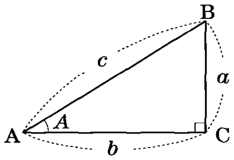
第3章　図形と計量

1. 三角比

1-1　三角比



□正弦・余弦・正接　右のような∠**C** が直角である直角三角形 **ABC** において、次の辺の比を∠**A** の正弦、余弦、正接という。

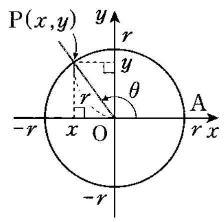
正弦: $\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{c}$,余弦: $\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$, 正接: $\tan A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{b}$

□三角比　正弦・余弦・正接をまとめて三角比という。

1-2　三角比の拡張

□右のような、原点 O を中心とする半径 r の円の上半円上に、 $\angle AOP=\theta\left(A(1,0), 0°\leq\theta\leq 180°\right)$ となる点 $P(x, y)$ をとるとき、

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\quad,\quad\cos\theta=\frac{x}{r}\quad,\quad\tan\theta=\frac{y}{x}\qquad(x\neq 0)$$



と定める。 $\theta=90°$ のときは、 $x=0$ となるから、 $\tan\theta$ は定義されない。

1-3　単位円と三角比の値

□座標平面上において、原点 **O** を中心とする半径 **1** の円を単位円という。

□単位円の上半円上に、 $\angle AOP=\theta$ ($0°\leq\theta\leq 180°$, $A(1,0)$)となるように、点 $P(x、y)$ をとり、直線 OP と直線 $x=1$ との交点を $T(1,t)$ とすると

$$\sin\theta=y\quad,\quad\cos\theta=x\quad,\quad\tan\theta=t$$ となる。

□ P は単位円の上半円上を動き、 T は直線 $x=1$ 上を動くから、 $0\leq\sin\theta\leq 1$, $-1\leq\cos\theta\leq 1$, $\tan\theta$ は任意の実数値をとる。

1-4　三角比の値の符号

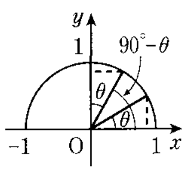
□三角比の値の符号は、 θ の値によって、右図のように変わる。

θ	0°	鋭角	90°	鈍角	180°
sinθ	0	+	1	+	0
cosθ	1	+	0	−	−1
tanθ	0	+	なし	−	0

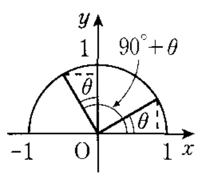
1-5　三角比の諸公式

□ $90°\pm\theta$ の三角比

$$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(90°-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

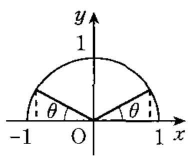


$$\sin(90°+\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$$
$$\tan(90°+\theta)=-\frac{1}{\tan\theta}$$



□ $180°-\theta$ の三角比

$$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180°-\theta-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$$



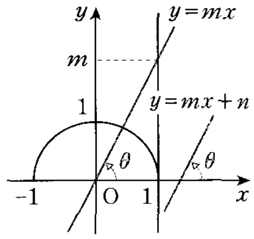
1-6　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\quad,\quad\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\quad,\quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

1-7 直線の傾きと正接

直線 $y=mx+n$ と x 軸の正の部分とのなす角を θ とするとき、

$$m=\tan\theta$$



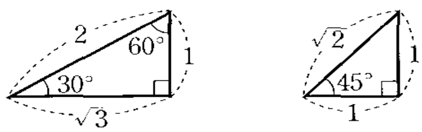
Check Exercize

1. 次の三角比の表を完成せよ。

θ ＼ 三角比	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sinθ									
cosθ									
tanθ									

==

Check Exercize 解答



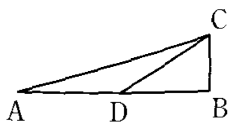
答

θ ＼ 三角比	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanθ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	／	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

==

TYPE67 鋭角の三角形　　重要度 B レベル 2

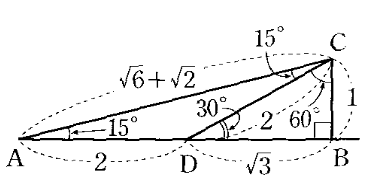
右の図において、 $\angle B=90°, AD=2, DB=\sqrt{3}, BC=1$ とするとき、 AC の長さと $\cos 75°$ の値を求めよ。



KEY 直角三角形で三角比を考える。

解　$\triangle DBC$ において、 $\angle CBD=90°$、$BC=1$、$DB=\sqrt{3}$ であるから、

$\angle CDB=30°, \angle BCD=60°, CD=2$



従って、 $\triangle DAC$ において、 $AD=DC=2$ であるから、

$\triangle DAC$ は $AD=CD$ の **2** 等辺三角形である。

$\therefore$ $\angle DAC=\angle DCA$ となり、

$\angle DAC+\angle DCA=\angle CDB=30°$ → $\angle DAC=\angle DCA=15°$

従って、 $\angle ACB=15°+60°=75°$ となる。

$\triangle ABC$ において、 $AB=2+\sqrt{3}, BC=1$ であるから、三平方の定理から、

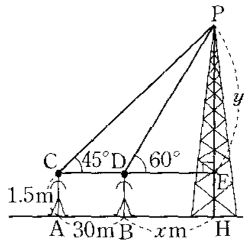
$AC^2=AB^2+BC^2=(2+\sqrt{3})^2+1^2=8+4\sqrt{3}$

$AC>0$ より、 $AC=\sqrt{8+5\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ → $\cos 75°=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

類題 **67**

(1)　$\triangle ABC$ において，$\angle B = \angle C = 72°$ とする。$\angle B$ の二等分線と辺 AC との交点を D とすると，**3** 辺 BC, BD, AD の長さは等しい。このことから，$\cos 72°$ の値を求めよ。

(**2**) 水平面のまっすぐな道路をある塔の先端に向かって歩いている人が，A 地点でその先端 P の仰角を測ったら $45°$ であった。次に，A 地点から $30\,m$ 進んだ **B** 地点で測ると $60°$ であったという。
この人の地点から眼までの高さを $1.5\,m$ として，この塔の高さを求めよ。



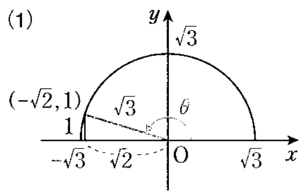
TYPE68　三角比の相互関係　　重要度 A　レベル 2

(1)　θ が鈍角で、$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、$\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$0° \leq \theta \leq 180°$ で、$\tan\theta = 3$ のとき、$\sin\theta, \cos\theta$ の値を求めよ。

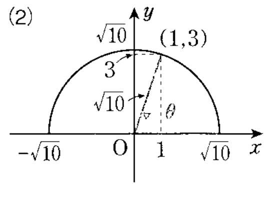
KEY　①　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より、$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から他の一つの三角比を求める

②　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を用いて残りの三角比の値を求める。



解

(1)　底辺= $\sqrt{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \sqrt{2}$　　$\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{6}}{3}$，$\tan\theta = \dfrac{1}{-\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$



(2)　斜辺= $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$　　$\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

類題 **68**

(1)　$0° \leq \theta \leq 180°$　で、　$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$　のとき、　$\sin\theta, \tan\theta$　の値を求めよ。

(2)　$0° \leq \theta \leq 180°$　で、　$\tan\theta = -2$　のとき、　$\cos\theta + 3\sin\theta$　の値を求めよ。

(3)　$0° \leq \theta \leq 180°$　で、　$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$　のとき、　$\cos\theta, \tan\theta$　の値を求めよ。

TYPE69　三角比の相互関係と等式の証明　　重要度 C　レベル 3

等式　$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$　を証明せよ。

KEY　$(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$　を用いる。

解

左辺= $\dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos^2\theta)} = \dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$　=右辺

類題 **69**　次の等式を証明せよ。

(1)　$\sin^2\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \cos^4\theta$

(2)　$\dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

TYPE70　三角比の式の値　　重要度 B　レベル 3

$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$　のとき、　$\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} - \dfrac{1}{\tan\theta}$　の値を求めよ。

KEY 値を求める式を簡単にしてから代入

解

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta - \cos\theta + \cos^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta} = \frac{1-\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} = 3$$

類題 70

(1) $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき、 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\tan^2\theta+(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta+2$ の値を求めよ。

TYPE71 $\sin\theta$, $\cos\theta$ の対称式の値 重要度 A レベル 3

$0°\leq\theta\leq180°$ で、 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき、つぎの式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin\theta-\cos\theta$

(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ (4) $\sin\theta$, $\cos\theta$

KEY 条件式の両辺を平方して、 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いる

解

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\dfrac{1}{2})^2$ より、 $\sin^2\theta+2\sin\theta\,\mathrm{cso}\,\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$\to$ $2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{3}{4}$ $\to$ $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$

(1)の結果を利用して、 $1-2\sin\theta\cos\theta=1-(-\dfrac{3}{4})=\dfrac{7}{4}$

よって、 $\sin\theta-\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ ここで、 $0°\leq\theta\leq180°$ であり、(1)より $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

$\sin\theta\geq0$ ゆえ、 $\cos\theta<0$ 従って、 $\sin\theta-\cos\theta>0$ より、 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

右辺第 1 項は、→ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

右辺第 2 項は、 $\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta=1-(-\dfrac{3}{8})=\dfrac{11}{8}$

従って、 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{11}{8}=\dfrac{11}{16}$

(4) 題意より、 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ ・・・① 、(2)より、 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ ・・・②

①+② より、 $2\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$ $\to$ $\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

①－②より、 $2\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$ $\to$ $\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}$

類題 71　$0° \le \theta \le 180°$ で、$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta + \cos\theta$

(2)　$\sin^3\theta - \cos^3\theta$

TYPE72　$90° \pm \theta$,　$180° - \theta$ の三角比　　重要度 B　レベル 2

$\cos 160° - \cos 110° + \sin 70° - \sin 20°$ を簡単にせよ。

KEY　$90° \pm \theta, 180° - \theta$ の三角比の公式を用いて、各三角形を 45°までの角の比で表す。

解

$160° = 180° - 20°, 110° = 90° + 20°, 70° = 90° - 20°$　ゆえ、

$\cos(180° - 20°) - \cos(90° + 20°) + \sin(90° - 20°) - \sin 20°$

$= -\cos 20° - (-\sin 20°) + \cos 20° - \sin 20°$

$=0$

類題 72　$\sin 160° \cos 70° + \cos 20° \sin 70°$ を簡単にせよ。

TYPE73　三角形の内角の三角比の関係　　重要度 B　レベル 3

△ABC において、次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\sin(A+B) = \sin C$　　(2)　$\cos(A+B) = -\cos C$　　(3)　$\tan(A+B) = -\tan C$

KEY　$A + B + C = 180°$ と、$180° - \theta$ の三角比の公式を用いる。

証明

$A + B = 180° - C$ より、

(1)　$\sin(A+B) = \sin(180° - C) = \sin C$ =右辺

(2)　$\cos(A+B) = \cos(180° - C) = -\cos C$ =右辺

(3)　$\tan(A+B) = \tan(180° - C) = -\tan C$ =右辺

類題 **73**　△**ABC** において、つぎの等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$

(2)　$\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$

(3)　$\tan\dfrac{A+B}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=1$

TYPE74　三角方程式　　重要度 A　レベル 2

$0°\leq\theta\leq180°$　のとき、次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　　**(2)**　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　**(3)**　$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

KEY　$\angle AOP=\theta$　なる　P　について、条件を満たす単位円の　$y\geq0$　の部分上の点　P　の位置を考える。

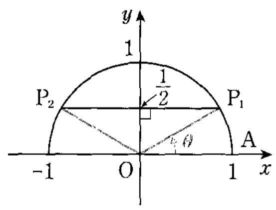
解

(l)　右の図のように, 単位円の　$y\geq0$　の部分上に y 座標が　$\dfrac{1}{2}$　である点　P_1　,　P_2　をとると

$\angle AOP_1=30°$　,　$\angle AOP_2=150°$

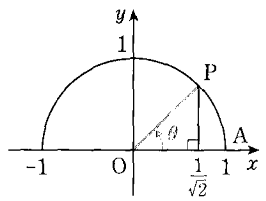
$\theta=\angle AOP_1$　または　$\theta=\angle AOP_2$　であるから

$\theta=30°, 150°$　・・・(答)



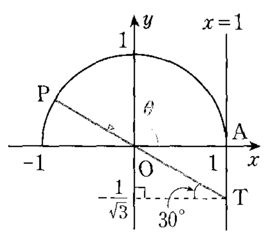
(2)　右の図のように,単位円の　$y\geq0$　の部分上に　x　軸座標が　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　である点　P　をとると

$\theta=\angle AOP=45°$　・・・(答)

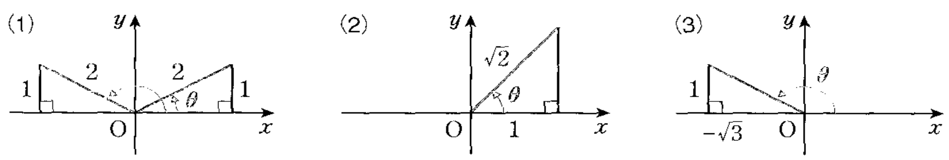


(3)　右の図のように,直線　$x=1$　上に　y　座標が　$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　である点　T　を をとり,　OT　と単位円の　$y\geq0$　の部分との交点を　P　とすると

$\theta=\angle AOP=150°$　・・・(答)



MEMO　上の問題は次の図を用いても解けるが、この方法では不等式などへの発展性はない。



類題 74　$0° \leq \theta \leq 180°$ のとき、次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$2\cos\theta + \sqrt{3} = 0$

(3)　$\tan\theta = 1$　右図より、　$\theta = 45°$

TYPE75　三角不等式　　重要度 A　レベル 3

$0° \leq \theta \leq 180°$ のとき、次の不等式を解け。

(1)　$\sin\theta \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta > -\dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta < 1$

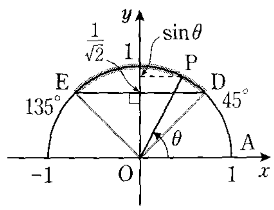
KEY　$\angle AOP = \theta$ なる P について、条件を満たす単位円の $y \geq 0$ の部分上の点 P の存在範囲を考える。

解　$A(1,0), B(0,1), C(-1,0)$ とし、単位円の $y \geq 0$ の部分上に $\angle AOP = \theta$ となる点 P をとる。

(1) 単位円の $y \geq 0$ の部分上に y 座標が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である点 D, E をとると

$\angle AOD = 45°$, $\angle AOE = 135°$ である。

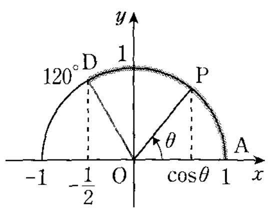
P の y 座標 $\sin\theta$ は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 以上だから、P は円弧 DE(両端を含む)上にある。よって　$45° \leq \theta \leq 135°$ ・・・(答)



(2) 単位円の $y \geq 0$ の部分上に x 座標が $-\dfrac{1}{2}$ である点 D をとると

$\angle AOD = 120°$ となる。　P の x 座標 $\cos\theta$ は $-\dfrac{1}{2}$ より大きいから、P は円弧 AD (A を含み, D を含まない)上にある。

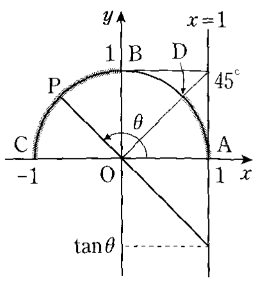
よって　$0° \leq \theta < 120°$ ・・・(答)



(3) 単位円の $y \geq 0$ の部分上に 2 直線 OD , $x=1$ の交点の y 座標が 1 である点 D をとると $\angle AOD = 45°$ である。

2 直線 OP , $x=1$ の交点の y 座標 $\tan\theta$ は 1 より小さいから, P は円弧 AD (A を含み, D を含まない)上か円弧 BC (B を含まず, C を含む)上にある。

よって　$0° \leq \theta < 45°$,　$90° < \theta \leq 180°$ ・・・(答)



類題 75　$0° \leq \theta \leq 180°$ のとき、次の不等式を解け。

(1)　$\sin\theta < \dfrac{1}{2}$

(2)　$2\cos\theta - 2\sqrt{2} \leq 0$

(3)　$\tan\theta \geq -\sqrt{3}$

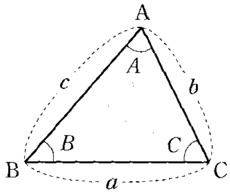
2. 三角比と図形

2.1 正弦定理

□ 正弦定理 円に内接する三角形では次の関係がある。

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



□ **正弦定理の変形** 正弦定理は連比で表すと

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ となる。

また、 $a=2R\sin A\,,\,b=2R\sin B\,,\,c=2R\sin C$ の形で利用することも多い。

2.2 余弦定理

□ 余弦定理 三角形の辺の長さには、次の関係がある。

$\triangle ABC$ において

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

2.3 三角形の面積

□ 2 辺とそのはさむ角のわかっている三角形の面積は、次のように求められる。

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

□ また、外接円の半径を R 、内接円の半径を r とすると、次の事が成り立つ。

$$S=\frac{abc}{4R}\quad,\quad S=rs\quad(ただし、\ s=\frac{a+b+c}{2}\ )$$

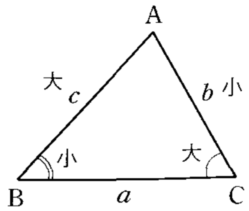
2.4 三角形の基本性質

□ 三角形の成立条件

$\triangle ABC$ において $b+c>a\,,\,c+a>b\,,\,a+b>c$

□ 辺の大小と角の大小関係

$\triangle ABC$ において $B<C \quad \Leftrightarrow \quad b<c$



2.5 球の表面積と体積

半径 r の球の表面積を S 、体積を V とすると

$$S=4\pi r^2\quad,\quad V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

※ 球の体積は、「身の上に心配があり、参上しました」と覚える方法もある。

$\quad 3 \qquad 4\pi r \qquad 3$ 乗

2.6 相似形の面積比と体積比

□ **相似な図形の面積比** 相似比が $m:n$ である相似な平面図形において、その**面積比**は $m^2:n^2$

また、相似比が $m:n$ である相似な立体の表面積の比も $m^2:n^2$ となる。

□ **相似な立体の体積比** 相似比が $m:n$ である相似な立体図形において、**体積比**は $m^3:n^3$ となる。

Check Exercize

1. $\triangle ABC$ において、 $b=2\sqrt{6}, B=60°, C=75°$ のとき、 a と外接円の半径 R を求めよ。

2. $\triangle ABC$ において、 $b=6, c=6\sqrt{3}, B=30°$ のとき、 A を求めよ。

3. $\triangle ABC$ において、 $a=8, c=3, B=60°$ のとき、 b を求めよ。

4. $\triangle ABC$ において、 $a=1+\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, c=2$ のとき、 A, B, C を求めよ。

5. $\triangle ABC$ において、 $b=4, c=3, A=60°$ のとき、面積を求めよ。

6. 半径が 6 の球の表面積と体積を求めよ。

7. 相似な2つの三角錐 F, G があって、 G の F に対する相似比は $\dfrac{2}{3}$
   (1) F の表面積が 45 のとき、 G の表面積を求めよ。
   (2) G の体積が 40 のとき、 F の体積を求めよ。

＝＝

Check Exercize 解答

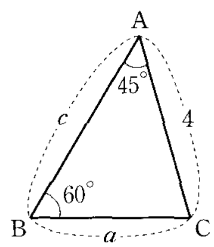
1. $a=4, R=2\sqrt{2}$
2. $90°$ または $30°$
3. 7
4. $A=105°, B=30°, C=45°$
5. $3\sqrt{3}$
6. 表面積 144π , 体積 288π
7. (1) 20 , (2) 135

＝＝

TYPE76 三角形を解く 　　**重要度 A レベル 3**

$\triangle ABC$ において、 $A=45°, B=60°, b=4$ であるとき、 a, c の値を求めよ。

KEY 三角形の2辺とそのはさむ角ではない1角でも余弦定理は使える。



解　正弦定理により、 $\dfrac{a}{\sin 45°}=\dfrac{4}{\sin 60°}$ よって、 $a=\dfrac{4\sin 45°}{\sin 60°}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ ・・・(答)

余弦定理により、 $4^2=c^2+\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2-2\cdot c\cdot\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\cos 60°$

$3c^2-4\sqrt{6}c-16=0$ 　　$c>0$ より $c=\dfrac{2\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{3}$ ・・・(答)

MEMO c を求めるとき、余弦定理の $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ を用いた場合は2つの正の c の値が出てくることがある。この場合 $B<C$ であれば、 $b<c$, $B>C$ であれば、 $b>c$ が適する。角度の大小は辺の大小と同じである。

類題 76 $\triangle ABC$ において、 $\angle C=120°, AC=2\sqrt{3}, AB=3\sqrt{2}$ であるとき、 $\angle A$ の大きさと BC の長さを求めよ。

TYPE77　三角形の頂点と対辺の内分点との距離　重要度 A　レベル 3

△ ABC において、 $a=9, b=6, c=7$ である。辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とするとき、線分 AD の長さを求めよ。

KEY ∠ B は △ ABC、△ ABD において共通である。

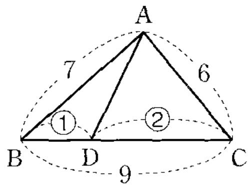
解　△ ABC において、余弦定理により

$$\cos B=\frac{7^2+9^2-6^2}{2\cdot7\cdot9}=\frac{47}{63}$$

△ ABD において、 $BD=3$ であるから、

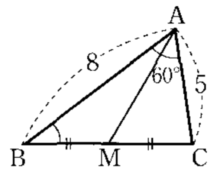
余弦定理により　$AD^2=7^2+3^2-2\cdot7\cdot3\cos B=\frac{80}{3}$

よって、 $AD=\sqrt{\frac{80}{3}}=\frac{4\sqrt{15}}{3}$



類題 **77**

(1)　△ ABC において、 $AB=8, AC=5, \angle A=60°$ である。
辺 BC の中点を M とするとき、線分 AM の長さを求めよ。



(2)　△ ABC において、 $a=6, b=5, c=7$ である。 ∠ A の **2** 等分線と辺 BC との交点を D とするとき、線分 AD の長さを求めよ。

TYPE78　鈍角三角形･鋭角三角形であるための条件　重要度 B レベル 3

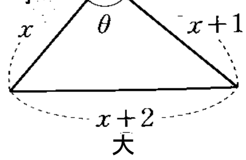
長さ $x, x+1, x+2$ の **3** つの線分が鈍角三角形の **3** 辺となるように、 x の値の範囲を定めよ。

KEY 三角形の成立条件 → 最大辺が鈍角となる条件

解　三角形の **3** 辺となるための条件は

$x+(x+1)>x+2$　よって、 $x>1$ ･･･①

さらに、鈍角三角形の **3** 辺となるための条件は、長さ $x+2$ の対角の大きさ θ が鈍角であるから、 $\cos\theta<0$



$$\cos\theta=\frac{x^2+(x+1)^2-(x+2)^2}{2\cdot x\cdot(x+1)}=\frac{x^2-2x-3}{2x(x+1)}=\frac{(x-3)(x+1)}{2x(x+1)}<0$$

$x>1$ より、 $(x+1)(x-3)<0$ → $-1<x<3$ ･･･②

①, ②より、 $1<x<3$ ･･･(答)

類題 78　長さ　$2x, 2x+1, 5$　の 3 つの線分が鈍角三角形の 3 辺となるように、　x　の値の範囲を定めよ。

TYPE79　辺の比と対角の正弦の比　重要度 A　レベル 4

$\triangle ABC$　において、　$\dfrac{5}{\sin A}=\dfrac{7}{\sin B}=\dfrac{8}{\sin C}$　であるとき、　$\sin A$　と　$\cos A$　の値を求めよ。

KEY　正弦定理を用いて辺の比を求めた後、　$\cos A$　を求める。

解　$\dfrac{5}{\sin A}=\dfrac{7}{\sin B}=\dfrac{8}{\sin C}$　より、正弦の比　$\sin A : \sin B : \sin C = 5:7:8$

ゆえ、3 辺は　$a=5k, b=7k, c=8k$　とおける。

よって、　$\cos A=\dfrac{(7k)^2+(8k)^2-(5k)^2}{2(7k)(8k)}=\dfrac{(49+64-25)k^2}{2(7)(8)k^2}=\dfrac{11}{14}$

→　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\pm 5\sqrt{3}}{14}$　→　$\sin A>0$　より、　$\sin A=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$　・・・(答)

類題 79　$\triangle ABC$　において、　$\sin A : \sin B : \sin C = 3:5:7$　であるとき、比　$\cos A : \cos B : \cos C$　を求めよ。

TYPE80　三角形の辺と角についての等式の証明　重要度 B　レベル 3

$\triangle ABC$　において、次の等式が成り立つことを証明せよ。
$\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A=\sin^2 A$

KEY　正弦定理と余弦定理を用いて、両辺を辺だけの式に変形する。

解　△ABC の外接円の半径を R とすると、正弦定理と余弦定理により、

左辺=　$\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$

$=\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2-2\left(\dfrac{b}{2R}\right)\left(\dfrac{c}{2R}\right)\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{b^2+c^2-(b^2+c^2-a^2)}{4R^2}=\dfrac{a^2}{4R^2}$

右辺=　$\sin^2 A=\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2=\dfrac{a^2}{4R^2}$　よって、左辺=右辺　が成り立つ。・・・(答)

類題 80　△ABC において、次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a=b\cos C+c\cos B$

(2)　$a(\sin B+\sin C)=(b+c)\sin A$

TYPE81　三角形の形状決定　　重要度 A　レベル 3

等式　$\sin A=2\cos B\sin C$　が成り立つとき、　$\triangle ABC$　はどんな三角形か。

KEY　正弦定理と余弦定理を用いて、辺だけの関係に変形する。

解　　$\triangle ABC$　の外接円の半径を　R　とすると、正弦定理と余弦定理により、

左辺= $\dfrac{a}{2R}$ ，右辺= $2\dfrac{(a^2+c^2-b^2)}{2ac}\cdot\dfrac{c}{2R}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2aR}$

左辺－右辺=0　ゆえ、　$\dfrac{a}{2R}-\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2aR}=0$　→　$a^2-(a^2+c^2-b^2)=0$　→　$b^2=c^2$

b, c　は辺の長さゆえ　$b>0, c>0$　よって、　$b=c$　　の 2 等辺三角形･･･(答)

類題 81　　次の等式が成り立つとき、　$\triangle ABC$　はどんな三角形か。

(1)　$a\sin A+b\sin B=c\sin C$

(2)　$b\cos B=c\cos C$

(3)　$a^2=b^2+c^2+bc$

TYPE82　三角形の面積と内接円の半径　　重要度 A　レベル 3

$\triangle ABC$　において、　$a=17, b=10, c=9$　であるとき、　$\triangle ABC$　の面積　S　，外接円の半径　R　、内接円の半径　r　を求めよ。

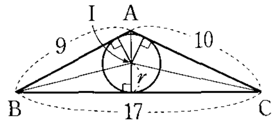
KEY　$\cos A$　→　$\sin A$　→　S, R　が求まる。　r　は面積の分割を利用する。

解　　余弦定理より、　$\cos A=\dfrac{10^2+9^2-17^2}{2\cdot10\cdot9}=\dfrac{100+81-(20-3)^2}{2\cdot10\cdot9}=\dfrac{181-400+120-9}{2\cdot10\cdot9}=\dfrac{-108}{180}=\dfrac{-3}{5}$

$\sin A=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\dfrac{4}{5}$　→　$S=\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot9\cdot\dfrac{4}{5}=36$　･･･(答),

$\dfrac{17}{\sin A}=2R$　より、　$R=\dfrac{17}{2}\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{85}{8}$　･･･(答) ,

$S=\dfrac{1}{2}\cdot r(a+b+c)=\dfrac{1}{2}(17+10+9)r=36$　→　$r=\dfrac{36}{18}=2$　･･･(答)

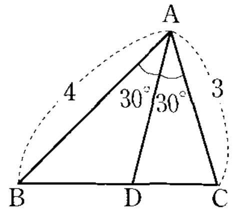


類題 82　$\triangle ABC$ において、 $AB=6, BC=4, CA=5$ であるとき、 $\triangle ABC$ の面積、外接円の半径、内接円の半径を求めよ。

TYPE83　三角形の頂角の 2 等分線の長さ　重要度 A　レベル 3

$b=3, c=4, A=60°$ である $\triangle ABC$ の $\angle A$ の 2 等分線と辺 BC との交点を D とするとき、線分 AD の長さを求めよ。

面積の分割を利用する。

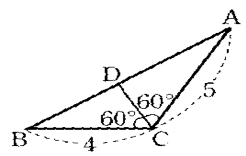


解　$\triangle ABC + \triangle ACD = \triangle ABC$ であるから、

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot AD\cdot \sin 30° + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot AD\cdot \sin 30° = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \sin 60°$$

$\frac{7}{4}AD = 3\sqrt{3}$　よって、 $AD = \frac{12\sqrt{3}}{7}$ ・・・(答)

類題 83　$BC=4, CA=5, \angle C=120°$ である $\triangle ABC$ の $\angle C$ の 2 等分線と辺 AB との交点を D とするとき、 AB, BD, CD の長さを求めよ。

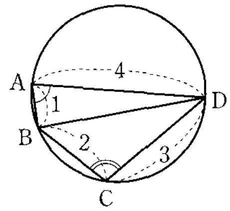


TYPE84　円に内接する四角形　重要度 A　レベル 4

円に内接する四角形 $ABCD$ において、 $AB=1, BC=2, CD=3, DA=4$ であるとき、次のものを求めよ。

(1)　$\cos A$　(2)　BD　(3)　四角形の面積 S

KEY　$\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ において、辺 BD は共通で、 $A+C=180°$



解

(1)　$\triangle ABD$ において、余弦定理により、

$$BD^2 = 1^2 + 4^2 - 2\cdot 1\cdot 4\cos A \quad \cdots ①$$
$$BD^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot \cos(180 - A) \quad \cdots ②$$

①＝②より、 $17 - 8\cos A = 13 + 12\cos A \rightarrow 20\cos A = 4 \rightarrow \cos A = \frac{1}{5}$ ・・・(答)

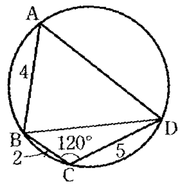
(2)　$BD^2 = 17 - 8\cdot(\frac{1}{5}) = \frac{77}{5} \rightarrow BD = \sqrt{\frac{77}{5}} = \frac{\sqrt{385}}{5}$ ・・・(答)

(3)　$\sin A = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5}$

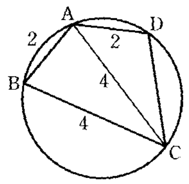
$$S = (\frac{1}{2})\cdot 1\cdot 4\cdot \sin A + (\frac{1}{2})\cdot 2\cdot 3\cdot \sin A = \sin A(2+3) = \frac{\sqrt{24}}{5}\cdot 5 = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$ ・・・(答)

類題 **84**

(1) 円に内接する四角形 $ABCD$ において、 $AB=4\,,BC=2\,,CD=5\,,\angle BCD=120°$ であるとき、辺 AD の長さを求めよ。



(2) $AB=2\,,BC=CA=4$ である $\triangle ABC$ の外接円の円周上に点 D を、 $AD=2$ であるようにとる。ただし、点 D は点 B とは異なる点とする。



① $\cos\angle ABC$ と $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めよ。

② $\sin\angle CDA$ と CD を求めよ。

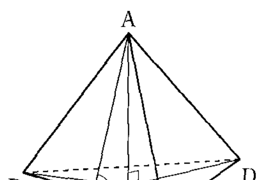
③ 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ。

TYPE85 空間図形の計量　　重要度 B レベル 2

1辺の長さが a の正四面体 $ABCD$ において、次の問に答えなさい。
(1) 隣り合う **2** つの面のなす鋭角を θ とするとき、 $\cos\theta$ の値を求めよ。
(2) 体積 V を求めよ。

(1) 辺 BC から中点を M とすると、 $\angle AMD=\theta$
(2) A から $\triangle BCD$ に下ろした垂線の足 H は、 $\triangle BCD$ の外接円の中心

解
(1) 辺 BC の中点を M とすると, $\triangle ABC$, $\triangle DBC$ はともに正三角形だから
$AM\perp BC$, $DM\perp BC$ したがって $\angle AMD=\theta$
ここで, $AM=DM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$ であるから



$\triangle AMD$ において,余弦定理により

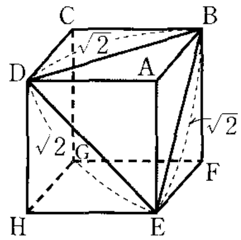
$$\cos\theta=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2-a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot a^2}{\frac{3}{2}\cdot a^2}=\frac{1}{3}\quad\cdots(答)$$

(2) A から $\triangle BCD$ に下ろした垂線の足を H とすると,
$\triangle ABH\equiv\triangle ACH\equiv\triangle ADH$ …より、 $BH=CH=DH$
ゆえに, H は正三角形 BCD の外接円の中心であり, DH はその半径である,
よって, $\triangle BDC$ において,正弦定理により $\dfrac{a}{\sin 60°}=2DH$ ゆえに $DH=\dfrac{a}{2\sin 60°}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot a$
$\triangle ADH$ において,三平方の定理により

$$AH^2=AD^2-DH^2=a^2-\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\cdot a^2\quad よって、\quad AH=\frac{\sqrt{6}a}{3}$$

また $\triangle BCD=\dfrac{1}{2}a^2\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$ よって、 $V=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle BCD\cdot AH=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{6}a}{3}=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$ $\cdots$(答)

類題 **85** **1** 辺の良さが **1** の立方体　$ABCD-EFGH$　において, 次のものを求めよ。
(**1**)　$\triangle BDE$　の面積　S



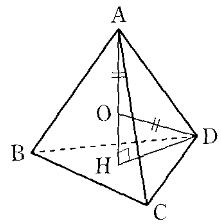
(**2**) 四面体　$ABDE$　の体積　V

(**3**)　A　から　$\triangle BDE$　に下ろした垂線　AI　の長さ　L

TYPE86　立体に外接する球･内接する球　　重要度 B　レベル 3

1 辺の長さが **1** の正四面体に外接する球の半径 **R** を求めよ。

KEY　球の中心と正四面体の **2** つの頂点を通る断面で考える。



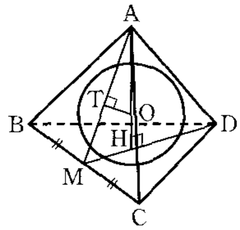
解
正四面体を　$ABCD$　,球の中心を　O　とし,直線　AO　と　$\triangle BCD$
の交点を　H　とすると,

$$DH=\frac{\sqrt{3}}{3},\ AH=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

ゆえに,　$\triangle ODH$　において,三平方の定理により

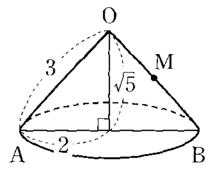
$$R^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-R\right)^2 \quad よって\quad R=\frac{\sqrt{6}}{4}\quad \cdots(答)$$

類題 **86**　**1** 辺の長さが **1** の正四面体に内接する球の半径　r　を求めよ。



TYPE 87　　立体の側面上の 2 点間の最短距離　　重要度 B　レベル 4

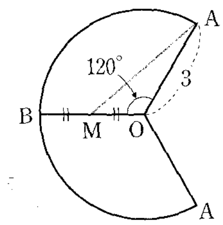
底面の半径が **2**,　高さが　$\sqrt{5}$　の直円すいにおいて,　頂点を　O　,
底面の直径の両端を　A,B　とし,　線分　OB　の中点を　M　とするとき,
側面上で　A　から　M　に至る最短距離　L　を求めよ。



KEY　展開図上で考える。

解　　直円錐の母線の長さは **3** で､側面の展開図は図のようになる。
扇形の弧　AB　の長さは直円錐の底円の　AB　の長さの　2π　であるから､
$\angle AOB$　の大きさは

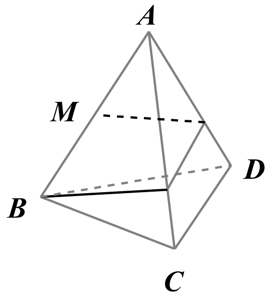
$$360°\times\frac{2\pi}{2\pi\cdot 3}=120°$$



円すいの側面上で　A　から　M　に至る最短経路　L　は, 扇形上では
線分　AM　で表されるから,　$\triangle OAM$　において, 余弦定理により

$$L^2=AM^2=3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot3\cdot\frac{3}{2}\cos 120°=\frac{63}{4}\qquad よって、\ L=\frac{3\sqrt{7}}{2}\quad \cdots(答)$$

類題 **87** **1** 辺の長さが **2** である正四面体 $ABCD$ において, 頂点 B を出発して, 側面に沿って, 辺 AC, AD を横切って辺 BD の中点 M に至る最短距離を求めよ。



EXERCIZE

(1) $AB=2\sqrt{2}, AC=\sqrt{14}$ である鋭角三角形 ABC の外接円の半径が **2** であるとき, $\cos B$ の値と BC の長さを求めよ。

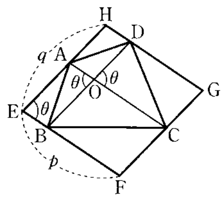
(2) $\triangle ABC$ において, $AB=\frac{1}{2}$, $BC=1$, $CA=k$ とする。
ただし, $\frac{1}{2}<k\leq 1$ とする。 B が $60°$ 以上になるように, k の値の範囲を定めよ。

(3) $\triangle ABC$ において, $BC=a^2+a+1$, $CA=a^2-1$, $AB=2a+1$ である。
① **3** つの辺のうち最大辺はどれか。

② **3** つの内角のうちの最大角の大きさを求めよ。

(4) $\triangle ABC$ において, 不等式 $a\geq b\cos B+c\cos C$ が成り立つことを証明せよ。

(5) 四角形 $ABCD$ の対角線 AC と BD の長さを p, q, その対角線のなす角の **1** つを θ とするとき, 四角形 $ABCD$ の面積 S を p, q, θ で表せ。



(6) 半径 r の円に内接する正十二角形, 外接する正十二角形の面積を求めよ。