

2. 因数分解

2-1 因数分解

□ 因数分解・因数

1つの整式を、1次以上の整式の積の形にすることを、もとの整式を因数分解するという。このとき、積を作っている各式をもとの整式の因数という。ふつう因数分解といえば、係数が有理数の範囲で、それ以上因数分解出来ないところまで行う。

2-2 共通因数をくり出す

□ 整式の各項に共通な因数があるときは、 $AB+AC=A(B+C)$ を用いて、その共通因数をかつこの外にくくり出す。

例 $6x^2+3=3(2x^2+1)$, $4x^3+2x^2+6x=2x(2x^2+x+3)$

2-3 因数分解の公式

□ 乗法の公式を逆にすると、因数分解の公式が得られる。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \begin{cases} a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \end{cases} \\ \textcircled{2} & a^2-b^2=(a-b)(a+b) \\ \textcircled{3} & \begin{cases} x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b) \\ acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d) \end{cases} \\ \textcircled{4} & \begin{cases} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \end{cases} \\ \textcircled{5} & a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \end{aligned}$$

例 $\textcircled{3}$ $6x^2+7x+2=(2x+1)(3x+2)$

$\textcircled{4}$ $x^3-8y^3=x^3-(2y)^3=(x-2y)\{x^2+x\cdot(2y)+(2y)^2\}=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

Check Exercise

2-1 次の式を因数分解せよ。

(1) $2a^2c-6abc+4ac^2$

(2) $a(x-y)+(y-x)$

(3) $4x^2-12xy+9y^2$

(4) a^2-4

(5) $x^2-8x-65$

(6) $2x^2+5x-3$

(7) $64x^3-27y^3$

C.Ex 解答

2-1 (1) $2ac(a-3b+2c)$ (2) $(a-1)(x-y)$ (3) $(2x-3y)^2$ (4) $(a+2)(a-2)$

(5) $(x+5)(x-13)$ (6) $(2x-1)(x+3)$ (7) $(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4 + x^2 - 2$

(2) $x^4 + x^2 y^2 + y^4$

まず $x^4 = (x^2)^2$ と考える。ダメなら $A^2 - B^2$ の形にする。

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad x^4 + x^2 - 2 &= (x^2)^2 + x^2 - 2 \\ &= (x^2 + 2)(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2) \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad x^4 + x^2 y^2 + y^4 &= (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) - x^2 y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

類題 5 次の式を因数分解せよ。

(1) $16a^4 - b^4$

$$= (2a - b)(2a + b)(4a^2 + b^2) \quad \cdots(\text{答})$$

(2) $4x^4 - 17x^2 y^2 + 4y^4$

$$= (2x - y)(2x + y)(x - 2y)(x + 2y) \quad \cdots(\text{答})$$

(3) $x^4 + 4$

$$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \quad \cdots(\text{答})$$

TYPE 6 置きかえによる因数分解

重要度 A レベル 3

 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$ を因数分解せよ。

展開して共通項が出来る因数の組合せを考える。

$$\begin{aligned}
 \text{解 与式} &= (x-1)(x-4) \times (x-2)(x-3) - 120 = \{(x^2-5x)+4\}\{(x^2-5x)+6\} - 120 \\
 &= (x^2-5x)^2 + 10(x^2-5x) - 96 = \{(x^2-5x)+16\}\{(x^2-5x)-6\} \\
 &= (x^2-5x+16)(x+1)(x-6) \cdots(\text{答})
 \end{aligned}$$

類題 6 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x+2y-2z)(x+2y-3z)-12z^2$

$$= (x+2y-6z)(x+2y+z) \cdots(\text{答})$$

(2) $(x-4)(x+5)(x-6)(x+7)-48$

$$= (x^2+x-18)(x^2+x-44) \cdots(\text{答})$$

TYPE 7 組合せの工夫による因数分解

重要度 C レベル 4

 $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ を因数分解せよ。

$$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B) \text{ を用いる。}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 与式} &= \{(a-b)^3+(b-c)^3\}+(c-a)^3 \\
 &= \{(a-b)+(b-c)\}^3-3(a-b)(b-c)\{(a-b)+(b-c)\}+(c-a)^3 \\
 &= (a-c)^3-3(a-b)(b-c)(a-c)-(a-c)^3 \\
 &= 3(a-b)(b-c)(c-a) \cdots(\text{答})
 \end{aligned}$$

類題 7 次の式を因数分解せよ。

(1) x^2-y^2+2y-1

$$= (x-y+1)(x+y-1) \cdots(\text{答})$$

(2) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

$$= 3(b+c)(a+b)(c+a) \cdots(\text{答})$$

TYPE 8 特別な公式による因数分解

重要度 B レベル 5

$x^3 + y^3 - 3xy + 1$ を因数分解せよ。

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ を用いる。

$$\begin{aligned} \text{解 与式} &= x^3 + y^3 + 1^3 - 3xy \cdot 1 \\ &= (x+y+1)(x^2 + y^2 + 1^2 - xy - y \cdot 1 - 1 \cdot x) \\ &= (x+y+1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1) \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別解 与式} &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3xy + 1 \\ &= \{(x+y)^3 + 1^3\} - 3xy(x+y+1) \\ &= (x+y+1)\{(x+y)^2 - (x+y) + 1\} - 3xy(x+y+1) \\ &= (x+y+1)\{(x+y)^2 - (x+y) + 1 - 3xy\} \\ &= (x+y+1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1) \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

類題 8 $8a^3 - b^3 - 6ab - 1$ を因数分解せよ。

$$= (2a - b - 1)(4a^2 + b^2 + 1 + 2ab - b + 2a) \quad \cdots(\text{答})$$

TYPE 9 1文字についての整理による因数分解

重要度 A レベル 3

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3 - x^2y - xz^2 + yz^2$ (2) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x - y + 3$ (3) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

1つの文字(最も次数の低い文字)について整理する。

$$\begin{aligned} \text{解 (1) 与式} &= y(z^2 - x^2) - x(z^2 - x^2) \\ &= (z^2 - x^2)(y - x) = (z - x)(z + x)(y - x) = (x - y)(x - z)(x + z) \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 与式} &= 2x^2 + x(3y + 7) - (2y^2 + y - 3) = 2x^2 + x(3y + 7) - (2y + 3)(y - 1) \\ &= \{2x - (y - 1)\}\{x + (2y + 3)\} \\ &= (2x - y + 1)(x + 2y + 3) \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3) 与式} &= (b - c)a^2 - (b^2 - c^2)a + b^2c - bc^2 \\ &= (b - c)a^2 - (b - c)(b + c)a + bc(b - c) \\ &= (b - c)\{a^2 - (b + c)a + bc\} \\ &= -(a - b)(b - c)(c - a) \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

類題 9 次の式を因数分解せよ。

(1) $abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$

$$= \{c(b+1)+b+1\}(a+1)=(a+1)(b+1)(c+1) \cdots(\text{答})$$

(2) $x^2-2y^2-z^2+3yz-xy$

$$= \{x-(2y-z)\}\{x+(y-z)\}=(x-2y+z)(x+y-z) \cdots(\text{答})$$

(3) $2x^2+5xy-3y^2-3x+5y-2$

$$= (2x-y+1)(x+3y-2) \cdots(\text{答})$$

(4) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$$= (ab+bc+ca)(a+b+c) \cdots(\text{答})$$