

3.　整数問題

3.1　余りによる整数の分類

□任意の整数は,ある自然数 **m** に対して

$$mk, mk+1, mk+2, -, mk+m-1 \quad (k \text{ は整数})$$

のいずれかの形に表される。すなわち,整数全体の集合　Z　は,　m　で割った余りによって　m　個の組に分類される。

例　$m=4$　のとき，$4m, 4m+1, 4m+2, 4m+3$　の **4** つの組に分類される。

$$-2=4\times(-1)+2, -1=4\times(-1)+3, 0=4\times0, 1=4\times0+1,$$
$$2=4\times0+2, 3=4\times0+3, 4=4\times1, 5=4\times1+1 \quad ,\cdots$$

3.2　p　進法

□ **p** 進法　数字　$0, 1, 2, \cdots, p-1$　を用いて，p　ずつをまとめて上の位に上げていく数の表記法を　p　進法という。(p　:**2** 以上の整数)

例　**10** 進法の数は,次のようにして **3** 進法の数に直すことができる。

10進法	1	2	3	4	5	6	…	9	10	…
	‖	‖	‖	‖	‖	‖		‖	‖	
	$1\cdot3^0$	$2\cdot3^0$	$1\cdot3^1+0\cdot3^0$	$1\cdot3^1+1\cdot3^0$	$1\cdot3^1+2\cdot3^0$	$2\cdot3^1+0\cdot3^0$		$1\cdot3^2+0\cdot3^1+0\cdot3^0$	$1\cdot3^2+0\cdot3^1+1\cdot3^0$	
	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩		⇩	⇩	
3 進法	1	2	10	11	12	20		100	101	

Check　Exercize

1.　最大公約数が **10**,最小公倍数が **100** である **2** つの **2** 桁の自然数を求めよ。

==

Check　Exercize 解答

1.　20 と **50**

TYPE115 余りによる整数の分類　　　　　重要度 A レベル 3

n を整数とするとき，n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 または 1 であることを証明せよ。

KEY　n は $3k, 3k+1, 3k+2$ (k は整数)のいずれかで表される。

証明　k を整数とするとき，$n=3k$ または $n=3k+1$ または $n=3k+2$

$n=3k$ のとき　$n^2=(3k)^2=3\cdot 3k^2$ ($3k^2$ は整数)

$n=3k+1$ のとき　$n^2=(3k+1)^2=-3(3k^2+2k)+1$ ($3k^2+2k$ は整数)

$n=3k+2$ のとき　$n^2=(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$ ($3k^2+4k+1$ は整数)

よって，n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 または 1 である。・・・(終)

類題 115　n を整数とするとき，n^2+2 は 5 で割り切れないことを証明せよ。

k を整数とするとき，$n=5k$, $n=5k+1$, $n=5k+2$, $n=5k+3$, $5k+4$ と表せる。

$n=5k$ のとき　$n^2+2=(5k)^2=5\cdot 5k^2+2$ ($5k^2$ は整数)

$n=5k+1$ のとき　$n^2+2=(5k+1)^2=5(5k^2+2k)+3$ ($5k^2+2k$ は整数)

$n=5k+2$ のとき　$n^2+2=(5k+2)^2=5(5k^2+4k+1)+1$ ($5k^2+4k+1$ は整数)

$n=5k+3$ のとき　$n^2+2=(5k+3)^2=5(5k^2+6k+2)+1$ ($5k^2+6k+2$ は整数)

$n=5k+4$ のとき　$n^2+2=(5k+4)^2=5(5k^2+8k+3)+3$ ($5k^2+8k+3$ は整数)

いずれも 5 の倍数ではない。・・・(終)

TYPF116 連続した整数の積　　　　　重要度 B レベル 3

n を自然数とするとき，n^3-n は 6 の倍数であることを証明せよ。

KEY　因数に含まれる 2，3 の倍数の個数に着目する。

証明　$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$

$n-1, n, n+1$ は連続した 3 つの整数であるから，この中には 3 の倍数が 1 つ，2 の倍数が少なくとも 1 つ含まれる。また，3 と 2 は互いに素である。

よって，$(n-1)n(n+1)=n^3-n$ は 6 の倍数である。・・・終

類題 116

(1) 連続した 4 つの自然数の積は 24 で割り切れることを証明せよ。

(2) n を自然数とするとき，$4n^3+6n^2+2n$ は 12 の倍数であることを証明せよ。

TYPE117　有理数が整数となるための条件　　重要度 C　レベル 4

$\dfrac{n^3-n^2+n+2}{n-1}$ が整数となるような整数 n は全部でいくつあるか。

KEY 帯分数化した後，分母が分子の約数となるようにする。

解

$$\frac{n^3-n^2+n+2}{n-1}=\frac{(n-1)(n^2+1)+3}{(n-1)}=n^2+1+\frac{3}{n-1}$$

これが整数となるための条件は，

$n-1$ が 3 の約数となることである。したがって $n-1=\pm1,\ \pm3$

ゆえに　$n=2, 0, 4, -2$

よって，求める整数 n の個数は **4** 個・・・**(**答**)**

類題 **117**

$\dfrac{n^2+3n+2}{n-2}$ が整数となるような整数 n の値を求めよ。

TYPE118　方程式の整数解（1）　　重要度 C　レベル 3

$x^2+3y^2=4$ を満たす x, y の組はいくつあるか

KEY　$y^2 \geqq 0$ を利用して，x の値の範囲を求める。

解　$x^2+3y^2=4$ より　$3y=4-x^2$　・・・①

y は実数であるから　$3y^2=4-x^2\geq0$　ゆえに　$-2\leq x\leq2$

x は整数であるから　$x=\pm2,\ \pm1,\ 0$

$x=\pm2$ のとき ①より　$y^2=0$　ゆえに　$y=0$

したがって $(x, y)=(2, 0), (-2, 0)$

$x=\pm1$ のとき ①より　$y^2=1$　ゆえに　$y=\pm1$ （複号任意）…(*)

したがって $(x, y)=(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$

よって，求める整数 x, y の組は **6** 個　・・・**(**答**)**

（複号任意）…(*)　複号同順の対義語。複号同順であれは，$(x, y)=(1, 1)(-1, -1)$

となるが．複号任意であれば．**2** つの符号の組合せ方はとりうるすべてのパターンを考える。

よって上の答えのようになる。

類題 **118**　$x^2+9y^2-10x+24y+40=0$ を満たす整数 x, y の組を求めよ。

TYPE119　方程式の整数解（2）　　　　　重要度 A　レベル 3

$2xy-2x-y=5$ を満たす自然数 x, y の組を求めよ。

KEY　(　　)(　　) =定数の形に変形し，約数を考える。

解　$2xy-2x-y=5$ より

$2x(y-1)-(y-1)-1=5$　ゆえに $(2x-1)(y-1)=6$　・・・①

x、y は自然数であるから，$2x-1$ は奇数で，$y-1$ は整数である。

また，$x \geq 1, y \geq 1$ より $2x-1 \geq 0$

ゆえに，①より $(2x-1, y-1)=(1, 6), (3, 2)$

これを解いて**(x , y)=(1，7)，(2，3) ・・・(答)**

類題 **119**　次の等式を満たす自然数 x, y の組を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$

(2)　$x^2-y^2=32$

TYPE120　方程式の整数解（3）　　　　　重要度 B　レベル 4

$5x+3y=35$ を満たす自然数 x, y の組を求めよ。

KEY　$3y=5($　$)$ と変形し，因数の約数を考える。

解　$5x+3y=35$ より $3y=5(7-x)$　・・・①

$y, 7-x$ は整数で，3，5 は互いに素であるから，$7-x$ は 3 の倍数である。

したがって，$7-x=3k$ （k は整数）とおくと $x=-3k+7$

また，①より $3y=15k$　ゆえに $y=5k$

$x \geq 1, y \geq 1$ より $-3k+7 \geq 1$，$5k \geq 1$ ゆえに $\dfrac{1}{5} \leq k \leq \dfrac{7}{3}$　k は整数ゆえ、$1 \leq k \leq 2$

よって、$k=1,2$　これより $(x, y)=(4,5)(1,10)$　**・・・(答)**

類題 **120**

(1)　$2x+3y=100$ を満たす自然数 x, y の組はいくつあるか。

(2)

＝＝＝

EXERCISE

1. 実数全体の集合の部分集合　$A=\{x\ |x^2+ax+b\leq 0\}$　と　$B=\{x\ |-3\leq x\leq 1\}$　について，
$A\cup B=\{x\ |-3\leq x\leq 3\}$　，　$A\cap B=\{x\ |-2\leq x\leq 1\}$　が成り立つように，定数　a, b　の値を定めよ。

2.　$|x|<a$　が　$x^2-x-2<0$　であるための十分条件となるように，正の定数　a　の値の範囲を定めよ。

3.　$100\times 99\times 98\times\cdot\cdot\times 3\times 2\times 1$　を計算した整数の末尾（下の桁）には何個の　**0**　が連続して並ぶか。

4.　53^{99}　の一の位の数を求めよ。

5.　自然数　$a, b\, c$　が　$a^2+b^2+c^2$　を満たすとき，　a, b　の少なくとも **1** つは **3** の倍数であることを証明せよ。

6.　自然数　n　が奇数ならば　n^3-n　は **24** で割り切れることを証明せよ。

7.　$\sqrt{n^2+72}$　が整数となるような整数　n　を求めよ。　（東京医歯大）**TYP** 川 **9**

8.　**11** で割ると **7** 余り，**5** で割ると **3** 余る自然数がある。この自然数を　11×5　で割ったときの余りを求めよ。

9.　n　を自然数とするとき，**n** と **2 n+1** は互いに素であることを証明せよ。

HINT :

3.　**5** の倍数が **2** の倍数と掛け合わされると，末位に **0** が **1** つ増える。特に **25** の倍数は **4**（＝**22**）の倍数と
掛け合わされると末位の **0** を **2** つ増やすことに注意。

4. 一の位の数が **1** である数の一の位は，何乗しても **1** である。 **5.**　対偶を証明せよ。

6. 連続 **3** 数の積は **2** の倍数であり，かつ，**3** の倍数である。

8.　$11k+7 = 5l+3$　を式変形して，　$11p=5q$　を導く。

9.　背理法で証明する。「**n** と **2 n+1** が **1** 以外の公約数 **q** をもつ」と仮定する。