第7章 確率

6.1 確率の意味

1. 確率

□**確率** 偶然に支配されるとみられる自然現象や社会現象の起こりやすさの程度を数量的に表したものを**確率**という。

2. 試行と事象

□**試行・事象** 同じ条件のもとで繰り返すことができる実験や観測を試行といい，試行の結果起こる事柄を，その試行における**事象**という。

ロ**根元事象・全事象** それ以上分けることのできない事象を**根元事象**といい，根元事象全体からなる事象をその試行の**全事象**という。

□**空事象・ Φ** それに属する根元事象がない事象を**空事象**といい， Φ で表す。

ロ各事象は根元事象を要素とする集合で表される。特に，根元事象はそれ自身を要素とする，ただ $\mathbf{1}$ 個の要素からなる集合で表される。また，各事象は全事象を表す集合の部分集合で表される。

3. 数学的確率

□**同様に確からしい** ある試行において，全事象に属する根元事象のどれが起こることも同じ程度に期待されるとき，これらの根元事象は**同様に確からしい**という。また，それぞれのさいころの目や硬貨の表裏の出方が同様に確からしいとき，「正しいさいころ(硬貨)」という。
以後，断らない限り，さいころや硬貨などは正しいものとする。

□**事象Aの起こる確率** 根元事象がすべて同様に確からしいような試行において、全事象 U に属する根源事象の個数を $n(U)$ ，事象 A に属する根源事象の個数を $n(A)$ とするとき、

$\dfrac{n(A)}{n(U)}$ を事象 A の起こる確率といい、 $P(A)$ で表す。

注　場合の数の計算のときは，同形・同質のものであっても区別して数えるのが原則である。

4. 統計的確率

□**統計的確率** ある試行を n 回繰り返したとき，ある事象 A の起こる回数を r とする。 n が十分大きくなっていくとき，相対度数 $\dfrac{r}{n}$ 言が一定の値 p に近づいていくならば，この p を事象 A の起こる(統計的)確率という。

n が十分大きいとき，**相対度数** $\dfrac{r}{n} \fallingdotseq P(A)$

5. 幾何学的確率

□**幾何学的確率** 領域 D' が領域 D に含まれているとき， D 内に任意にとった $\mathbf{1}$ 点 P が D' 内にある確率は，その確率が面積によるとすれば ，$\dfrac{D' \text{の面積}}{D\ \text{の面積}}$ である。

これを**幾何学的確率**という。

＝＝

Check Exercize

1. $\mathbf{2}$ 枚の硬貨を同時に投げるとき，$\mathbf{1}$ 枚だけ表が出る確率を求めよ。

2. 白石 $\mathbf{3}$ 個，黒石 $\mathbf{6}$ 個が入った袋から $\mathbf{3}$ 個の石を同時に取り出すとき，白石 $\mathbf{2}$ 個，黒石 $\mathbf{1}$ 個を取り出す確率を求めよ。

＝＝

答 **1.** $\dfrac{1}{2}$

2. $\dfrac{3}{14}$

TYPF149　確率の意味　　　　　　　　　　重要度 B　レベル 1

2　個のさいころを同時に投げるとき，　**2**　つの目の差が　**1**　になる確率を求めよ。

KEY　　場合の数は　**2**　個のさいころを区別して求める。

解　**2**　個のさいころを　$\boldsymbol{A, B}$　とし，　$\boldsymbol{A, B}$　の目がそれぞれ　$\boldsymbol{a, b}$　であることを　$(\boldsymbol{a, b})$　で表す。
2　個のさいころの目の出方は全部で　$\mathbf{6 \times 6 = 36}$　**(**通り**)**あり**,**これらは同様に確からしい。
そのうち**,**　**2**　つの目の差が　**1**　になる場合は
$(\mathbf{1,2}), (\mathbf{2,3}), (\mathbf{3,4}), (\mathbf{4,5}), (\mathbf{5,6}),$
$(\mathbf{2,1}), (\mathbf{3,2}), (\mathbf{4,3}), (\mathbf{5,4}), (\mathbf{6,5})$　の　**10**　通りである。

よって、求める確率は、　$\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{36}} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{18}}$

類題 **149**

(1)　**3**　本の当たりくじを含む　**5**　本のくじから**,**　$\boldsymbol{A, B}$　の　**2**　人がこの順に　**1**　本ずつくじを引くとき**,**　**2**　人とも当たる確率を求めよ。ただし**,**引いたくじは元に戻さない。

(2)　**4**　人でじゃんけんを　**1**　回するとき**,**　**1**　人だけが勝つ確率を求めよ。

TYPE150　順列と確率　　　　　　重要度 A　レベル 1

3　個のさいころを同時に投げるとき，　**3**　つの目がすべて異なる確率を求めよ。

KEY　場合の数を順列で求める。

解　**3**　個のさいころの目の出方は全部で　$\mathbf{6^3 = 216}$　（通り）
そのうち，　**3**　つの目がすべて異なる場合の数は，　**3**　個のさいころを　$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$　とし，　**1**　から　**6**　までの自然数から異なる　**3**　個の数を選んで　**1**　列に並べて, 順に　$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$　の目とする方法の数に等しいから
$\mathbf{{}_6 P_3 = 120}$　（通り）
よって, 求める確率は　$\dfrac{\mathbf{120}}{\mathbf{216}} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}$

類題 **150**　男子　**5**　人, 女子　**6**　人が　**1**　列に並ぶとき, 次の確率を求めよ。
(**1**) 特定の男女 **2** 人が隣り合う

(**2**) どの **2** 人の男子も隣り合わない

TYPE151　組合せと確率　　　　　重要度 A　レベル 2

1 から **6** までの数字を書いた球が **2** 個ずつ合計 **12** 個ある。この中から **3** 個の球を同時に取り出すとき， **3** 個の球の数字の和が **5** である確率を求めよ。

KEY　場合の数を組合せで求める。

解　**3** 個の球の取り出し方は全部で $_{12}C_3=220$ （通り）

そのうち， **3** 個の数字の和が **5** であるのは， **1** の球 **2** 個と **3** の球 **1** 個を取り出す場合と， **1** の球 **1** 個と **2** の球 **2** 個を取り出す場合であり，いずれの場合も **3** 個の球の取り出し方は **2** 通りである。・・・(※)

ゆえに， **3** 個の数字の和が **5** である取り出し方は　$2\times 2=4$ （通り）

よって，求める確率は　$P=\dfrac{4}{220}=\dfrac{1}{55}$

(※)12個の球を①②③④⑤⑥，❶❷❸❹❺❻とすると，1の球2個と3の球1個を取り出す出し方は［①❶③］と［①❶❸］の2通りある。1の球1個と2の球2個のときも同様。

類題 **151**　**1** から **9** までの番号札が **1** 枚ずつある。この中から **2** 枚の札を同時に取り出すとき， **2** 枚の札の数字の和が奇数になる確率を求めよ。

TYPE152　順列･組合せと確率　　　　　重要度 A　レベル 3

3 個のさいころを同時に投げるとき， **3** つの目の和が **6** になる確率を求めよ。

KEY　選んでから並べる（組合せから順列へ）

解　**3** 個のさいころの目の出方は全部で　$6^3=216$ （通り）

そのうち，**3** つの目の和が **6** になるのは，

$(1,1,4)(1,2,3)(2,2,2)$

(i)　**3** つの目の組合せが $(1,1,4)$ の場合

3 個のさいころの目の出方の数は，　$\dfrac{3!}{2!}=3$　通り。

(ii)　**3** つの目の組合せが $(1,2,3)$ の場合

3 個の目の順列ゆえ、 $3!=6$　通り

(iii)　**3** つの目の組合せが $(2,2,2)$ の場合

3 個のさいころの目の出方の数は， **1** 通り

ゆえに， **3** つの目の和が **6** となる場合の数は　$3+6+1=10$ （通り）

よって，求める確率は　$P=\dfrac{10}{216}=\dfrac{5}{108}$

MEMO　➢　**3** 個のさいころの目の出方の場合の数は次のようにしても考えられる。

3 個のさいころを A, B, C とし， A, B, C の目をそれぞれ a, b, c とすると、

これを満たす正の整数 a, b, c の組の個数は，重複組合せの考えにより→　***TYPE142***

$_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3=10$　これが **3** つの目の和が **6** になる場合の数である。

類題 **152**

(1) **4** 個のさいころを同時に投げるとき, **2** 種類の目が **2** 個ずつ出る確率を求めよ。

(2) $T, O, H, O, K, U, A, O, B, A$ の **10** 個の文字をでたらめに **1** 列に並べるとき,どの **2** つの **O** も隣り合わない確率を求めよ。

TYPF153　確率の最大値　　　　重要度 B レベル 5

1 から n までの自然数の中から異なる **4** つの数を選ぶとき,最小の数が **3** である確率を p_n とする。ただし, $n \geq 6$ とする。

(1) p_n を求めよ。

(2) P_n を最大にする n の値を求めよ。

KEY P_n と P_{n+1} の大小を比較する。

解

(1) **4** つの数の選び方は全部で ${}_nC_4$ 通り.

そのうち,最小の数が **3** であるのは, **3** と **4** 以上の数 **3** つを選ぶ場合であるから,

その取り出し方は ${}_{n-3}C_3$ 通り。

よって,求める確率は

$$p_n = \frac{{}_{n-3}C_3}{{}_nC_4} = \frac{\dfrac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{4(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)} \quad \cdots(答)$$

(2)
$$p_{n-1} - p_n = \frac{4(n-3)(n-4)}{(n+1)n(n-1)} - \frac{4(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}$$
$$= \frac{4(n-4)}{(n+1)n(n-1)(n-2)}\{(n-3)(n-2)-(n+1)(n-5)\}$$
$$= \frac{4(n-4)}{(n+1)n(n-1)(n-2)}(11-n)$$

従って、 $n = 6, 7, \cdots, 10$ のとき $p_n < p_{n+1}$

$n = 11$ のとき、 $p_n = p_{n+1}$

$n = 12, 13, \cdots,$ のとき、 $p_n > p_{n+1}$

ゆえに、 $p_6 < p_7 < \cdots < p_{10} < p_{11} = p_{12} > p_{13} > \cdots$

よって, P_n を最大にする n の値は **11,12** $\cdots$(答)

MEMO ➢ $p_n > 0$ であるから

(ア) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} < 1 \Leftrightarrow p_{n+1} < P_n$, (イ) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} > 1 \Leftrightarrow p_{n+1} > P_n$

したがって $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} - 1$ の符号を調べてもよい(簡単な式になる)。

類題 **153**　ジョーカーを除く **1** 組のトランプ **52** 枚から **1** 枚の札を取り出しては元に戻すという試行を,同じ札を **2** 回取り出すまで繰り返す $n+1$ 回目に試行が終わる確率を P_n とする。

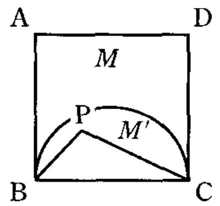
(1) P_n を求めよ:

(2) P_n を最大にする n の値を求めよ。

TYPE 154　幾何学的確率　　　重要度 C　レベル 4

正方形 $ABCD$ がある。点 P をこの正方形の内部にとるとき, $\triangle PBC$ が鈍角三角形になる確率を面積によるものとして求めよ。

KEY　確率を点の存在範囲の面積比で考える。



解　正方形の **1** 辺の長さを $2a$ とする。

P の存在範囲 M は,正方形の内部であるから, M の面積は $4a^2$ となる。

そのうち, $\triangle PBC$ が鈍角三角形になるような P の存在範囲 M' は, BC を直径とする半円の内部だから,その面積は $\dfrac{\pi}{2}a^2$ である。

よって,求める確率は　$\dfrac{\pi a^2}{4a^2}=\dfrac{\pi}{8}$　･･･(答)

類題 **154**　**1** 辺が **5cm** の正方形のタイルを敷き詰めた広い床に,直径 **2cm** の円盤を落とすとき,この円盤が **1** つのタイルの上に完全におさまる確率を面積によるものとして求めよ。

TYPE155　統計的確率　　　重要度 C　レベル 3

ある統計によると,出生男子 **10** 万人のうち, **10** 歳までの生存者数は **99206** 人である。男子が生まれてから **10** 歳までに死ぬ確率を求めよ。

KEY　n が十分大きいとき･相対度数 $\dfrac{r}{n}$ ≒確率

解　出生男子の人数は十分大きいから,相対度数を確率とみなしてよい。

よって,求める確率は

$$\frac{100000-99206}{100000}=\frac{794}{100000}=0.00794$$ ･･･(答)

類題 **155** ある植物の種子を **5000** 粒まいたところ, **3516** 粒が発芽した。
(1)この植物の発芽の確率を求めよ。

(2)この植物を **1000** 粒発芽させるには,およそ何粒まけばよいか。

6.2 確率の基本性質

1. 確率の値の範囲

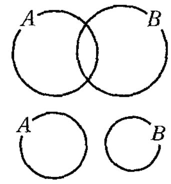
□ある試行における任意の事象 **A** に対して　$0 \leqq P(A) \leqq 1$
特に,全事象 U と空集合 ϕ について $P(U)=l$, $P(\phi)=0$

2. 積事象と和事象

□**積事象･** $A \cap B$ ある試行における **2** つの事象 A, B について,「 A と B がともに起こる」という事象を, A と B の**積事象**といい, $A \cap B$ で表す。
□**和事象･** $A \cup B$ また,「 A または B が起こる」という事象を A と B の**和事象**といい, $A \cup B$ で表す。
□**和事象の確率** ある試行における **2** つの事象 A, B について,
$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

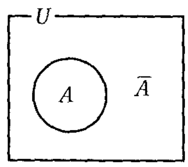
3. 確率の加法定理

□**排反･排反事象** 事象 A, B について, A, B が同時には決して起こらないとき,すなわち $A \cap B=\phi$ のとき, A と B は互いに排反である,または,互いに**排反事象**であるという。
□**確率の加法定理** 次の定理を,確率の**加法定理**という。



A, B が互いに排反であるとき　$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

□**3** つ以上の事象についても,その積事象,和事象が考えられる。また,その中のどの **2** つの事象も互いに排反であるとき,これらの事象は互いに排反であるという。確率の加法定理は, **3** つ以上の排反事象についても,同様に成り立つ。
□**余事象の確率**



□**余事象** ある試行における事象 A に対して,「 A が起こらない」という事象を, A の余事象といい, A で表す。
□**余事象の確率** $A \cap \overline{A}=\phi$, $A \cup \overline{A}=U$ であるから $P(\overline{A})=1-P(A)$

＝＝＝

Check Exercize

1. 男女 **6** 名ずつの **12** 名から **4** 名の委員をくじで選ぶとき
(1)男子の方が多く選ばれる確率を求めよ。

(2)女子が少なくとも **1** 人選ばれる確率を求めよ。

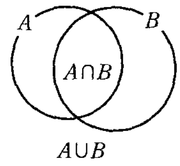
＝＝＝

TYPF 156　和事象の確率　　　　　　　　重要度 B　レベル 1

ジョーカーを除くトランプ **52** 枚から **2** 枚の札を同時に取り出すとき**, 2** 枚ともハートか **2** 枚とも絵札である確率を求めよ。

KEY　2 つの事象の和事象としてとらえる**.**

解



「**2** 枚ともハートか **2** 枚とも絵札である」事象は「**2** 枚ともハートである事象 **A** と「**2** 枚とも絵札である」事象 **B** の和事象　$A\cup B$　で表される。

また、　$A\cap B$　は「**2** 枚ともハートの絵札である」事象を表す。

よって、求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{{}_{13}C_2}{{}_{52}C_2}+\frac{{}_{12}C_2}{{}_{52}C_2}-\frac{{}_{3}C_2}{{}_{52}C_2}=\frac{47}{442}\quad\cdots(答)$$

類題 **156**

1 から **5** までの番号札が **1** 枚ずつある。この中から元に戻すことなく **1** 枚ずつ札を引いていく。**2** 枚目の札の番号が **2** であるか**, 3** 枚目の札の番号が **3** である確率を求めよ。

TYPE 157　確率の加法定理　　　　　　　　重要度 A　レベル 1

当たりくじ **3** 本を含む **5** 本のくじから**,** 甲**,** 乙の **2** 人がこの順に **1** 本ずつくじを引くとき**,** 乙が当たる確率を求めよ。ただし**,** 引いたくじは元に戻さない。

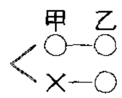
KEY　互いに排反である **2** つの事象の和事象として考える。

解 「乙が当たる」事象は「甲も乙も当たる」事象 **A** と「乙だけ当たる」事象 **B** の和事象　$A\cup B$　で表される。

A と **B** は互いに排反であるから**,** 求める確率は　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

甲当たり、乙当たり **P(A)=**　$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$

甲はずれ、乙当たり **P(B)=**　$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$



$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{5}\quad\cdots(答)$$

MEMO　甲が当たる確率も同じである。一般に**,** このような当たりくじの問題では**,** 引く順序によってあたる確率は左右されない。

類題 **157**

(1)　**3** 個のさいころを同時に投げるとき**, 3** つの目の和が奇数になる確率を求めよ。

(2)　**1** から **8** までの番号札が **1** 枚ずつある。この中から **3** 枚の札を同時に取り出すとき**, 3** 枚の札の番号の積が **4** の倍数になる確率を求めよ。

TYPF158　余事象の確率　　　　　　　　　　**重要度 A　レベル 1**

同じ年の **6** 月生まれの人が **3** 人いるとき**,**同じ誕生日の人がいる確率を求めよ。

KEY　「少なくとも」**,**「以上」**,**「以下」と言いかえられる⇒余事象

解 「同じ誕生日の人がいる」事象を **A** とすると**, A** の余事象 $\overline{A}$ は「**3** 人の誕生日が異なる」事象であるから**,**
求める確率は

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{30\cdot 29\cdot 28}{30^3}=\frac{22}{225}\quad\cdots(答)$$

類題 **158**

(1) **3** 個のさいころを同時に投げるとき**, 3** つの目の積が **3** の倍数である確率を求めよ。

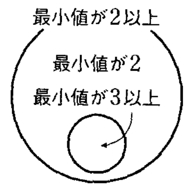
(2) **4** 人でじゃんけんをするとき**,**あいこになる確率を求めよ。

TYPE159　事象間の関係と確率(1)　　　　　　**重要度 A　レベル 3**

3 個のさいころを同時に投げるとき**, 3** つの目の最小値が **2** である確率を求めよ。

KEY　確率が簡単に求まる事象との関係を利用する。

解



3 つの目の最小値が **2** である場合は**,**最小値が **2** 以上である場合から**,**
最小値が **3** 以上の場合を除いた場合である。
最小値が **2** 以上であるのは**, 3** つの目がいずれも **2** 以上の場合であるから**,**
その確率は　$P_2=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5^3}{6^3}$

同様に**,**最小値が **3** 以上である確率は　$P_3=\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{4^3}{6^3}$

よ-て･求める確率は　$P_2-P_3=\frac{1}{6^3}\cdot(5^3-4^3)=\frac{1}{216}(5-4)(5^2+20+4^2)=\frac{61}{216}\quad\cdots(答)$

類題 **159**

1 から **6** までの数字を書いた球が **2** 個ずつ合計 **12** 個ある。この中から **3** 個の球を同時に取り出すとき**,**
3 個の球の数字の最大値が **4** である確率を求めよ。

TYPE160　事象間の関係と確率(2)　　　　　**重要度 B　レベル 4**

3 個のさいころを同時に投げるとき, **3** つの目の積が **10** の倍数になる確率を求めよ。

KEY　加法定理と余事象の確率を利用する。

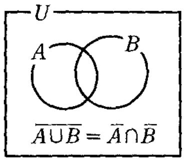
解
事象「**3** つの目の積が **2** の倍数である」を **A,** 事象「**3** つの目の積が **5** の倍数である」を **B** とする。
事象「**3** つの目の積が **10** の倍数である」は　$A\cap B$　で表され,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$ より

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

A の余事象　$\overline{A}$　は事象「**3** つの目がすべて **2** の倍数でない＝すべて奇数」であるから

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{3^3}{6^3}=\frac{189}{216}$$



同様に考えて　「**3** つの目がどれも **5** でない」から

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{5}{6}^3=\frac{91}{216}$$

また,　$A\cup B$　の余事象　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　は事象「**3** つの目の積が **2** の倍数でも **5** の倍数でもない」であるから
3 つの目はどれも　**2, 4, 5, 6**　でない。
したがって

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})$$
$$=1-\frac{2^3}{6^3}=\frac{208}{216}$$

よって求める確率は、

$$P(A\cap B)=\frac{189}{216}+\frac{91}{216}-\frac{208}{216}=\frac{1}{3}$$ ・・・(答)

類題 **160**
(1)　**1** 個のさいころを　n　回投げるとき,次の確率を求めよ。
①　**1** の目も **6** の目も出ない。

②　**1** の目は出るが､**6** の目は出ない。

③　**1** の目も **6** の目もでる。

(2)　**1** から **10** までの番号札が **1** 枚ずつある。この中から **3** 枚の札を同時に取り出すとき,次の確率を求めよ。
①　最大の番号が **7** 以下で,最小の番号が **3** 以上である

②　最大の番号が **8** 以上で,最小の番号が **2** 以下である

6.3 独立な試行の確率,期待値

1. 独立な試行とその確率

□**独立** いくつかの試行において,試行の結果が互いに影響されないとき,これらの試行は**独立**であるという。

□**独立な試行の確率** **2** つの淑立な試行においては,次のことが成り立つ。

> **2 つの独立な試行 S, T において,**
> **S で事象 A が起こり, T で事象 B が起こるという事象を $A \times B$** と
> すると $P(A \times B) - P(A) \times P(B)$

□ **3** つ以上の独立な試行についても,同様の等式が成り立つ。

2. 反復試行とその確率

□**反復試行** 同じ試行を繰り返す-連の試行は独立試行であり,この独立試行を**反復試行**という。

□**反復試行の確率** 反復試行の確率は,次のようにして求める。

1 回の試行において事象 A が起こる確率を p とする。
この試行を n 回繰り返すとき, A がちょうど r 回起こる確率は
$${}_nC_r\, p^r q^{n-r} \qquad (q = 1 - p) \qquad \text{(ただし,} \quad p^0 = 1,\, q^0 = 1 \text{)}$$

3. 期待値

□**期待値･平均** ある試行の結果定まる変量 **X** があって, **X** のとりうる値のすべてが $x_1, x_2, \cdots, x_n$ で,これらの値をとる確率がそれぞれ $p_1, p_2, \cdots, p_n$ であるとき, $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$ を **X** の期待値または平均といい, $E(X)$ で表す。ここで, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ である。

$$E(X) - x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

＝＝

Check Exercize

1. **1** 個のさいころと **1** 枚の硬貨を同時に投げるとき,さいころは **3** の倍数の目,硬貨は表が出る確率を求めよ。

2. **1** 個のさいころを **5** 回投げるとき, **3** の倍数の目がちょうど **2** 回出る確率を求めよ。

3. **3** 枚の硬貨を同時に投げるとき,表の出る枚数の期待値を求めよ。

＝＝

Check Exercize 解答

1. $\frac{1}{6}$ **2.** $\frac{80}{243}$ **3.** $\frac{3}{2}$

TYPE161　独立な試行の確率　　　　　　　　　**重要度 A　レベル 2**

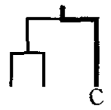
A, B, C の **3** 人がある試合をする。最初に抽選によって **2** 人が対戦し,次にその勝者と残った人が対戦する。いずれの試合も引き分けはなく,それぞれが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とする。**C** が優勝する確率を求めよ。

KEY　抽選と試合は独立

解 「抽選」という試行と「試合」という試行は独立である。

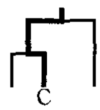
抽選によって, **A** 対 **B**, **B** 対 **C**, **C** 対 **A** のいずれかの対戦が決まるから,最初の試合がいずれの対戦になる確率も $\frac{1}{3}$ である。

C が優勝するのは,次の **(i)**, **(ii)** の場合である。



(i)最初に **A** と **B** が対戦し,次にその勝者と **C** が対戦して **C** が勝つ場合,

その確率は $\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$



(ii)最初に **A, B** のどちらかと **C** が対戦して **C** が勝ち,次に **C** と残りの **1** 人が対戦して **C** が勝つ場合

その確率は $\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{6}$

よって求める確率は, (ⅰ)(ⅱ)より、 $\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$ ・・・(答)

類題 **161**

(1)　**3** 人の射手 **A, B, C** が標的に向かって射るとき,当てる確率はそれぞれ $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ であるという。

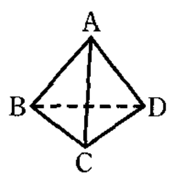
このとき,次の確率を求めよ。

①　**2** 人だけが当てる

②　少なくとも **1** 人が当てる

(2)　**3** 人でじゃんけんをするとき,次の確率を求めよ。ただし,あいこの場合はもう **1** 度じゃんけんをし,勝者が **2** 人の場合はその **2** 人でじゃんけんをするものとする。

(3)　正四面体 **ABCD** の **1** つの頂点にある動点 **P** は, **1** 秒後に等しい確率 $\frac{1}{3}$ で,



他の **3** つの頂点のいずれかに移動するものとする。

①　頂点 **A** から出発した **P** が, **3** 秒後に **A** に戻る確率を求めよ。

②　頂点 **A** から出発した点 **P** が,頂点 **B** をちょうど **1** 回通って, **4** 秒後に **A** に戻っている確率を求めよ。

TYPE162　反復施行の確率（1）　　　　　　　　**重要度 B　レベル 2**

3 つの選択肢から **1** つを選ぶ問題が **4** 問ある。これにでたらめに解答するとき, **2** 問以上に正解する確率を求めよ。

KEY　A か $\overline{A}$ かの反復試行の確率,　${}_nC_r\,p^r q^{n-r}$　　$(q=1-p)$

解
1 問に正解する確率は $\dfrac{1}{3}$,正解しない確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

よって,求める確率は, **2** 問, **3** 問, **4** 問に正解する確率を加えて

$${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)+{}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{11}{27}\quad\cdots(答)$$

類題 **162**　**A,B** の **2** 人がそれぞれ **1** 枚の硬貨を **4** 回投げるとき, **A** の表の出る回数と **B** のそれとが等しくなる確率を求めよ。また, **A** の表の出る回数が **B** のそれより大きくなる確率を求めよ。

TYPE 163　反復試行の確率(2)　　　　　　　　**重要度 A　レベル 3**

ある試合では, **A** が **B** に勝つ確率は常に一定で $\dfrac{2}{3}$ であり,引き分けはない。 **A, B** がこの試合をし,先に **3** 試合に勝った方を優勝とする。 **A** が優勝する確率を求めよ。

KEY　n 試合して優勝 →　$n-1$ 試合目までに **2** 勝し,　n 試合目に勝つ

解　**A** が優勝するのは,次の(ⅰ)~(ⅲ)の場合である。

(ⅰ) **A** が **3** 連勝する場合　その確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$　$\cdots$(答)

(ⅱ) **A** が **2** 勝 **1** 敗後,勝つ場合　その確率は ${}_3C_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{3\cdot 8}{27\cdot 3}=\dfrac{8}{27}$　$\cdots$(答)

(ⅲ) **A** が **2** 勝 **2** 敗の後、勝場合　その確率は ${}_4C_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{6\cdot 8}{27\cdot 9}=\dfrac{16}{81}$

よって、求める確率は、 $\dfrac{8}{27}\left(2+\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{64}{81}$　$\cdots$(答)

類題 **163**　赤球 **3** 個と白球 **2** 個が入った袋から, **1** 個の球を取り出して元に戻す試行を繰り返すとき, **5** 回目に **2** 度目の赤球を取り出す確率を求めよ。

TYPE 164 反復試行の確率(3) **重要度 A レベル 3**

x 軸上を動く点 **P** がある。**P** は最初原点にあり,硬貨を投げて表が出たら正の方向に **1** だけ進み,裏が出たら負の方向に **1** だけ進む。硬貨を **6** 回投げたとき,次の確率を求めよ。

(1) **P** が **6** 回目に原点に戻る

(2) **P** が **2** 回に原点に戻り,かつ **6** 回目に原点に戻る

(3) **P** が **6** 回目に初めて原点に戻る

KEY 硬貨の表裏の出方を考える。

解

(1) 硬貨を **6** 回投げたとき表が n 回,裏が $6-n$ 回出たとすると,
P は正の方向に n ,負の方向に $6-n$ だけ進むから
P の座標は $n-(6-n)=2n-6$
P が **6** 回目に原点に戻るとき $2n-6=0$ ゆえに $n=3$
よって,求める確率は ${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot2^6}=\frac{5}{16}$ ・・・(答)

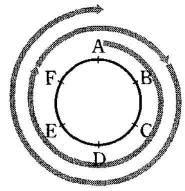
(2) **P** が **2** 回目に原点に戻り,かつ **6** 回目に原点に戻るのは,初めの **2** 回で表と裏が **1** 回ずつ出て,次の **4** 回で表と裏が **2** 回ずつ出る場合であるから,求める確率は

$${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2\cdot4\cdot3}{2\cdot2^6}=\frac{3}{16}$$ ・・・(答)

(3) **P** が **6** 回目に初めて原点に戻るのは,初めの **2** 回は同じ面が出て,次の **2** 回は表と裏が **1** 回ずつ出て,後の **2** 回は初めの **2** 回と異なる面が出る(偶数回終了後に表と裏の回数が同じではない)場合,
すなわち
表表表裏表裏,表表裏表裏裏,裏裏裏表表表,裏裏表裏表表
の **4** 通りの場合で,いずれの場合もその確率が $\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$ であるから,
求める確率は $4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$ ・・・(答)

類題 **164** 円周を **6** 等分する点を時計回りの順に A, B, C, D, E, F とし, A を出発点として小石を置く。さいころを投げ,偶数の目が出たときは **2**,奇数の目が出たときは **1** だけ小石を時計回りに分点上を進めるゲームを続け,最初に A にちょうど戻ったときを上がりとする。

(1)ちょうど **1** 周して上がる確率を求めよ。



(2)ちょうど **2** 周して上がる確率を求めよ。

TYPE 165　反復試行の確率(4)　　　　　　　　　**重要度 A　レベル 4**

1 つの面に数字 **1** を, **2** つの面に数字 **2** を, **3** つの面に数字 **3** を書いたさいころを **6** 回投げるとき, **1** が **1** 回, **2** が **2** 回,**3** が **3** 回出る確率を求めよ。

KEY　場合の数×各場合が起こる確率

解　**1** が **1** 回, **2** が **2** 回, **3** が **3** 回出る場合は　$\dfrac{6!}{1!2!3!}$　通りあり,

いずれの場合も起こる確率は　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

よって、求める確率は、　$\dfrac{6!}{1!2!3!}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{36}$　・・・(答)

類題 **165**　赤球 **4** 個,白球 **4** 個,青球 **6** 個が入った箱から, **1** 個の球を取り出して元に戻すことを **5** 回繰り返すとき, 赤球が **1** 回,白球が **2** 回,青球が **2** 回出る確率を求めよ。

TYPE166　二項定理と反復試行　　　　　　　　　**重要度 C**　レベル **5**

1 枚の硬貨を **100** 回投げるとき,表が奇数回出る確率を求めよ。

KEY　二項定理を利用する。

解　表が奇数回出る確率は,表が **1** 回, **3** 回,～, **99** 回出る確率を加えて

$${}_{100}C_1+{}_{100}C_3+\cdots+{}_{100}C_{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

ここで,二項定理により

$$(1+x)^{100}={}_{100}C_0+{}_{100}C_1x+\cdots+{}_{100}C_{100}x^{100}$$

$x=1$　とおくと　$2^{100}={}_{100}C_0+{}_{100}C_1+\cdots+{}_{100}C_{100}$　・・・①

$x=-1$　とおくと　$0={}_{100}C_0-{}_{100}C_1+\cdots-{}_{100}C_{99}+{}_{100}C_{100}$　・・・②

(　①＋②)÷2 より　$2^{99}={}_{100}C_0+{}_{100}C_3+\cdots+{}_{100}C_{99}$

よって,求める確率は　$2^{99}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{100}=\dfrac{1}{2}$　・・・(答)

類題 **166**　さいころを　n　回投げるとき,出た目の和が奇数になる確率を求めよ。

TYPE 167 期待値 **重要度 A レベル 2**

赤,青,黄,緑の **4** 色の球がそれぞれ **2** 個ずつ入った袋から同時に **4** 個の球を取り出すとき,取り出した **4** 個の球の色の種類の数 **X** の期待値を求めよ。

KEY **X** の値とその値をとる確率の積の和を求める。

解 **X** のとりうる値は **2,3,4** である。

X=2 となるのは, **2** 色の球が **2** 個ずつ出る場合であるから

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\left({}_2C_2\right)^2}{{}_8C_4}=\frac{3}{35}$$

${}_4C_2$ **:4** 色から **2** 色、 $\left({}_2C_2\right)^2$ **:**合計 **4** 個

X=3 となるのは、**3** 色の玉が、**2,1,1** 個出る場合であるから、

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_1\cdot\left({}_2C_2\right){}_3C_2\left({}_2C_1\right)^2}{{}_8C_4}=\frac{24}{35}$$

X=4 となるのは, **4** 色の球が **1** 個ずつ出る場合であるから

$$P(X=4)=\frac{\left({}_2C_1\right)^4}{{}_8C_4}=\frac{8}{35}$$

よって, **X** の期待値は

$$E(X)=2\cdot P(X=2)+3\cdot P(X=3)+4\cdot P(X=4)=\left(\frac{1}{35}\right)(2\cdot 3+3\cdot 24+4\cdot 8)=\frac{22}{7}\quad\cdots(\text{答})$$

MEMO 上の問題の, **X** の値とその値をとる確率 **P** の対応を表(確率分布表)にして, **X** の期待値を求めることができる。

X	2	3	4	計
P	$\frac{3}{35}$	$\frac{24}{35}$	$\frac{8}{35}$	1
XP	$\frac{6}{35}$	$\frac{72}{35}$	$\frac{32}{35}$	$\frac{22}{7}$

類題 **167**

(1) 箱の中に,数字 **1, 2, 3** を記入したカードがそれぞれ **1,2,3** 枚入っている。この箱の中から **3** 枚のカードを同時に取り出すとき, **3** 枚のカードの数字の和の期待値を求めよ。

(2) さいころを投げることを繰り返し,出た目の和が **4** 以上になったら終了する。終わるまでに投げる回数の期待値を求めよ。

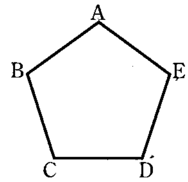
(3) A **,** B の両者が **7** 番勝負をして,先に **4** 勝した者を優勝者とする。引き分けはなく,各試合で **A** が勝つ確率は $\frac{1}{2}$ であるとする。優勝が決まるまでの試合数の期待値を求めよ。

EXERCISE

1. 赤球 **3** 個と白球 **7** 個が入った箱から,元に戻さずに, **10** 人が **1** 個ずつ球を取っていくとき,
(1) **5** 番目の人が **3** 個目の赤球を取る確率を求めよ。
(2) 何番目の人が **3** 個目の赤球を取る確率が最大になるか。

2. **0** から **9** までの数字を書いた番号札が **1** 枚ずつ合計 **10** 枚ある。この中から **3** 枚の札を同時に取り出すとき, **3** 枚の札の番号の和が **3** の倍数である確率を求めよ。

3. 正五角形 $ABCDE$ の頂点を, **A** から出発して左回りに移動する点 **P** がある。さいころを投げて出た目の数だけ左回りに進んで P_1 に移り, **2** 回目に投げたとき, **P** は P_1 から出発して,出た目の数だけさらに進んで P_2 に進むものとする。
次の確率を求めよ。



(1) P_2 が **A** になる
(2) P_1 または P_2 が **A** になる

4. $1, 2, \cdots, n \quad (n \geq 3)$ の中から異なる **3** つの数を取り出す。
(1) **3** つの数が連続している確率を求めよ。
(2) **3** つの数の中の **2** つだけが連続している確率を求めよ。
(3) **3** つの数のどの **2** つも連続していない確率を求めよ。

5. n 人 $(n \geq 2)$ が **1** 回じゃんけんをする。
(1) 勝者が k 人 $(1 \leq k \leq n-1)$ である確率を求めよ。
(2) 勝者が決まらない確率を求めよ。

6. **1** 個のさいころを **100** 回投げるとき, **1** の目がちょうど n 回出る確率を p_n とする。p_n を最大にする n の値を求めよ。

7. xy 平面上を動く点 **P** がある。**P** は最初原点にあり, **1** 個のさいころを投げて **1** か **4** の目が出たら x 軸方向に **1** だけ動き, **2** か **5** の目が出たら y 軸方向に **1** だけ動き, **3** か **6** の目が出たら動かない。**8** 回さいころを投げたとき, **P** が点 $(1, 3)$ を経由して点 $(2, 5)$ に至る確率を求めよ。

8. 正六角形の各頂点に **1** から **6** の番号をつける。**1** から **6** の番号のついた球が **1** つずつ入った箱から同時に **3** 個の球を取り出し,球の番号に対応する頂点を結んで三角形をつくる。
(1) 正三角形ができる確率を求めよ。
(2) 正六角形の面積は $6\,cm^2$ であるものとする。できる三角形の面積の期待値を求めよ.

9.
(1) **1** 個のさいころを **1** 回または **2** 回投げ,最後に出た目を得点にするゲームを考える。**1** 回投げて出た目を見た上, **2** 回目を投げるか投げないかを決めるのであるが,どのように決めるのが有利であるか。
(2) 上と同様のゲームで, **3** 回投げることも許されるとしたら, **2** 回目,**3** 回目を投げるか否かの決定は,どのようにするのが有利か。

10. **2** 枚の硬貨を n 回投げる。k 回目 $(k \leq n)$ に表の出た枚数を Xk とし, $Z = X1 \cdot X2 \cdots\cdots Xn$ とおくとき, **Z** の期待値を求めよ。