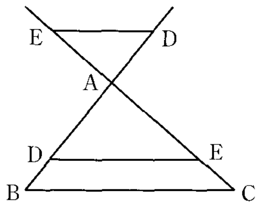
第 4 章　平面図形

1. 三角形の性質

1-1　平行線と線分の比

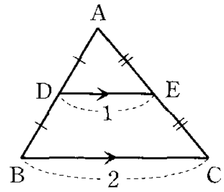
□平行線と線分の比　一般に、平行線において次の定理が成立する。

> $\triangle ABC$ の辺 AB, AC またはその延長上の点をそれぞれ D, E とするとき
>
> $$DE \parallel BC \iff \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\left(=\frac{DE}{BC}\right)$$
>
> $$DE \parallel BC \iff \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$



□中点連結定理　上の定理において、**D , E** を辺 **AB , AC** の中点にとる。

> $\triangle ABC$ の辺 AB, AC の中点をそれぞれ D, E とするとき
>
> $$DE \parallel BC \quad , \quad DE=\frac{1}{2}BC$$



□中点連結定理の逆　中点連結定理は逆も成立する。

$\triangle ABC$ の辺 AB の中点を D ，辺 AC 上の点を E とするとき

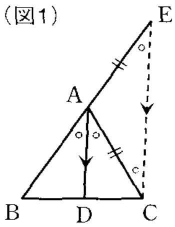
$DE \parallel BC$ であるならば、 E は辺 AC の中点である。

1-2　三角形の角の 2 等分線

□三角形の 2 等分線においては次の定理が成立する。

> $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とするとき
>
> $BD : DC = AB : AC$　　図 1

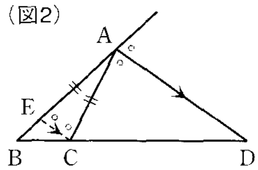
（図1）



□

> $AB \neq AC$ である $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の外角の 2 等分線と辺 BC の延長との交点を D とするとき
>
> $BD : DC = AB : AC$　　図 2

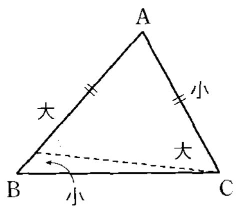
（図2）



1-3　三角形の辺の長さと角の大きさの関係

□

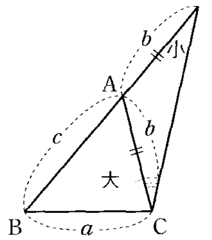
> $\triangle ABC$ において
>
> $AB > AC \iff \angle C > \angle B$



1-4　三角形の成立条件

□

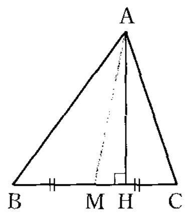
> 1 つの三角形において、
>
> 2 辺の長さの和は他の 1 辺の長さより大きく、
>
> 2 辺の長さの差は他の 1 辺より小さい。



1-5　中線定理

□

> $\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とするとき
>
> $$AB^2+AC^2=2\left(AM^2+BM^2\right)$$



Check Exercize

1. 四角形 $ABCD$ において、辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とすると、四角形 $PQRS$ は平行四辺形であることを証明せよ。

2. $AB=2, BC=4, CA=3$ である $\triangle ABC$ において、辺 BC の中点を M とする。線分 AM の長さを求めよ。

==

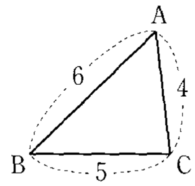
Check Exercize 解答

1. 証明略　中点連結定理を用いて、$PQ=SR, PQ \parallel SR$ をいう。

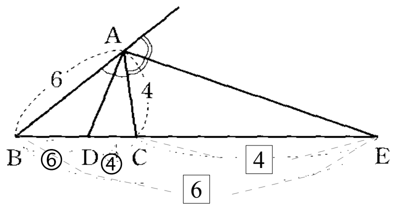
2. $AM=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

TYPE88　三角形の角の二等分線　　重要度 A レベル 1

$\triangle ABC$ において, $AB=6, BC=5, CA=4$ とし, $\angle A$ の二等分線とその外角の二等分線が辺 BC またはその延長と交わる点をそれぞれ D, E とするとき,線分 DE の長さを求めよ。



KEY $BD : DC = BE : EC = AB : AC$



解　$BD : DC = AB : AC = 6 : 4$ より

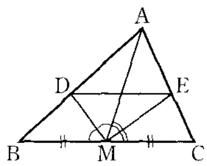
$DC=\dfrac{4}{6+4}BC=2$

$BE : EC = AB : AC = 6 : 4$ より

$CE=\dfrac{4}{6-4}BC=10$

よって　$DE=DC+CE=2+10=12$ ・・・(答)

類題 88　$\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とし, $\angle AMB$, $\angle AMC$ の二等分線がそれぞれ辺 AB, AC と交わる点を D, E とすると, $DE \parallel BC$ であることを証明せよ。



MD は $\angle AMB$ の二等分線であるから,

$AM : BM = AD : DB$

ME は $\angle AMC$ の二等分線であるから,

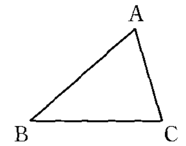
$AM : CM = AE : EC$

ここで, $BM = CM$ であるから,

$AD : DB = AE : EC$

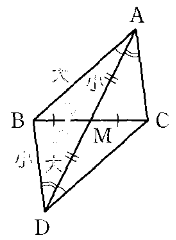
よって　$DE \parallel BC$ ・・・(答)

TYPE89　三角形の辺の長さと角の大きさの関係　重要度 A　レベル 3



$\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とするとき, $AB > AC$
ならば $\angle BAM < \angle CAM$ であることを証明せよ。

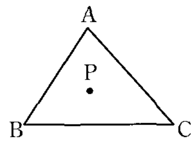
KEY $\triangle ABC$ において $b > c \Leftrightarrow B > C$



証明　線分 AM の M からの延長上に $AD = 2AM$ となる点 D を
とると, 四角形 $ABDC$ は平行四辺形であることから
$AC = BD$
これと $AB > AC$ より $AB > BD$
ゆえに, $\triangle ABD$ において $\angle BAD < \angle BDA$
ここで, $BD \parallel AC$ より
$\angle BDA = \angle CAD$
よって $\angle BAM < \angle CAM$ ・・・(終)

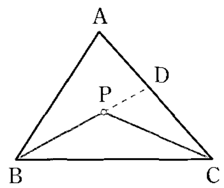
類題 **89**　$\triangle ABC$ において、$\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とするとき、$\angle ADB > \angle ADC$
ならば $AB > AC$ であることを証明せよ。

TYPE90　三角形の成立条件　重要度 A　レベル 3



△ABC の内部に点 **P** をとるとき,
AB+AC>PB+PC であることを証明せよ。

$\triangle ABC$ において $|b - c| < a < b + c$

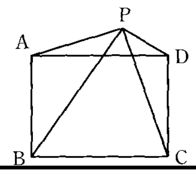


証明　線分 BP の延長と辺 AC との交点を D とすると,
$\triangle ABD$ において $AB + AD > BD$ ・・・①
$\triangle PCD$ において $PD + CD > PC$ ・・・②
①、②の辺々加えて $AB + AD + PD + CD > BD + PC$
よって $AB + (AD + CD) > (BD - PD) + PC$
ここで $AD + CD = AC$, $BD - PD = PB$
よって $AB + AC > PB + PC$ ・・・(終)

類題 **90**　$\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とするとき, $AB + AC > 2AM$ であることを証明せよ。

TYPE91　中線定理　　重要度 A　レベル 2

長方形　$ABCD$　の各頂点と任意の点　P　を結ぶとき，
$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$　であることを証明せよ。



KEY　$\triangle PAC$　と　$\triangle PBD$　で中線定理を用いる。

証明　長方形　$ABCD$　の **2** つの対角線　AC，　BD　の交点を　M　とすると，
M　は対角線　AC，　BD　の中点である。
$\triangle PAC$　において，中線定理により、

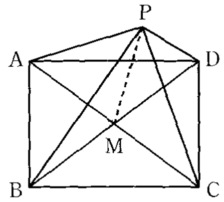
$$PA^2+PC^2=2\left(PM^2+AM^2\right)\quad \cdots ①$$

$\triangle PBD$　において，中線定理により、

$$PB^2+PD^2=2\left(PM^2+BM^2\right)\quad \cdots ②$$

$AM=BM$　であるから，①、②より、

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2\quad \cdots (終)$$

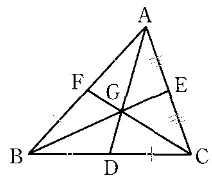


類題 **91**　平行四辺形　$ABCD$　において，　$2\left(AB^2+AD^2\right)=AC^2+BD^2$　であることを証明せよ。

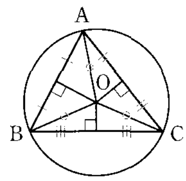
2.　三角形の五心

2-1　三角形の重心･外心･垂心･内心･傍心

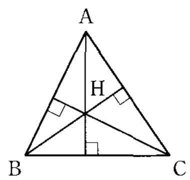
□　**重心**　三角形の **3** つの中線は **1** 点で交わる。
この交点を重心という。重心は各中線を **2**:**1** の比に内分する。



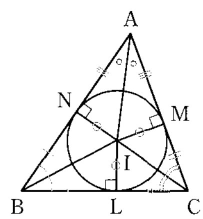
□　**外心**　三角形の **3** つの辺の垂直二等分線は **1** 点で交わる。
この交点を外心という。外心は，**3** つの頂点から等しい距離にあるから，
外接円の中心である。



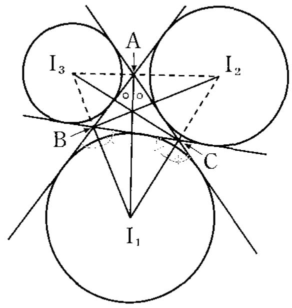
□　**垂心**　三角形の各頂点から対辺またはその延長に引いた
3 つの垂線は **1** 点で交わる。
この交点を垂心という。



□　**内心**　三角形の **3** つの内角の二等分線は **1** 点で交わる。この交点を内心という。
内心は，**3** つの辺から等しい距離にあるから，内接円の中心である。



□ **傍心**　三角形の **2** つの頂点における外角の二等分線と他の頂点における内角の二等分線は **1** 点で交わる。
この交点を傍心という。
傍心は **2** つの辺の延長と他の辺に接する円(傍接円)の中心で, **1** つの三角形に **3** つある。



2-2　三角形の五心

□ **五心**　三角形の垂心, 外心, 垂心, ルト, 傍心を三角形の五心という。

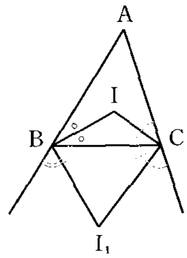
TYPE92　三角形の内心･傍心･垂心を見込む角　重要度 B　レベル 2

$\triangle ABC$ の内心を I , 頂角 A 内の傍心を I_1 とするとき,

$$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A \quad , \quad \angle BLC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$$

であることを証明せよ。

KEY　$\triangle BCI$, 四角形 $IBLC$ の内角に注目する。



証明　$\angle BIC = 180° - (\angle IBC + \angle ICB)$

$= 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$

$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° + \frac{1}{2}\angle A$

また, $\angle IBI_1 = \angle ICI_1 = 90°$ であるから

$\angle BIC + \angle BI_1C = 180°$　･･･①

よって　$\angle BI_1C = 180° - \angle BIC$

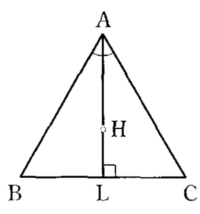
$= 180° - \left(90° + \frac{1}{2}\angle A\right) = 90° - \frac{1}{2}\angle A$　･･･(終)

類題 **92**　鋭角三角形 ABC の垂心を H とするとき, $\angle BHC = 180° - \angle A$ であることを証明せよ。

TYPE93　五心の 2 つが一致する三角形　重要度 B　レベル 2

垂心と内心が一致する三角形は正三角形であることを証明せよ。

KEY　頂角の二等分線で分割された **2** つの三角形の合同を示す。



証明　$\triangle ABC$ の垂心と内心が同じ点 H であるとき, AH の延長と辺 BC の交点を L とする。

$\triangle ABL$ と $\triangle ACL$ において

AL は共通, $\angle ALB = \angle ALC = 90°$, $\angle BAL = \angle CAL$

ゆえに, $\triangle ABL \equiv \triangle ACL$ であるから $AB = AC$

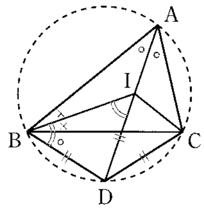
同様にして　$AB = BC$　よって, $\triangle ABC$ は正三角形である。･･･(終)

類題 **93**　垂心と内心が一致する三角形は正三角形であることを証明せよ。

TYPE94　三角形の五心の性質　重要度 A レベル 3

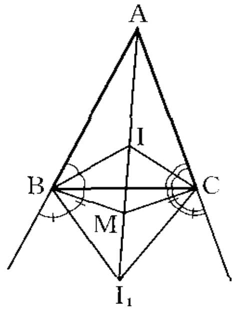
$\triangle ABC$ の内心を I とし，AI の延長が $\triangle ABC$ の外接円と交わる点を D とするとき，
$DB = DC = DI$
であることを証明せよ。

KEY　$\triangle IBD$ が二等辺三角形であることを示す。



証明　$\angle BAD = \angle CAD$ であるから　$DB = DC$
また，$\triangle DBI$ において
$\angle DBI = \angle CBD + \angle CBI$
$\angle DIB = \angle IAB + \angle IBA$
ここで　$\angle CBD = \angle CAD = \angle IAB$　　また　$\angle CBI = \angle IBA$
ゆえに，$\angle DBI = \angle DIB$ であるから　$DB = DI$
よって，$DB = DC = DI$　・・・(終)

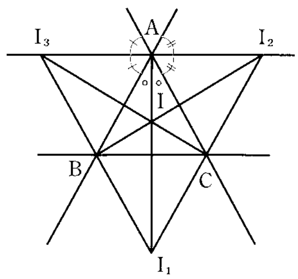
類題 **94**　$\triangle ABC$ の内心を I，頂角 A 内の傍心を I_1 とし，線分 II_1 の中点を M とするとき，$MB = MC$ であることを証明せよ。



TYPE95　三角形の五心の関係　重要度 A レベル 3

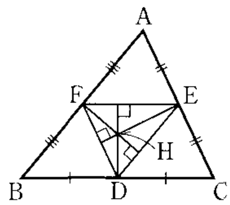
$\triangle ABC$ の内心を I，$\angle A, \angle B, \angle C$ 内の傍心をそれぞれ I_1, I_2, I_3 の垂心であることを証明せよ。

KEY　$AI_1 \perp I_2I_3$ などを示す。



証明 I_1A は $\angle A$ を二等分し，I_2A，I_3A はそれぞれ $\angle A$ の外角を二等分する。
ゆえに，$\angle I_1AI_2 = \angle I_1AI_3 = 90°$ であるから
$AI_1 \perp I_2I_3$
同様にして　$BI_2 \perp I_3I_1$，$CI_3 \perp I_1I_2$
よって，I は $\triangle I_1I_2I_3$ の 3 つの垂線 AI_1，BI_2，CI_3 の交点，
すなわち垂心である。・・・(終)

類題 **95**　$\triangle ABC$ の辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D, E, F とするとき, $\triangle ABC$ の外心と $\triangle DEF$ の垂心は一致することを証明せよ。

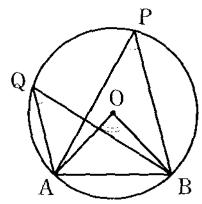


3 円の性質

3-1 円周角の定理

□

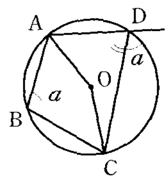
同じ弧または長さが等しい弧に対する円周角は全て等しく、その弧に対する中心角の半分に等しい。
4点 A, B, P, Q について、P と Q が直線 AB の側にあって、$\angle APB = \angle AQB$ ならば、この **4** 点は **1** つの円周上にある。



3-2 円に内接する四角形

□

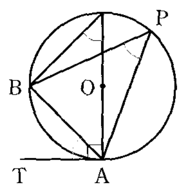
円に内接する四角形の対角の和は **180°**である。
1 個の対角の和が **180°**である四角形は円に内接する。



3-3 接弦定理

□

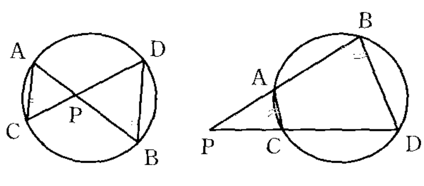
円の接線と接点を一端とする弦のなす角はその角内の弧に対する円周角に等しい。
円の弦とその一端を通る直線とのなす角がその角内の弧に対する円周角に等しいならば,その直線は円の接線である。



3-4 方べきの定理

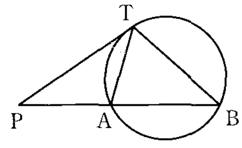
□方べきの定理Ⅰとその逆

2 つの線分 AB, CD の交点, またはそれらの延長の交点を P とする。
4 点 A, B, C, D が同一円周上にある
$\Leftrightarrow \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD$



□方べきの定理Ⅱとその逆

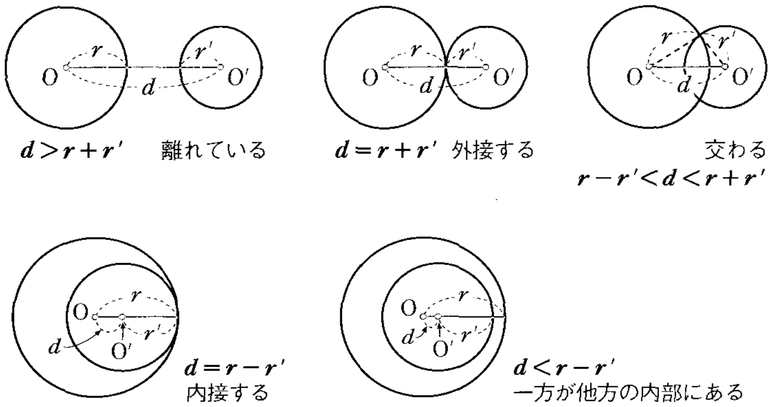
$\triangle ABT$ の辺 AB の延長上の点 P について
PT が $\triangle ABT$ の外接円の接線である $\Leftrightarrow$ $PA \cdot PB = PT^2$



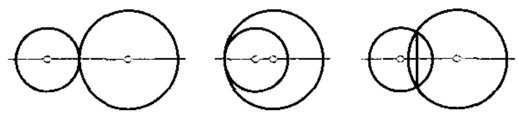
3-5 2つの円の位置関係

□2円の半径と中心間の距離

2つ円の半径を r, r' とし, 中心間の距離を d とする。 $r > r'$ のとき, 2つの円の位置関係と d, r, r' の関係は次のようになる。

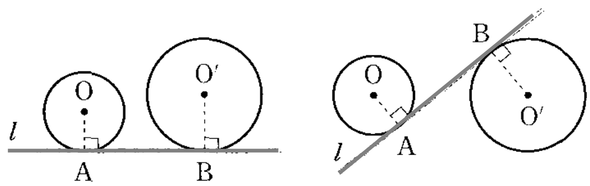


□中心線･共通弦 2つの円が接する場合, 接点は2つの円の中心を通る直線(**中心線**)上にある。
また, 2つの円が交わる場合, 2つの円に共通な弦(**共通弦**)は中心線で垂直に二等分される。



3-6 2つの円の共通接線

□共通接線 2つの円の両方に接している直線を, その2つの円の**共通接線**という。



Check Exercize

1. 三角形の重心は, 3つの(ア)の交点である。
重心は各中線を(イ):1の比に内分する。
三角形の外心は,3つの(ウ)の(エ)の交点である。
三角形の内心､は,3つの(オ)の(カ)の交点である。
上記ア～カに該当する語句を記入せよ。

2. ある円の2つの弦 AB, CD が点 P で交わり, $AP=3, BP=4, CD=8$ であるとき, 線分 CP の長さを求めよ。

3. 2つの円の半径を $r=5, r'=3$ とし,中心間の距離を d とする。
次の場合, 2つの円の位置関係と共通接線の本数を求めよ。
(l) $d=9$ (2) $d=8$ (3) $d=6$ (4) $d=2$ (5) $d=1$

==

Check Exercize 解答

1. ア:中線 イ:2 ウ:辺 エ:垂直2等分線 オ:内角 カ:2等分線

2. 2または6

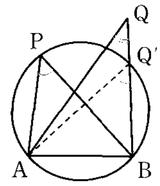
3. (1) 離れている。 4本 (2) 外接する。3本 (3) 2点で交わる。2本
(4) 内接する。1本 (5) 半径3の円が半径5の円の内部にある。0本

==

TYPE96　円に関する定理の逆の証明　　重要度 A　レベル 2

4 点　A，B，P，Q　について，P　と　Q　が直線　AB　の同じ側にあって，
$\angle APB = \angle AQB$　ならば，この 4 点は同一円周上にあることを証明せよ。
（円周角の定理の逆）

KEY　Q　が 3 点　A，B，P　を通る円の外部にも内部にもないことを示す。



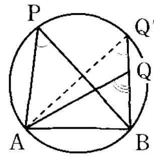
証明　A，B，P　を通る円と直線　BQ　の　B　以外の共有点を　Q'　とする。
Q　がこの円の外部にあるとすると

$$\angle AQB < \angle AQ'B = \angle APB \quad \leftarrow \quad \angle AQ'B = \angle AQB + \angle QAQ'$$

Q　がこの円の内部にあるとすると

$$\angle AQB > \angle AQ'B = \angle APB \quad \leftarrow \quad \angle AQB = \angle AQ'B + \angle QAQ'$$

よって，$\angle APB = \angle AQB$　ならば，
Q　は　A，B，P　を通る円周上にある。・・・(終)

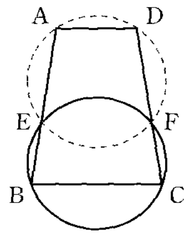


類題 96　四角形　$ABCD$　において，$\angle A + \angle C = 180°$　ならば，この四角形は円に内接することを証明せよ。（四角形が円に内接する条件）

TYPE97　四角形が円に内接する条件　　重要度 A　レベル 2

$AD \parallel BC$　である台形　$ABCD$　において，B，C　を通る円が 2 辺　AB，CD　と
それぞれ頂点以外の点　E，F　で交わるとき，四角形　$AEFD$　は円に内接する
ことを証明せよ。

KEY　円に内接する。⇔　向かい合う内角の和は　180°　である。

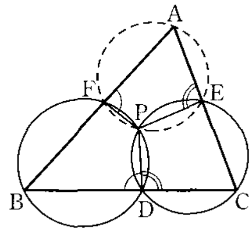


証明　四角形　$BCFE$　は円に内接するから

$$\angle EFD = 180° - \angle EFC = \angle B \qquad \cdots ①$$

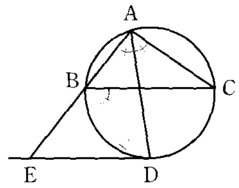
また，$AD \parallel BC$　であるから　$\angle A + \angle B = 180°$　・・・②
①、②より　$\angle A + \angle EFD = 180°$
よって，四角形　$AEFD$　は，
向かい合う内角の和が　180°　であるから，円に内接する。・・・(終)

類題 97　$\triangle ABC$　の 3 辺　BC，CA，AB　上にそれぞれ点　D，E，F　がある。
3 点　B，D，F　を通る円と 3 点　C，D，E　を通る円の　D　以外の交点を P とするとき，
四角形　$AFPE$　は円に内接することを証明せよ。



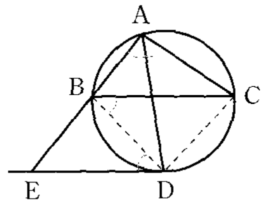
TYPE98　接弦定理　　　　　　　　　**重要度 A　レベル 2**

円に内接する $\triangle ABC$ がある。 $\angle A$ の二等分線と円の交点を D とする。次に, D において円に接線を引き, これと AB の延長との交点を E とする。このとき, $BC \parallel ED$ となることを証明せよ。



KEY　円周角の定理と接弦定理を用いて, 錯角が等しいことを示す。

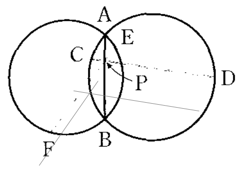
証明　BD を結ぶと, 円周角の定理により　$\angle CBD = \angle CAD$
また, 接弦定理により　$\angle EDB = \angle BAD$
$\angle BAD = \angle CAD$　であるから
$\angle CBD = \angle EDB$
よって、錯角が等しいから　$BC \parallel ED$　・・・(終)



類題 **98**　円に内接する $\triangle ABC$ がある。 C における円の接線と AB の延長の交点を D とし, $\angle BDC$ の二等分線と辺 BC, CA の交点をそれぞれ E, F とする。 $\triangle CEF$ は二等辺三角形であることを証明せよ。

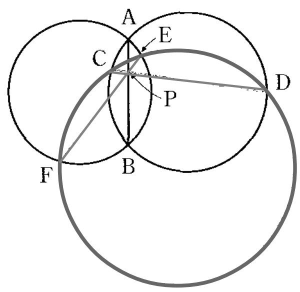
TYPE99　方べきの定理 I　　**重要度 A　レベル 3**

2 点 A, B で交わる **2** 円があり,弦 AB 上の点 **P** で交わる **2** 円の弦をそれぞれ CD, EF とするとき, **4** 点 C, D, E, F は同一円周上にあることを証明せよ。

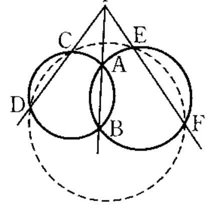


KEY　同一円周上にある証明は方べきの定理の逆を用いる。

証明　**4** 点 A, B, C, D は同一円周上にあるから
方べきの定理 I により,
$PA \cdot PB = PC \cdot PD$
同様に考えて　$PA \cdot PB = PE \cdot PF$
ゆえに　$PC \cdot PD = PE \cdot PF$
よって, 方べきの定理 I の逆により,
4 点 C, D, E, F は同一円周上にある。・・・(終)



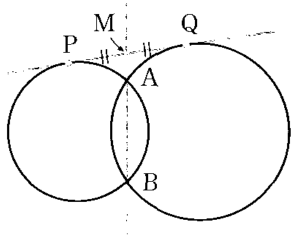
類題 **99**　**2** 点 A, B で交わる **2** 円があり, 弦 BA の延長上に点 P がある。 P を通る直線が一方の円と **2** 点 C, D で交わり, P を通る別の直線が他方の円と **2** 点で交わるとき, **4** 点 C, D, E, F は同一円周上にあることを証明せよ。



TYPE100　方べきの定理Ⅱ　重要度 A レベル 3

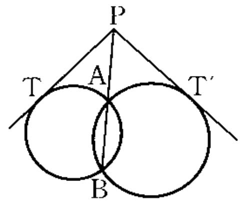
2 点 A, B で交わる 2 円の共通接線とこの 2 円との接点をそれぞれ P, Q とするとき, 直線 AB は線分 PQ を 2 等分することを証明せよ。

KEY 方べきの定理Ⅱを 2 回用いる。



証明 直線 AB と線分 PQ の交点を M とすると,
MP は $\triangle ABP$ の外接円の接線であるから,
方べきの定理Ⅱにより $MA\cdot MB=MP^2$
同様に考えて $MA\cdot MB=MQ^2$
したがって $MP^2=MQ^2$ よって $MP=MQ$
よって, 直線 AB は線分 PQ を 2 等分する。･･･(終)

類題 100 2 点 A, B で交わる 2 円があり, 弦 BA の延長上に点 P がある。 P を通る 2 円の接線をそれぞれ PT, PT' とするとき, $PT=PT'$ であることを証明せよ。



＝＝

EXERCISE

1. $\triangle ABC$ において, 辺 BC を最大の辺とする。辺 AB, AC 上にそれぞれ P、Q をとると, $BC>PQ$ であることを証明せよ。ただし, P, Q は $\triangle ABC$ の頂点と、一致しないものとする。

2. $\triangle ABC$ の辺 BC の三等分点のうち, 点 B に近いものを D とするとき,
$2AB^2+AC^2=3AD^2+6BD^2$ であることを証明せよ。

3. $\triangle ABC$ の内接円が辺 BC, CA, AB と接する点をそれぞれ L, M, N とし,
$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ とすると, $AM=AN=\frac{1}{2}(b+c-a)$ であることを証明せよ。

4. $\triangle ABC$ の重心を G , 外心を O , 垂心を H とするとき, 次のことを証明せよ。
(1) O から辺 BC に引いた垂線の足を M とするとき $AH=2OM$
(2) 3 点 O, G, H は同一直線上にあり $OG:GH=1:2$

5. $\triangle ABC$ の垂心から辺 BC, CA, AB に引いた垂線の足をそれぞれ L, M, N とすると, H は $\triangle LMN$ の内心であることを証明せよ。

6. $AB=10$, $BC=9$, $AC=8$ である $\triangle ABC$ がある。 $\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D , 直線 AD と $\triangle ABC$ の外接円との A 以外の交点を E とする。 $AD\cdot DE$ の値を求めよ。

7. $\triangle ABC$ の頂点 A から辺 BC に引いた垂線の足を D とし, D から辺 AB, AC に引いた垂線の足をそれぞれ E, F とする。このとき, 4 点 B, E, F, C は同一円周上にあることを証明せよ。