4. 一次不等式と2次方程式

4-1 1次不等式

□ 不等式の解・不等式を解

x についての不等式において,その不等式を満たす x の値をその不等式の解といい,不等式の解全体を求めることをその不等式を解くという。

□ 1 次不等式

不等式 $ax+b>0$ や $ax+b\leq 0$ (a,b は実数の定数, $a\neq 0$)などを x についての 1 次不等式という。

□ 1 次不等式の解

1 次不等式 $ax+b>0$ の解は, $ax>-b$ より

$a>0$ のとき $x>-\frac{b}{a}$ $a<0$ のとき $x<-\frac{b}{a}$

□1 次不等式 $ax+b>0$ の解は, 1 次関数 $y=ax+b$ のグラフが x 軸より上方にあるような x の値の範囲である。

4-2 連立不等式

□連立不等式の解・連立不等式を解く

いくつかの不等式を組み合わせた不等式を連立不等式といい,これらの不等式を同時に成り立たせるような x の値を,連立不等式の解という。連立不等式の解全体を求めることを連立不等式を解くという。

4-3 2 次方程式の解と公式

□方程式の解・方程式を解く

x についての方程式において,その方程式を満たす x の値をその方程式の解といい,方程式のすべての解を求めることをその方程式を解くという。

□ 2 次方程式.解の公式

$ax^2+bx+c=0$ (a,b,c は実数の定数, $a\neq 0$)の形で表される方程式を, x についての 2 次方程式という。

$b^2-4ac\geq 0$ のとき, 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解は

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となり,これを 2 次方程式の解の公式という.

$x=¿$

□重解

$b^2-4ac=0$ のときは, $x=-\frac{b}{2a}$ となり,この 2 次方程式の実数解は 1 個である。この場合は, 2 つの解が重なったと考えて,この解を重解という。

□ 2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解の公式 x の 1 次の係数が 2 の倍数である 2 次方程式

$ax^2+2b'x+c=0$ において, $b'^2-ac\geq 0$ であれば,実数解は

$x=-b'\pm\frac{\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ となる。

4-4 2 次方程式の実数解の個数

□判別式 D

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について,解の公式の根号内 b^2-4ac をこの 2 次方程式の判別式といい, D で表す。

□判別式 D の符号と解の個数

$D=b^2-4ac>0$ $\Leftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解をもつ

$D=b^2-4ac=0$ $\Leftrightarrow$ 重解をもつ

$D=b^2-4ac<0$ $\Leftrightarrow$ 実数解をもたない

Check Exercize

4-1 **1**次不等式 $\frac{2}{7}x-3>\frac{1}{3}(2x+1)$ を解け.

4-2 **1**人について**400**円の入場料が**,** **30**人以上の団体では**2**割引になる。この場合**,** **30**人以下の団体が**30**人の団体として入場料を支払う方が得であるのは**,**団体の人数が何人以上のときか。

4-3 連立**1**次不等式 $\begin{cases} 4x+3\geq 7 \\ 3x+2<8 \end{cases}$ を解け。

4-4 次の**2**次方程式を解け。

(l) $2x^2-6=0$ **(2)** $(x-2)(x-4)=3$

(3) $2x^2-4x-1=0$ ***(4)** $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$

4-5 **2**次方程式 $x^2+ax-6=0$ の**1**つの解が**5**であるとき**,**定数 a の値と他の解を求めよ。

4-6 次の**2**次方程式の実数解の個数を調べよ。

(1) $4x^2-4x+1=0$ **(2)** $4x^2-4x-1=0$

(3) $4x^2-4x+3=0$

4-7 連立方程式 $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x^2-y^2=-1 \end{cases}$ を解け。

4-8 斜辺の長さが**10** cm **,**直角をはさむ**2**辺の長さの和が**14** cm である直角三角形がある。直角をはさむ**2**辺の長さを求めよ。

==

C.Ex 解答

4-1 $x<-\frac{35}{4}$ **4-2** **25**人以上 **4-3** $1\leq x<2$

4-4 **(1)** $\pm\sqrt{3}$ **(2)** $1, 5$ **(3)** $\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$ **(4)** $3+3\sqrt{3}$, $-1-\sqrt{3}$

4-5 $a=-\frac{19}{5}$ **,**他の解 $-\frac{6}{5}$ **4-6** **(1)** **1**個 , **(2)** **2**個 , **(3)** **0**個

4-7 $(x, y)=(0,1)$, $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ **4-8** **6** cm と **8** cm

==

TYPE 22　2次方程式が重解を持つ条件　　重要度 B　レベル 2

2次方程式　$(a^2-1)x^2+2(a+1)x+3=0$　が重解をもつように，実数 **a** の値を定め，その重解を求めよ

KEY　判別式を用いる。

解　**2** 次方程式であるから　$a^2-1\neq 0$　ゆえに　$a\neq\pm 1$
重解をもつための条件は**,**判別式を **D** とすると
$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-3(a^2-1)=0$　　$a^2-a-2=0$　　えに　$a=-1,2$
$a\neq\pm 1$　であるから　$a=2$
このとき**,**与式は　$3x^2+6x+3=0$　　$(x+1)^2=0$　　ゆえに　$x=-1$

類題 **22**　**2** 次方程式　$x^2+2(a-1)x-a^2+3a-1=0$　が重解をもつように実数　a　の値を定め**,**その重解を求めよ。

TYPE 23　2 次方程式の実数解の個数　　重要度 A　レベル 2

a　を実数とするとき**, 2** 次方程式　$x^2-2x+a-2=0$　の異なる実数解の個数を調べよ。

KEY　判別式の符号を調べる。

解　判別式を **D** とすると　$D=4-4(a-2)=12-4a$　よって**,**異なる実数解の個数は
$D>0$　すなわち，$a<3$　のとき，**2** 個
$D=0$　すなわち，$a=3$　のとき**,**　**1** 個
$D<0$　すなわち**,**　$a>3$　のとき**,**　**0** 個

類題 **23**　**2** 次方程式　$x^2+x+a=0$　が実数解をもつように**,**実数　a　の値の範囲を定めよ。

TYPE 24　未知数が3個の連立1次方程式　　　重要度B　レベル1

連立方程式 $\begin{cases} 2x+3y+z=-4 & \cdots① \\ 3x+y+2z=5 & \cdots② \\ -x+2y+5z=-3 & \cdots③ \end{cases}$

KEY　1文字を消去して連立方程式を作る。

解　①－②×3　$-7x-5z=-19$　→　$7x+5z=19$　・・・④
②×2－③　$7x-z=13$　・・・⑤

④－⑤　$6z=6$　→　$z=1$　∴　$x=2$　,　$y=5-2z-3x=5-2-6=-3$

類題 **24**

連立方程式 $\begin{cases} x+y+z=1 & \cdots① \\ 3x+2y-z=3 & \cdots② \\ 2x-3y-3z=-13 & \cdots③ \end{cases}$ を解け。

TYPE 25　連立方程式の実数解の組の個数　　重要度B　レベル3

連立方程式　$x+2y=a$　,　$x^2+y^2=5$　がただ一組の実数解をもつように、
正の定数　a　の値を定めよ。

KEY　1文字を消去して得られる方程式が重解をもてばよい。

解　$x+2y=a$　より、　$x=a-2y$　　$(a-2y)^2+y^2=5$　→　$5y^2-4ay+a^2-5=0$　・・・①
①がただ一つの実数解をもつには、①が重解をもつことであるから、
$D=(-4a)^2-4\cdot5(a^2-5)=0$　→　$16a^2-20a^2+100=0$　→　$4a^2=100$　,　$a^2=25$
$a=5$　（$a>0$）　このとき、　$5y^2-20y+20=5(y-2)^2=0$　,　∴　$y=2$　、　$x=-2$

類題 **25**　a　を実数とするとき、連立方程式　$x+2y=1$　,　$xy=a$　の実数解の組の個数を調べよ。

TYPE 26　文字係数の方程式･不等式　重要度 B　レベル 4

a, b を定数とするとき、方程式 $ax+b=0$ を解け。

KEY まず、 $a\neq 0$ のときと、 $a=0$ のときに場合分けする。

解　$a\neq 0$ のとき、 $x=\dfrac{-b}{a}$,

$a=0$ のとき、 $0\cdot x=-b$ このとき、 $b=0$ ならば、 x は全ての実数が解となる。

$b\neq 0$ ならば、 x の実数解はない。

類題 **26**

(1) a を定数とするとき, 方程式 $a^2x=2ax+a-2$ を解け。

(2) a, b, c を定数とするとき, 次の方程式を解け。 $ax^2-(ab+bc+ca)x+bc(b+c)=0$

(3) a, b を定数とするとき, 不等式 $ax+b>0$ を解け。

TYPE 27　文字係数の連立 1 次方程式　重要度 A　レベル 4

a を定数とするとき、次の連立方程式を解け。

$ax+y=1$ ･･･①　$x+ay=-1$ ･･･②

KEY y を消去して x の方程式を作る。

解　a ×①－② より、 $a^2x-x=a+1$ → $(a^2-1)x=a+1$ → $(a+1)(a-1)x=a+1$

$a\neq\pm 1$ のとき、 $x=\dfrac{1}{a-1}$ 、 $y=1-ax=\dfrac{-1}{a-1}$,

$a=1$ のとき、解なし。

$a=-1$ のとき, x は全ての実数。 $y=1+x$ の実数。

類題 **27**

(1) a を定数とするとき、次の連立方程式を解け。

$ax-6y=a+2$ ・・・① , $2x+(a-7)y=3$ ・・・②

(2) 連立方程式 $x+4y=ax$, $2x+3y=ay$ が $x=0, y=0$ 以外の解をもつように、定数 a の値を定めよ。

EXERCISE

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ を計算せよ。

(2) $2\sqrt{17}$ と $\dfrac{135}{2\sqrt{38}+\sqrt{17}}$ の大小関係を調べよ。

(3) $x=\sqrt{5+\sqrt{21}}$, $y=\sqrt{5-\sqrt{21}}$ のとき、 xy , $x+y$, $x-y$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ の値を求めよ

(4) $x^2-3x+1=0$ のとき、 $x^3+\dfrac{1}{x^3}$, $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ の値を求めよ。

(5) $\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{b^2}=3$ のとき、 $\dfrac{b^3}{a^3}+\dfrac{a^3}{b^3}$ の値を求めよ。

(6) $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$ のとき、 $xy+yz+zx$, $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ の値を求めよ。

(7) x, y, z はいずれも **0** でなく、 $2x-y+z=0$ と $x+2y+8z=0$ の両方をみたすとき、 $\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ の値を求めよ。

(8)連立方程式 $\begin{cases} 5x+3y-z=0 \\ 3x-5y-4z=0 \\ x^2+y^2+z^2=384 \end{cases}$ を解け。

==

Ex. HINT

(1) まず分母の **2** 重根号を外す。**(2)** 分母を有理化したあとの大小比較は、**2** 乗して行う。**(3)** 根号内の分母分子を $\sqrt{2}$ 倍して $2\sqrt{21}$ をつくる。 **(4)** 与式の両辺を x で割ると、 $x+\frac{1}{x}$ の値が求まる。**(5)** まず、 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ を求める。 **(6)** $(x+y+z)^2$ の展開式を利用する。**(7)** 条件式を用いて **2** 文字を消去する。

==

Exercise 解答

(1) $\sqrt{2}$

(2) $2\sqrt{17}>\frac{135}{2\sqrt{38}+\sqrt{17}}$

(3) $xy=2$, $x+y=\sqrt{14}$, $x-y=\sqrt{6}$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\sqrt{14}+2\sqrt{2}}$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{\sqrt{14}-2\sqrt{2}}$

(4) $x^3+\frac{1}{x^3}=18$, $x^5+\frac{1}{x^5}=123$

(5) $\pm 2\sqrt{5}$

(6) $xy+yz+zx=-\frac{1}{2}$, $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=\frac{1}{4}$

(7) $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{14}$

(8) $(x, y, z)=(8, -8, 16), (-8, 8, -16)$