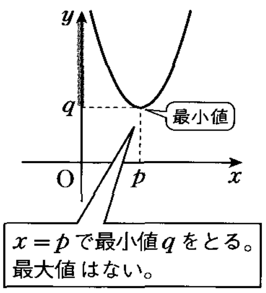
2.　2 次関数の最大･最小

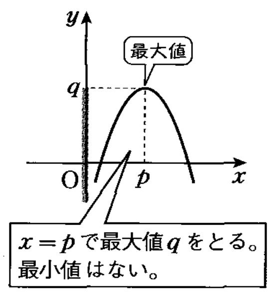
2.1　2 次関数の最大･最小

□2 次関数　$y=a(x-p)^2+q$　の最大値，最小値は，そのグラフにより，次のようになる。

$a>0$のとき



$a<0$のとき



2.2　定義域に制限がある 2 次関数の最大･最小

□走義域がある範囲に制限されている **2** 次関数の最大値･最小値は，その定義域でのグラフをかいて調べる。

Check　Exercise

2-1　次の **2** 次関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y=2x^2+4x-1$

(2)　$y=-x^2+4x+2$

2-2　次の **2** 次関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y=x^2-4x-1$　(　$-1\leq x\leq 3$　)

(2)　$y=-x^2-x+2$　(　$1\leq x\leq 2$　)

2-3　**2** 次関数　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+3$　(　$-2\leq x\leq 3$　)の値域を求めよ。

2-4　x　の **2** 次関数　$f(x)=3x^2-6ax+3a+2$　の最小値を　$m(a)$　とする。a　が変化するとき、$m(a)$　の最大値を求めよ。

==

Check　Exercise 解答

2-1　**(1)**　$2(x+1)^2-3$　最小値　-3　、最大値なし **(2)**　$-(x-2)^2+6$　最大値　6　、最小値なし

2-2　**(1)**　$(x-2)^2-5$　軸　$x=2$　は定義域内ゆえ

最小値(　$x=2$　のとき)　-5　, 最大値(　$x=-1$　のとき)　4

(2)　$-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$　軸　$x=\dfrac{1}{2}$　より、

最大値　$x=1$　のとき、0　, 最小値　$x=2$　のとき、-4

2-3　$-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{7}{2}$　軸　$x=1$　は定義域内ゆえ、$x=1$　のとき、最大値　$\dfrac{7}{2}$

最小値　$x=-2$　のとき、-1　よって値域は　$-1\leq y\leq\dfrac{7}{2}$

2-4　$f(x)=3(x-a)^2-3a^2+3a+2$　最小値は、$x=a$　のときで、$m(a)=-3a^2+3a+2$

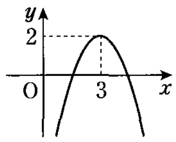
$m(a)=-3\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$　よって、$a=\dfrac{1}{2}$　のとき、最大値　$m(a)=\dfrac{11}{4}$

TYPE34　最大・最小からの 2 次関数の決定（1）

2 次関数　$y=ax^2+bx-7$　が　$x=3$　で最大値 2 をとるとき、定数　a, b　の値を求めよ。

KEY　最大値とそのときの x の値から連立方程式を立てる。

解　与式は　$y=a(x-3)^2+2=ax^2-6ax+9a+2=ax^2+bx-7$
係数を比較して、　$-6a=b$　・・・①,　$9a+2=-7$　・・・②
より、　$a=-1, b=6$



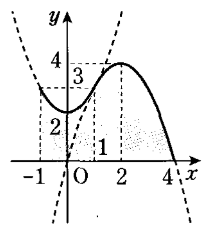
類題 34　2 次関数　$y=x^2+ax+b$　が　$x=-1$　で最小となり,　$x=2$　のとき　$y=5$　であるとき，定数　a, b　の値を求めよ。

TYPE35　区間によって異なる関数の最大・最小　　重要度 C　レベル 3

$y=\begin{cases} x^2+2 & (-1\leq x\leq 1) \\ -x^2+4x & (1<x\leq 4) \end{cases}$　のとき、　y　の最大値と最小値を求めよ。

KEY　x　の値の範囲（区間）別のグラフを書いて調べる。

解　$1<x\leq 4$　のとき、　$y=-(x-2)^2+4$　だから、グラフは右図のようになる。
$-1\leq x\leq 1$　のとき、　$y=x^2+2$　ゆえ、　$(0,2)$　を頂点とし、　$x=1$　のとき　$y=3$　で二つのグラフは連続する。
従って、最大値は、　$x=2$　のとき　4　、　$x=4$　のとき、最小値　0　となる。



類題 35

$y=\begin{cases} y=2x+3 & (x\leq 0) \\ x^2-4x+3 & (0<x\leq 3) \end{cases}$　のとき、最大値と最小値を求めよ。

TYPE36　最大･最小からの2次関数の決定（2）　重要度Aレベル3

関数　$y=ax^2-2ax+a+b$　の　$-1\leq x\leq 2$　における最大値が　3　、最小値が　-5　であるとき、定数　a,b　の値を求めよ。

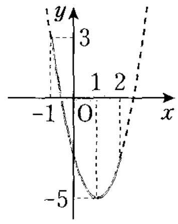
KEY　x^2　の係数の符号（凹凸）で場合分け。軸は動かない。

解

(1)　$a\neq 0$　のとき、

$y=a(x-1)^2+b$

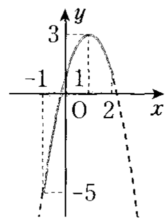
軸　$x=1$　より、



$a>0$　のとき、最大値　$x=-1$　のときで、　$y=a+2a+a+b=4a+b=3$　･･･①

最小値　$x=1$　のときで、　$y=a-2a+a+b=b=-5$　･･･②

よって、　$a=2,b=-5$



$a<0$　のとき、最大値　$x=1$　のときで、　$y=a-2a+a+b=b=3$　･･･①

最小値　$x=-1$　のときで、　$y=a+2a+a+b=4a+b=-5$　･･･②

よって、　$a=-2,b=3$

(2)　$a=0$　のとき、　$y=b$　ゆえ最大･最小は存在しない。

従って、　$(a,b)=(2,-5)(-2,3)$

類題**36**

関数　$y=ax^2-4ax+b$　の　$1\leq x\leq 4$　における最大値が　4　、最小値が　-10　であるとき、定数　a,b　の値を求めよ。

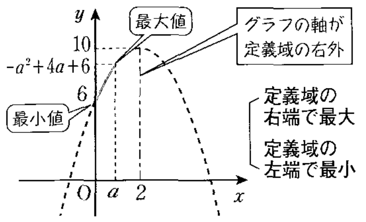
TYPE37　文字を含む区間における最大・最小（1）　重要度 A　レベル 3

$\boldsymbol{a}$ を正の定数とするとき、2 次関数 $\boldsymbol{y=-x^2+4x+6}$ の $\boldsymbol{0\leq x\leq a}$ における最大値と最小値を求めよ。

KEY グラフの軸との位置関係で場合分け。定義域の右端が動く。

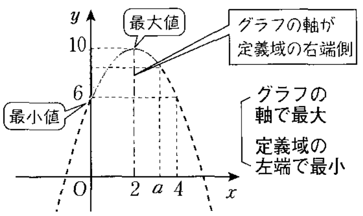
解
与式は $\boldsymbol{y=-(x-2)^2+10}$ と変形できるから、グラフ軸は $\boldsymbol{x=2}$ であるから、定義域との関係が、以下のようになる。

(i) $0<a<2$ のとき



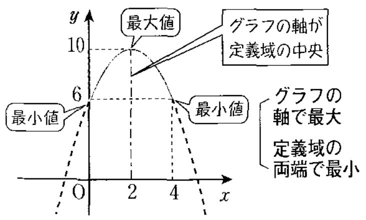
$x=a$ で最大値 $-a^2+4a+6$
$x=0$ で最小値 6

(ii) $2\leq a<4$ のとき



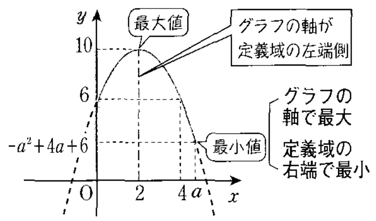
$x=2$ で最大値 10
$x=0$ で最小値 6

(iii) $a=4$ のとき



$x=2$ で最大値 10
$x=0,\ 4$ で最小値 6

(iv) $4<a$ のとき



$x=2$ で最大値 10
$x=a$ で最小値 $-a^2+4a+6$

(i)~(iv) より、

最大値は $\begin{cases} \boldsymbol{0<a<2} & \text{のとき} \boldsymbol{-a^2+4a+6} \quad (\boldsymbol{x=a}) \\ \boldsymbol{2\leq a} & \text{のとき} \quad \boldsymbol{10} \quad (\boldsymbol{x=2}) \end{cases}$

最小値は $\begin{cases} \boldsymbol{0<a<4} & \text{のとき} \quad \boldsymbol{6} \quad (\boldsymbol{x=0}) \\ \boldsymbol{a=4} & \text{のとき} \quad \boldsymbol{6} \quad (\boldsymbol{x=0,\ 2}) \\ \boldsymbol{4<a} & \text{のとき} \quad \boldsymbol{-a^2+4a+6} \quad (\boldsymbol{x=a}) \end{cases}$

類題 **37**　$\boldsymbol{a}$ を正の定数とする。2 次関数 $\boldsymbol{y=x^2-2x+3}$ の $\boldsymbol{-a\leq x\leq 2a}$ における最大値と最小値を求めよ。

TYPE38　文字を含む 2 次関数の最大･最小　　重要度 A　レベル 4

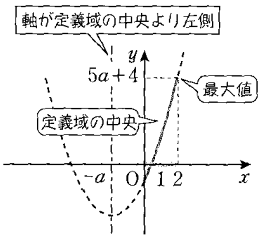
a を定数とするとき、2 次関数 $y=x^2+2ax+a$ の $0\leq x\leq 2$ における最大値と最小値を求めよ。

KEY　軸と定義域との位置関係で場合分け。軸は動くが、定義域は一定。

解　$y=(x+a)^2-a^2+a$ であるから、グラフは軸が直線 $y=-a$ で、下に凸な放物線である。
軸と定義域の位置関係で場合分けする。

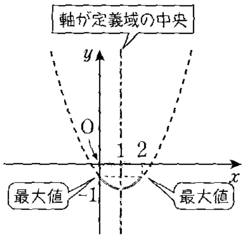
(1) 最大値については、グラフの軸が定義域の中央 $x=1$ と重なるか、その左側か右側かで考える。

㋐ $-a<1$ すなわち
$a>-1$ のとき



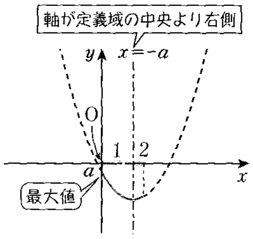
$x=2$ で最大値 $5a+4$

㋑ $-a=1$ すなわち
$a=-1$ のとき



$x=0,\ 2$ で最大値 -1

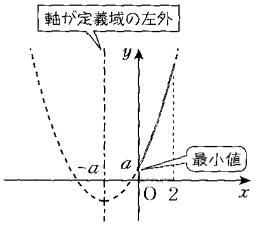
㋒ $1<-a$ すなわち
$a<-1$ のとき



$x=0$ で最大値 a

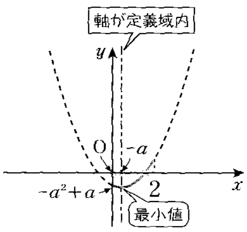
(2) 最小値については、定義域がグラフの軸を含むか、その左側か右側かで分ける。

㋐ $-a<0$ すなわち
$0<a$ のとき



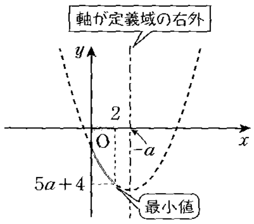
$x=0$ で最小値 a

㋑ $0\leqq -a\leqq 2$ すなわち
$-2\leqq a\leqq 0$ のとき



$x=-a$ で最小値 $-a^2+a$

㋒ $-a>2$ すなわち
$a<-2$ のとき



$x=2$ で最小値 $5a+4$

類題 **38**　a を定数とするとき、2 次関数 $y=-x^2-ax+a^2$ の $0\leq x\leq 1$ における最大値と最小値を求めよ。

TYPE39　文字を含む区間における最大・最小（2）　重要度 B　レベル 5

a を定数とするとき、2 次関数 $y=-x^2+2x+2$ について、

(1) $a\leq x\leq a+2$ における、最大値を求めよ。

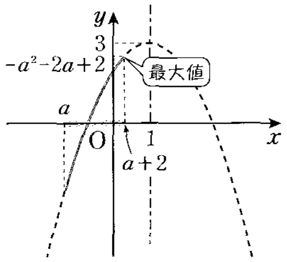
(2) $a\leq x\leq a+2$ における、最小値を求めよ。

KEY　定義域と軸の位置関係で場合分け。定義域は平行移動する。

解　与式は、 $y=-(x-1)^2+3$ と変形できる。従って、軸は $x=1$ である。

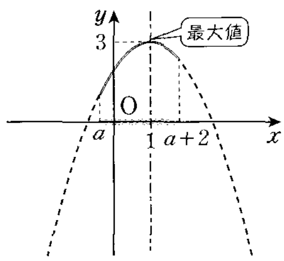
(1) 定義域定義域がグラフの軸を含むか、その左側か右側かで分けて考える。

(i) $a+2<1$ すなわち $a<-1$ のとき



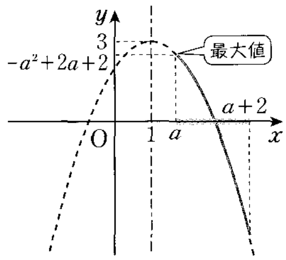
$x=a+2$ で
最大値 $-a^2-2a+2$

(ii) $a\leqq 1\leqq a+2$ すなわち $-1\leqq a\leqq 1$ のとき



$x=1$ で，最大値 3

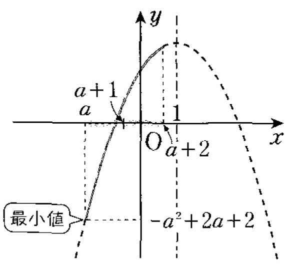
(iii) $1<a$ のとき



$x=a$ で
最大値 $-a^2+2a+2$

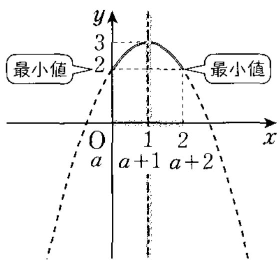
(2) 定義域の中央がグラフの軸と重なるか、その左側か右側かで分けて考える。

(i) $a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき



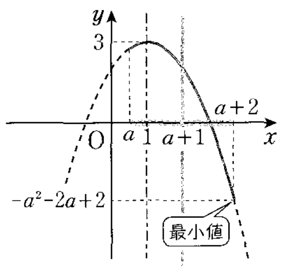
$x=a$ で
最小値 $-a^2+2a+2$

(ii) $a+1=1$ すなわち $a=0$ のとき



$x=0$，2 で，最小値 2

(iii) $1<a+1$ すなわち $0<a$ のとき



$x=a+2$ で
最小値 $-a^2-2a+2$

類題 39　a を定数とするとき、2 次関数 $f(x)=x^2-10x+a$ について

(1) $a\leq x\leq a+1$ における最小値を求めよ。

(2) $a\leq x\leq a+1$ における最大値を求めよ。

のとき、 $f(a+1)=a^2-7a-9$

TYPE40 条件付きの2次関数の最大･最小（1） 重要度A レベル4

$2x+y=1$, $x \geq 0, y \geq 0$ のとき、 x^2+2y^2 の最大値と最小値を求めよ。

KEY どちらかの変数を消去して1変数の関数とする。
消去した変数の変域から残った変数の変域を考える。

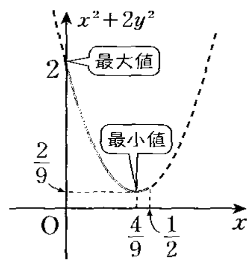
解 $2x+y=1$ より $y=1-2x$ ･･･①

これを代入すると、 $x^2+2y^2=x^2+2(1-2x)^2=9x^2-8x+2=9\left(x-\frac{4}{9}\right)^2+\frac{2}{9}$

また、 $y \geq 0$ より、 $1-2x \geq 0$ →よって、 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

ゆえに、 x^2+2y^2 は、 $x=\frac{4}{9}$ のとき、最小値 $\frac{2}{9}$ このとき $y=\frac{1}{9}$

$x=0$ のとき、 最大値 2 このとき $y=1$



類題40

(1) $2x+y=1$ のとき、 $x^2+2xy+3y^2$ の最小値を求めよ。

(2) $x+2y+3z=5$ ･･･① , $3x+y-z=10$ ･･･② のとき、 $x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。

(3) $x+y=4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ のとき、 $(x-1)y$ の最大値と最小値を求めよ。

TYPE41　置き換えと2次関数の最大･最小　　重要度A　レベル4

関数　$y=(x^2-6x)^2+12(x^2-6x)+30$　の　$1\leq x\leq 5$　における最大値と最小値を求めよ。

KEY　同じ式の部分をtで置き換える。tの変域に注意

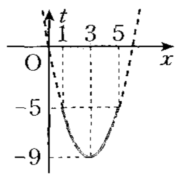
解

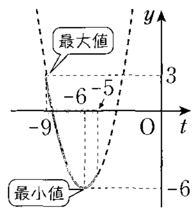
$x^2-6x=t$　とおくと、　$t=(x-3)^2-9$　軸　$x=3$　は定義域の中央ゆえ、tの変域は　$-5\leq t\leq -9$

よって、　$y=t^2+12t+30=(t+6)^2-6$　　軸　$t=-6$　は変域内ゆえ、

最小値は　$t=-6$　のとき、　-6　(　$x=3\pm\sqrt{3}$　　$\because$　$1\leq x\leq 5$　)

最大値は、　$t=-9$　のとき、　3　(　$x=3$　　$\because$　$1\leq x\leq 5$　)





類題41　関数　$y=(x^2-2x)^2+6(x^2-2x)+10$　の最小値を求めよ。

TYPE42　2変数関数の最大･最小　　重要度B　レベル4

x,y　の関数　$z=x^2-2xy+5y^2+6x-14y+5$　の最小値を求めなさい。

KEY　x　の2次関数としたときの最小値(yの関数)の最小値を考える。

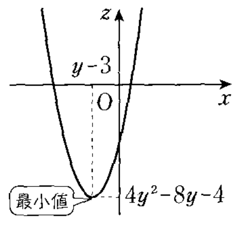
解

$z=x^2-2(y-3)x+5y^2-14y+5=(x-y+3)^2-(y^2-6y+9)+5y^2-14y+5$

$=\ (x-y+3)^2+4\{(y-1)^2-2\}$

$x=y-3$　のとき、最小値　$4\{(y-1)^2-2\}$　最小値は、　$y=1$　のとき、　-8

よって、　$y=1,x=-2$　のとき　　z　の最小値　-8



類題42　　x,y　の関数　$z=x^2+xy+y^2+x-y$　の最小値を求めよ。