第2章　2次関数

1.　2次関数とそのグラフ

1-1　関数

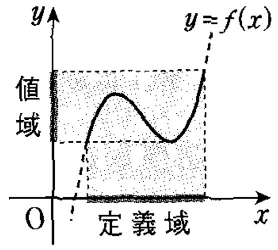
□**関数**　2つの変数　x, y　において，　x　の値を定めるとそれに対応して　y　の値がただ1つ定まるとき，
y　は　x　の**関数**であるといい，　$y=f(x)$　などで表す。
また，　x　の関数を，単に　$f(x)$　とも書く。
□**関数の値**　関数　$f(x)$　において，　x　の値　a　に対応する　y　の値を，　$x=a$　における**関数　$f(x)$　の値**といい，　$f(a)$　で表す。

1-2　関数のグラフ

□関数　$y=f(x)$　において，対応する　x, y　の組　(x, y)　を座標とする点の全体で作られる図形を，関数　$y=f(x)$　のグラフといい，等式　$y=f(x)$　をその図形の**方程式**という。

1-3　定義域と値域

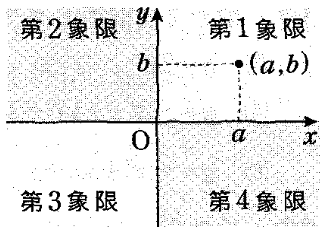
□**定義域･値域**　　関数　$y=f(x)$　において，変数　x　の値のとりうる値の範囲（　x　の変域）を，この関数の**定義域**という。
また，　x　が定義域内のすべての値をとるとき，　$f(x)$　のとりうる値の範囲（　y　の変域）を，この関数の**値域**という。
□**最大値･最小値**　　関数　$y=f(x)$　の値域に最大の値があるとき，これを　$f(x)$　の**最大値**といい，最小の値があるとき，これを　$f(x)$　の**最小値**という。



1-4　座標平面と象限

□**座標･座標平面**　　平面上に座標軸を定めると，その平面上の点Pの位置は2つの実数の組　(a, b)　で表される。この組　(a, b)　を点Pの**座標**といい、座標軸の定められた平面を**座標平面**という。

□**象限**　　座標軸で分けられた座標平面の4つの部分を，右図のように，第1象限，第2象限，第3象限，第4象限という。
（座棟軸上の点は，どの象限にも属さない。）

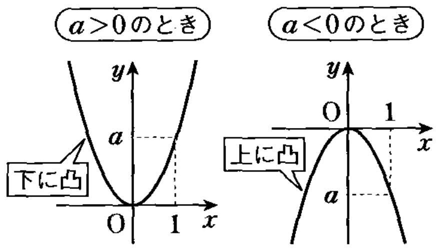


1-5　2次関数

□　x　の2次式で表される関数を　x　の**2次関数**という。
x　の2次関数は，　$y=ax^2+bx+c$　（　a, b, c　は定数、　$a\neq 0$　）
の形に表される。

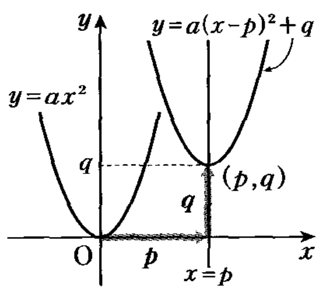
1-6　　$y=ax^2$　のグラフ

□**放物線･軸･頂点**　2次関数　$y=ax^2$　のグラフは,**放物線**と呼ばれる曲線であり,
軸(放物線の対称軸**)**はy軸で,**頂点(**軸と放物線との交点**)**は原点である。



1-7　　$y=a(x-p)^2+q$　のグラフ

□2次関数　$y=a(x-p)^2+q$　のグラフは,
2次関数　$y=ax^2$　のグラフを,　x　軸方向に　p　,
y　軸方向に　q　だけ平行移動した放物線で,
軸は直線　$x=p$　,頂点は点　(p, q)　である。



1-8　$y=ax^2+bx+c$　のグラフ

□2 次関数　$y=ax^2+bx+c$　は,　$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$　と変形できる。

したがって,このグラフは 2 次関数　$y=ax^2$　のグラフを平行移動したもので

軸:直線　$x=-\dfrac{b}{2a}$　,　頂点:点　$\left(-\dfrac{b}{2a}\ ,\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$　である。

□ 2 次関数　$y=ax^2+bx+c$　のグラフを単に放物線　$y=ax^2+bx+c$　といい,
$y=ax^2+bx+c$　をこの放物線の方程式という。

Check　Exercise

1-1　$f(x)=-x^2+2x-3$　のとき、$f(-2)$　の値を求めよ。

1-2　1 次関数　$y=2x-3$　　$(-1\leq x\leq 2)$　のグラフを描き、値域を求めよ。また、最大値と最小値を求めよ。

1-3　次の 2 次関数のグラフをかけ。また、軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=2x^2$　　(2)　$y=-x^2+3$　　(3)　$y=-(x+2)^2$

(4)　$y=-2(x-1)^2+3$　　(5)　$y=2x^2+4x+3$

(6)　$y=-x^2+3x-1$　　(7)　$y=\dfrac{1}{2}(x+1)(x-3)$

1-4　放物線　$y=x^2-2ax+3a+5$　の頂点が、$y=2x+3$　上にあるように、正の定数　a　の値を定めよ。

===

Check　Exercise 解答

1-1　-11

1-2 グラフ略　値域:　$-5\leq y\leq 1$　,　$x=2$　で最大値　1　、　$x=-1$　で最小値　-5

1-3

(1)　$x=0$　$(0,0)$　(2)　$x=0$　$(0,3)$　(3)　$x=-2$　$(-2,0)$

(4)　$x=1$　$(1,3)$　(5)　$x=-1$　$(-1,1)$　(6)　$x=\dfrac{3}{2}$　$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{4}\right)$

(7)　$x=1$　$(1,-2)$

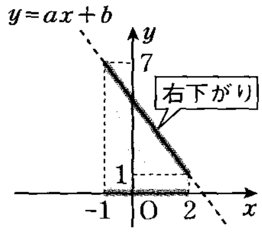
1-4　$a=2$

===

TYPE 28　値域からの 1 次関数の決定　　　重要度 C　レベル 3

関数　$y=ax+b$　$(-1\leq x\leq 2)$ の値域が　$1\leq y\leq 7$　であるように、定数　a,b　の値を定めよ。ただし、　$a<0$　とする

KEY　グラフをかいて考える。



解　$y=ax+b$　$(-1\leq x\leq 2)$ の値域は,

$x=2$　のとき、　$y=2a+b$　,

$x=-1$　のとき、　$y=-a+b$

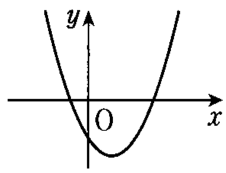
よって、　$2a+b\leq y\leq -a+b$　→　題意より　$1\leq y\leq 7$

$2a+b=1$　,　$-a+b=7$　→　$3a=-6$

$\therefore$　$a=-2$　,　$b=5$　これは、　$a<0$　を満たす。

類題 28　1 次関数　$y=ax+b$　(　$-2\leq x\leq 1$　)の値域が　$-1\leq y\leq 5$　であるように、定数　a,b　の値を定めよ。

TYPE 29　グラフと 2 次関数の係数の符号　　　重要度 A　レベル 3



2 次関数　$y=ax^2+bx+c$　のグラフが図のようであるとき、
係数　a,b,c　の符号、
および判別式　$D=b^2-4ac$　の符号をいえ。

KEY　凹凸、頂点の座標、　y　軸との交点の　y　座標の符号を考える。

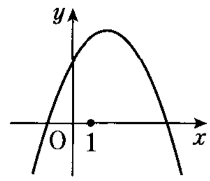
解　下に凸ゆえ、　$a>0$　、　$x=0$　のとき、　$y=c<0$

x　軸と 2 点で交わっているから、　$D=b^2-4ac>0$

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$　→　軸は　$x=-\dfrac{b}{2a}>0$　より、　$a>0$　だから、　$b<0$

よって、　$a>0,b<0,c<0$　　$D=b^2-4ac>0$

類題 **29** **2** 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが図のようであるとき、
係数 a, b, c の符号および、 $a+b+c$ の符号をいえ。

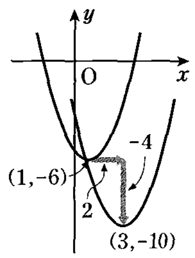


TYPE 30 2 次関数のグラフの平行移動 重要度 A レベル 2

(1) 放物線 $y=x^2-2x-5$ を x 軸方向に 2 、 y 軸方向に -4 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。
(2) 放物線 $y=x^2-4x+5$ は放物線 $y=x^2+2x-1$ をどのように平行移動したものか。

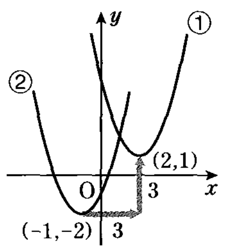
KEY x^2 の係数は不変。頂点の移動を調べる。

解 **(1)** $x=x-2$, $y=y+4$ を代入すれば、
$y+4=(x-2)^2-2(x-2)-5$
$\rightarrow$ $y=x^2-4x+4-2x+4-5-4=x^2-6x-1$



別解 $y=x^2-2x-5=(x-1)^2-6$ 頂点 $(1,-6)$
$y=(x-1-2)^2-6-4=(x-3)^2-10$

(2) $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ 頂点 $(2,1)$
$y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ 頂点 $(-1、-2)$
この放物線を x 方向へ 3 、
y 方向へ 3 平行移動すると、頂点が $(2,1)$ となる。



類題 **30**
(1) そのグラフを x 軸方向に -1 , y 軸方向に **2** だけ平行移動すると **2** 次関数 $y=x^2+4x-1$ のグラフになる **2** 次関数を求めよ。

(2) **2** 次関数 $y=-2x^2+6x-3$ のグラフは **2** 次関数 $y=-2x^2-14x-15$ のグラフをどのように平行移動したものか。

TYPE31　2 次関数のグラフの対称移動　　　重要度 B　レベル 3

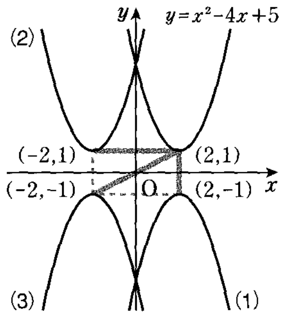
2 次関数　$y=x^2-4x+5$　のグラフと、次の直線、点に関して対称なグラフを表す 2 次関数をそれぞれ求めよ。

(1)　x　軸　　　**(2)**　y　軸　　　**(3)**　原点

KEY　x^2　の係数の絶対値は不変。頂点と凸の向きを調べる。

解　$y=x^2-4x+5$　即ち　$y=(x-2)^2+1$　は、頂点が(2,1)で、下に凸である。

(1)　求める 2 次関数は、頂点が　$(2\text{、}-1)$　で、上に凸な放物線だから
$y=-(x-2)^2-1 \quad \to \quad y=-x^2+4x-5$



(2)　同様に、頂点が　$(-2,1)$　で下に凸な放物線だから
$y=(x+2)^2+1=x^2+4x+5$

(3)　頂点が(-2,-1) で、上に凸の放物線だから、
$y=-(x+2)^2-1=-x^2-4x-5$

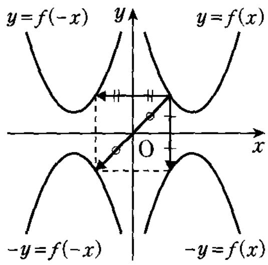
[別解]

対称移動に関して、次の事が成り立つ。

x 軸に関して対称移動すると、　$y=f(x) \quad \to \quad -y=f(x)$

y 軸に関して対称移動すると、　$y=f(x) \quad \to \quad y=f(-x)$

原点に対して対称移動すると、　$y=f(x) \quad \to \quad -y=f(-x)$



これらの関係から、
(1)は、　$-y=x^2-4x+5 \quad \to \quad y=-x^2+4x-5$
(2)は、　$y=(-x)^2-4(-x)+5 \quad \to \quad y=x^2+4x+5$
(3) は、　$-y=(-x)^2-4(-x)+5 \quad \to \quad y=-x^2-4x-5$

類題 31

(1)　放物線　$y=x^2+2x-1$　のグラフを、次の直線、点に関して対称移動して得られる放物線の方程式をそれぞれ求めよ。

(1)　x　軸　**(2)**　y　軸　**(3)**　原点

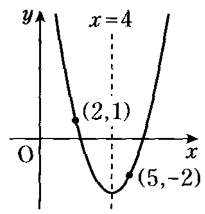
(2)　放物線　$y=x^2-ax+8$　を　x　軸方向へ　b　、　y　軸方向へ　-4　だけ平行移動したのち、原点に対して対称移動すると、放物線　$y=-x^2+2x-4$　になる。定数　a,b　の値を求めよ。

TYPE32 グラフからの 2 次関数の決定（1）　　重要度 A レベル 1

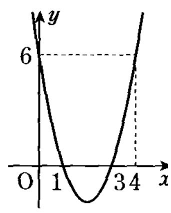
グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。
(1) 軸の方程式が $x=4$ で、2 点 $(2,1),(5,-2)$ を通る。
(2) 3 点 $(1,0),(3,0),(4,6)$ を通る。

KEY 頂点 $(p、q)$ 、軸 $(x=p)$ が分かる　→　$y=a(x-p)^2+q$ とおく。
通る 3 点が分かる　→　$y=ax^2+bx+c$ とおく。
x 軸と 2 点 (α,β) で交わる。　→　$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ とおく。

解
(1) 軸の方程式が $x=4$ であるから、求める 2 次関数は、
$y=a(x-4)^2+q$ とおける
2 点 $(2,1),(5,-2)$ を通るから、
$1=a(2-4)^2+q$ → $4a+q=1$ ・・・①
$-2=a(5-4)^2+q$ → $a+q=-2$ ・・・②
①－② より、 $3a=3$ → $a=1$, $q=-3$
よって、 $y=(x-4)^2-3=x^2-8x+13$



(2) 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。
$(1,0),(3,0),(4,6)$ を通るから、
$0=a+b+c$ ・・・① , $0=9a+3b+c$ ・・・② , $6=16a+4b+c$ ・・・③
①－② $-8a-2b=0$ ・・・④ , ②－③ $-6=-7a-b$ ・・・⑤
⑤×2－④ より、 $-6a=-12$ → $a=2$, $b=-8$, $c=6$
よって、 $y=2x^2-8x+6$



[別解] y 座標が 0 の点が 2 か所あるから、 $x=1,3$ で x 軸と交わる。
$y=a(x-1)(x-3)$ とおける。残る $(4,6)$ 点を通るから、
$6=a(4-1)(4-3)$ → $a=2$ よって、 $y=2(x-1)(x-3)=2x^2-8x+6$

類題 32 グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。
(1) 頂点が $(1,3)$ で、点 $(0,5)$ を通る。

(2) 3 点 $(-1,-3),(1,-5),(3,9)$ を通る。

(3) 頂点が点 $(2,-3)$ で、 x 軸から切り取る線分の長さが 6 である。

TYPE33 グラフからの 2 次関数の決定（2）　重要度 A レベル 3

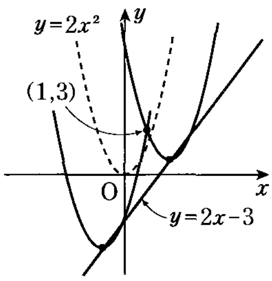
グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1) 2 次関数 $y=2x^2$ のグラフを平行移動したもので、点 $(1,3)$ を通り、その頂点が $y=2x-3$ 上にある。

(2) 2 点 $(2,3),(-1,12)$ を通り、 x 軸に接する。

KEY 頂点が $y=mx+n$ 上 → $y=a(x-p)^2+mp+n$ とおく。

x 軸に接する → $y=a(x-p)^2$ とおく。



解

(1) この放物線は $y=2x^2$ を平行移動したもので、

頂点が $y=2x-3$ 上にあるから、

平行移動した頂点の座標を $(p、q)$ とすると、

$y=2(x-p)^2+q$ ・・・①、且つ $q=2p-3$ ・・・② 、

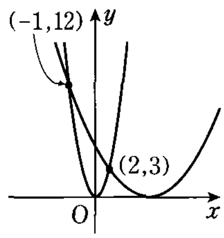
$(1,3)$ を通るから、 $3=2(1-p)^2+q$ ・・・③

②を③に代入して、 $3=2-4p+2p^2+2p-3$ → $2p^2-2p-4=2(p-2)(p+1)=0$

よって、 $p=-1,2$ → $q=-5,1$

求める 2 次関数は、 $y=2(x+1)^2-5=2x^2+4x-3$,

$y=2(x-2)^2+1=2x^2-8x+9$



(2) x 軸に接するから、 $y=a(x-p)^2$ とおける。

$(2,3)$ を通るから、 $3=a(2-p)^2$ ・・・①

$(-1,12)$ を通るから、 $12=a(-1-p)^2$ ・・・②

$\dfrac{3}{(2-p)^2}=\dfrac{12}{(1+p)^2}$ → $3(1+2p+p^2)=12(4-4p+p^2)$

→ $9p^2-54p+45=9(p^2-6p+5)=0$ → $9(p-5)(p-1)=0$ → $p=1,5$, $a=3,\dfrac{1}{3}$

∴ $y=3(x-1)^2=3x^2-6x+3$, $y=\dfrac{1}{3}(x-5)^2=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{10}{3}x+\dfrac{25}{3}$

類題 33 グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2-3x+4$ を平行移動したもので、点 $(2,4)$ を通り、その頂点は直線 $y=2x+1$ 上にある。

(2) 2 点 $(0,1),(-2,-7)$ を通り、頂点が直線 $y=2x$ 上にある。