第 4 章

ベクトルの定義と基本演算

§ 4.1

ベクトルの定義

ベクトルとはどのようなものであるか，ここでは図を交えながら，その基本的な考え方を知っていこう．

4.1.1　ベクトルとは何か

■「向き」を含む問題

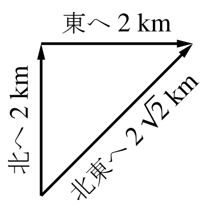
まず，次のような問題を考えてみよう．

(1) りんごを 2 個購入して，さらに 2 個購入した時，最初から数えて何個購入しているか？

(2) 北に 2 km 移動して，さらに東に 2 km 移動した時，最初の位置からどの場所へ移動しているか？

(1) は $2 + 2 = 4$ より「4 個」である．

(2) は移動距離としては $2 + 2 = 4$ より 4 km だが，最初の位置から 4 km 離れた距離にいるわけではない．下図のように，(2) の正確な答えとしては「北東に $2\sqrt{2}$ km 移動した」となる．

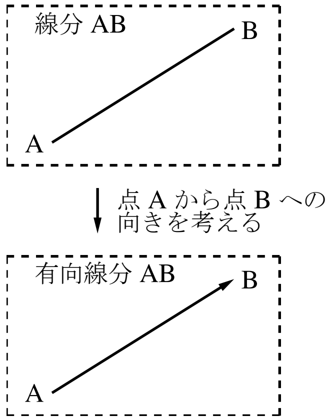


これまで学習した分野（関数や数列など）では，(1) のように「大きさ」のみを取り扱ってきた．

これに対して，本章以降では (2) のように「大きさ」に加えて「向き」という概念を含んだ量を取り扱っていく．なお，このように「向き」と「大きさ」で定まる量のことを，一般に**ベクトル** (vector) という．それに対して，大きさだけをもつものを**スカラー** (scalar) という．

■有向線分

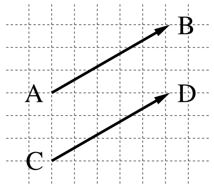
有向線分というものをもちいて，「向き」を図で表してみよう．



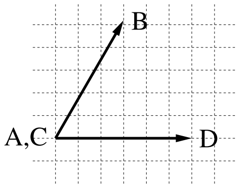
右図の線分 AB において，点 A から点 B への「向き」を考えたものを**有向線分** (oriented segment) AB といい，点 A から点 B への矢印として表す．このとき，点 A をその**始点** (initial point) , 点 B をその**終点** (terminal point) , 線分 AB の長さをその**大きさ** (length) という．

各図における有向線分 AB と有向線分 CD の違いを確認しよう．

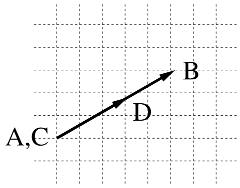
1) 始点の異なる有向線分



2) 向きの異なる有向線分



3) 大きさの異なる有向線分



一般に，有向線分は次のいずれかの条件を与えれば定まるといえる．

a) 始点，終点

b) 位置（始点 or 終点），向き，大きさ

■ベクトルの定義

有向線分は「位置」が固定されているものであった．そして，この「位置」条件の存在のために，図 1) の有向線分 AB と有向線分 CD は互いに異なる有向線分となっていた．

これに対して，有向線分であるための条件 b) から「位置」条件を無視したものは「向き」と「大きさ」だけとなるのでベクトルを表すと考えることができる．

この有向線分 AB の表すベクトルを，記号で

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

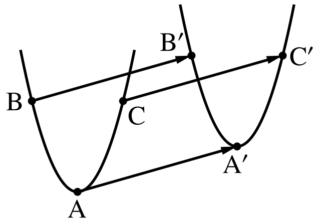
と書く[*1]．

このように有向線分から「位置」条件を無視し，ベクトルとみなすことでどのようなメリットがあるかを説明しよう．

右図のような 2 次関数の平行移動を考える．

[*1] $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は「ベクトル・エー・ビー」と発音する．

このとき，各有向線分 AA′，BB′，CC′ は全て異なる有向線分となるが，各ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$ は全て同じベクトルを表している．



このように，有向線分は位置条件が存在するため，「平行移動」という事象に対して統一的に考えられないが，ベクトルは位置条件を無視するため，「平行移動」という事象に対して統一的に考えることができるようになる．

■ベクトルの相等の定義

上記の議論によって，有向線分を利用してベクトルを可視化することができた．

さて本章冒頭で述べたように，ベクトルは「大きさ」に加えて「向き」という新しい概念を含んだ量であった．そのため，等号「=」や演算記号「+」「−」なども新たに定義する必要がある．

「北 2 km」+「東 2 km」=「北東 $2\sqrt{2}$ km」となるように定義するのが自然であろう．

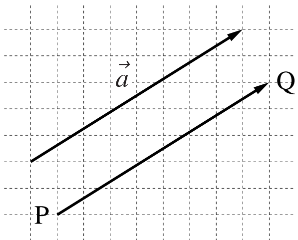
ここでは，まずは等号「=」について定義しよう．

さきほどの p.108 の図 1）に登場したベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は向きと大きさが等しいので同じベクトルであった．そこで

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

と書くことにし，このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は等しいということにする．

また，ベクトルは始点と終点を明記しないで，単に $\vec{a}$，$\vec{b}$ と書くこともある．たとえば，右図のようなとき $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\vec{a}$ は向きと大きさが等しいので

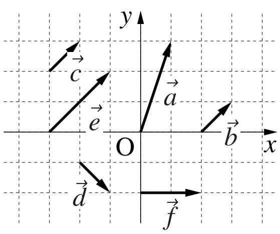


$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \vec{a}$$

となる．

【例題：ベクトルの相等】

右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ について，互いに等しいベクトルをいえ．



【解答】

大きさと向きの等しいものを見つければよいので，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ が等しいベクトルである．

■ベクトルの大きさの表し方

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ や $\vec{a}$ の大きさを，それぞれ $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$，$|\vec{a}|$ と表す．ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ は，(有向)線分 AB の長さに等しい．特に，大きさが 1 であるベクトルを**単位ベクトル** (unit vector) という．

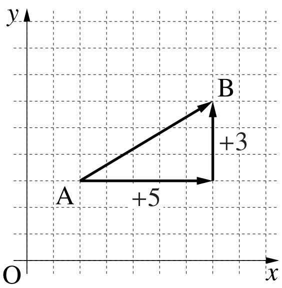
4.1.2　平面ベクトルの成分表示

ベクトルは向きと大きさで定まる量と定めたが，今のままでは向きを矢印(有向線分)で表すしか方法がないため，ベクトルを表現する手段として図を描くしか方法がない．そこで，ここでは図を描かなくてもベクトルを表現できる方法を考えよう．

■平面ベクトルを成分で表す

座標平面上にあるベクトルに対して，そのベクトルを成分を用いて表してみよう．

右図のように，xy 平面上に 2 点 A(2, 3)，B(7, 6) をとり，有向線分 AB を考える．



このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を

x の増分 : $8-3=5$

y の増分 : $4-1=3$

を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ と表すことにする．

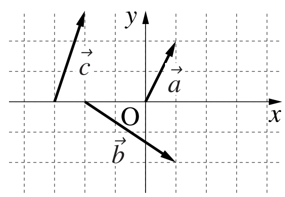
一般には，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ において，有向線分 PQ における x の増分 x_2-x_1，y の増分 y_2-y_1 をもちいて

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$$

と表す．ベクトルのこのような表し方を成分表示といい，x_2-x_1 の値を $\boldsymbol{x}$ **成分** (x-component)，y_2-y_1 の値を $\boldsymbol{y}$ **成分** (y-component) という．

【例題：ベクトルの成分表示】

右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を成分で表せ．



【解答】

まず，$\vec{a}$ の始点の座標は (0, 0)，終点の座標は (1, 2) である．したがって

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

となる．同様にして，$\boldsymbol{\vec{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\vec{c}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$ となる．

■成分表示された平面ベクトルの相等

一般に，2 つの $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ の相等に関して

$$\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \end{cases}$$

が成り立つ．

■成分表示された平面ベクトルの大きさ

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ は，線分 AB の長さであるから，三平方の定理より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

となる．

一般に，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ の大きさ $\left|\vec{a}\right|$ は

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$$

で求まる．

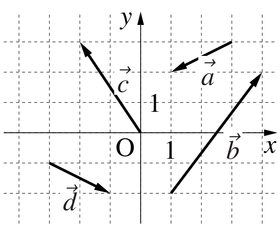
特に，2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ については

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

となる．

【例題：有向線分のあらわすベクトルの大きさ】

右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ について，それぞれの大きさを求めよ．



【解答】

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(1-3)^2+(2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(4-1)^2+\{2-(-2)\}^2} = \sqrt{9+16} = \mathbf{5}$$

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \boldsymbol{\sqrt{13}}$$

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{\{-1-(-3)\}^2+\{-2-(-1)\}^2} = \sqrt{4+1} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$$

§ 4.2
ベクトルの演算

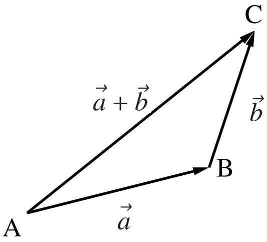
前セクションで述べたように，ベクトルは大きさに加えて向きという新しい概念を含んだ量であったので，ベクトルの演算も新たに定義する必要がある．ここでは，ベクトルの「和」「差」「実数倍」についてみていこう．

4.2.1　ベクトルの加法

■ベクトルの加法の定義

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，まず点 A を定めて

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$



となる点 B，C を取るとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和といい，$\vec{a}+\vec{b}$ と書く．すなわち，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

■ベクトルの加法に関する計算法則

一般に，ベクトルの加法について，次のことが成り立つ．

ベクトルの加法に関する計算法則

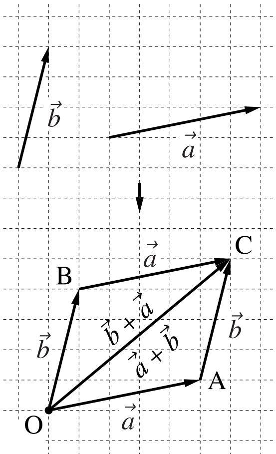
1) 交換法則　$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$
2) 分配法則　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

【証明】

1) 2 つのベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ について

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



となるように点 O，A，B，C をとる．このとき，

$$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

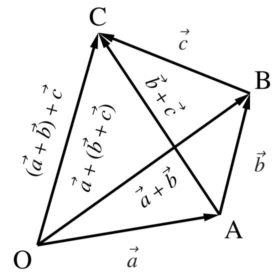
$$\vec{b}+\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

よって

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$$

以上より，$\vec{a}+\vec{b}$ $(=\vec{b}+\vec{a})$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(=\vec{a})$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(=\vec{b})$ によってつくられる平行四辺形 OACB の対角線のベクトルとして表すことができる*2.

2) 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるように点 O，A，B，C をとる．
このとき，



$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

よって

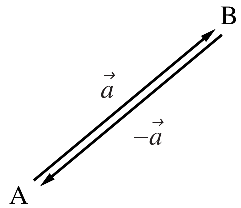
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

以上より，ベクトルの和に関しては，その順序を区別しなくてよいので括弧を省略して，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書く．

■**逆ベクトルとゼロベクトル**

ある $\vec{a}$ に対し，大きさが等しく向きが反対であるベクトルを，$\vec{a}$ の**逆ベクトル** (inverse vector) といい，$-\vec{a}$ で表す．

いま，右図のように $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると，$-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

である．

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と，その逆ベクトル $-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の和は

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$$

となる．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ を，始点と終点が一致した特別な有向線分の表すベクトルと考えて，これを**ゼロベクトル** (zero vector) といい，記号 $\vec{0}$ で表す*3．つまり

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

である．

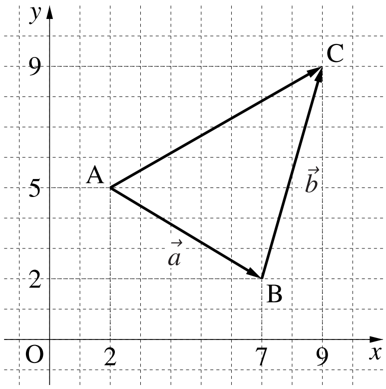
*2 この平行四辺形は，「$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で張られる平行四辺形」とも表現される．
*3 $\vec{0}$ は実数の 0（ゼロ）ではないことに気をつけよう．必ず矢印をつけて区別すること．

ゼロベクトルの大きさは 0 とし，その向きは考えないものとする．ゼロベクトルには，数の 0 と同じように次のような性質がある．

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$

■成分表示された平面ベクトルの加法

右図のような 2 つのベクトルを考える．



$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$$

いま，$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は右図より $\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ となる．つまり

$$\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$$

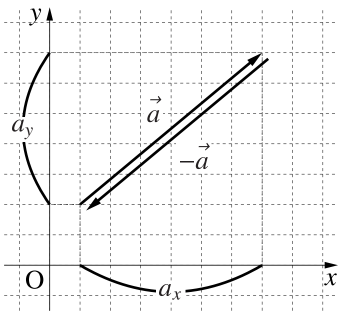
が成立する．

一般に，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ と $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ の和 $\vec{a}+\vec{b}$ は

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\end{pmatrix}$$

となる．

また，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ の逆ベクトルの成分表示は，右図より $-\vec{a}=\begin{pmatrix}-a_x\\-a_y\end{pmatrix}$ となり，ゼロベクトルの成分表示は



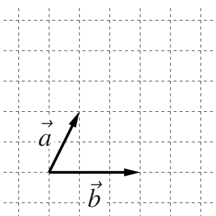
$$\vec{0}=\vec{a}+(-\vec{a})=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_x\\-a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

となる．

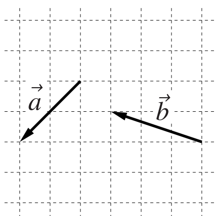
【例題：ベクトルの加法】

$\vec{a}$, $\vec{b}$ が次のように表されているとき，$\vec{a}+\vec{b}$ を図示し，成分表示せよ．ただし，1 マスの 1 辺の長さは 1 とする．

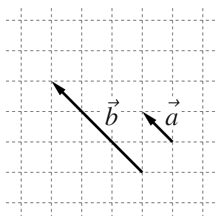
(1)



(2)

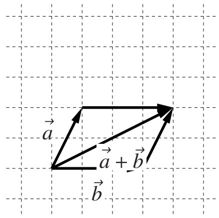


(3)

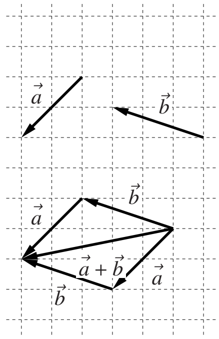


【解答】

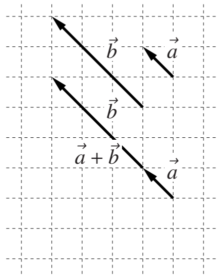
(1) 右図より，$\vec{a}+\vec{b}$ について，x の増分は 4，y の増分は 2 であるので，$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}}$



(2) 右図より，$\vec{a}+\vec{b}$ について，x の増分は -5，y の増分は -1 であるので，$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}}$



(3) 右図より，$\vec{a}+\vec{b}$ について，x の増分は -4，y の増分は 4 であるので，$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}}$



4.2.2　ベクトルの減法

■ベクトルの減法の定義

2 つのベクトル，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ に対して，$\vec{a}$ に $\vec{b}$ の逆ベクトルを加えたもの $\vec{a}+(-\vec{b})$ を $\vec{a}-\vec{b}$ と書き，これを，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ を引いた差という．つまり

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

いま，右図のように $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，$\vec{a}-\vec{b}$ は $\vec{a}+(-\vec{b})$ であるから

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

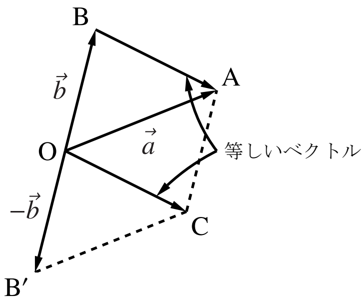
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

が成り立つ．



■成分表示された平面ベクトルの減法

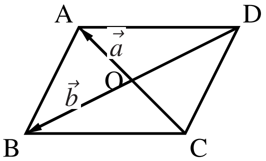
2 つのベクトルを，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ とおくと，$-\vec{b}=\begin{pmatrix}-b_x\\-b_y\end{pmatrix}$ となるから

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x-b_x\\a_y-b_y\end{pmatrix}$$

となる．

【例題：ベクトルの減法】

平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ とする．次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表し，また，成分表示せよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　　(5) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DO}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-(-\vec{b})=\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}-(-\vec{b})=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-3}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}$

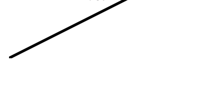
(4) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\vec{a}=-\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\vec{a}-\vec{b}=-\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$

4.2.3　ベクトルの実数倍

■ベクトルの実数倍の定義

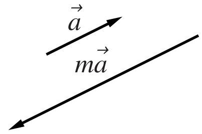
$\vec{0}$ でない $\vec{a}$ と実数 m に対し，$\vec{a}$ の m 倍 $m\vec{a}$ を次のように定める．



1) $m>0$ のとき

　$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが $|\vec{a}|$ の $\underbrace{m}_{\text{正}}$ 倍のベクトル

2) $m<0$ のとき



$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが $\left|\vec{a}\right|$ の $\underbrace{|m|}_{\text{正}}$ 倍のベクトル

3) $m = 0$ のとき
　$0\vec{a} = \vec{0}$ と定める．

また，$\vec{a} = \vec{0}$ のときは，任意の実数 m に対して $m\vec{0} = \vec{0}$ と定める．

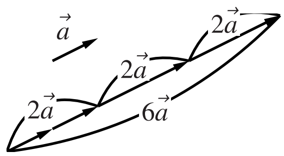
特に，$m = 1$ のときは 1 を省略して書く．つまり $1\vec{a} = \vec{a}$ である．m が分数 $m = \dfrac{l}{k}$ のとき，$\dfrac{l}{k}\vec{a}$ を $\dfrac{l\vec{a}}{k}$ と書くこともある．

■ベクトルの実数倍に関する計算法則

ベクトルの実数倍に関する計算法則

1) ベクトルの実数倍の結合法則
　$m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$
2) ベクトルの実数倍に対する分配法則
　$(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$
3) 実数倍のベクトルに関する分配法則
　$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

【証明】



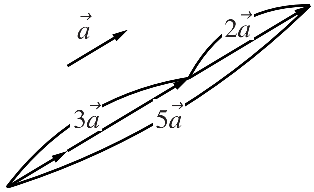
1) たとえば右図のように，$3(2\vec{a})$ は $2\vec{a}$ の向きを変えずに大きさを 3 倍したベクトルであるが，これは $\vec{a}$ を向きを変えずに 6 倍したベクトルと等しい．つまり

$$3(2\vec{a}) = 6\vec{a}$$

一般に，ベクトルの実数倍に関して

$$m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$$

が成り立つ．これらは同じベクトルを表すため区別する必要がないので，括弧を省略して単に $mn\vec{a}$ と書くこともある．



2) たとえば右図のように，$(3+2)\vec{a}$ つまり $5\vec{a}$ は，$3\vec{a}$ と $2\vec{a}$ の和つまり $3\vec{a} + 2\vec{a}$ と等しい．つまり

$$(3+2)\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{a}$$

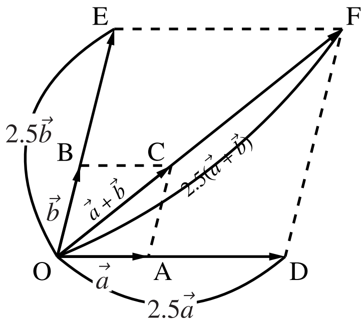
一般に，ベクトルの実数倍に関して

$$(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$$

が成り立つ．

3) たとえば右下図のように，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で張られる平行四辺形 OACB と，$2.5\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $2.5\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ で張られる平行四辺形 ODFE を考える．
このとき，平行四辺形 OACB と平行四辺形 ODFE は相似な図形となり，その相似比は 1 : 2.5 となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=2.5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2.5(\vec{a}+\vec{b})$$



となる．また，ベクトルの和から

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2.5\vec{a}+2.5\vec{b}$$

でもあるから

$$2.5(\vec{a}+\vec{b})=2.5\vec{a}+2.5\vec{b}$$

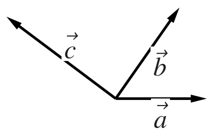
が成り立つ．
一般に，ベクトルの実数倍に関して

$$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$$

が成り立つ．

【例題：ベクトルの和，差，実数倍】

右の図のようにベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ をおくとき，次のベクトルを作図せよ．

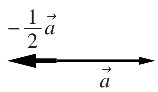


(1) $-\dfrac{1}{2}\vec{a}$　　(2) $2\vec{a}+\vec{c}$

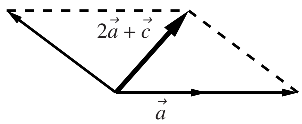
(3) $2\vec{b}-3\vec{c}$　　(4) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

【解答】

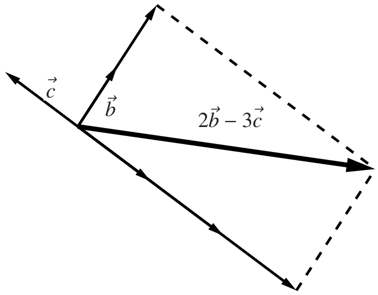
(1) 図示すると下図のようになる．



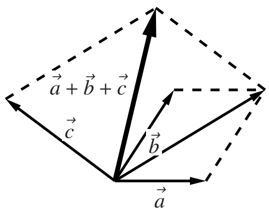
(2) 図示すると下図のようになる．



(3) 図示すると，下図のようになる．



(4) 図示すると下図のようになる.



■単位ベクトル

$|\vec{a}| \neq 0$ である $\vec{a}$ に対して，同じ向きの単位ベクトルは，$\vec{a}$ を自分自身の大きさで割った $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ となる.

【例題：単位ベクトル】

(1) $|\vec{a}| = 5$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ.

(2) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ のとき，$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ.

【解答】

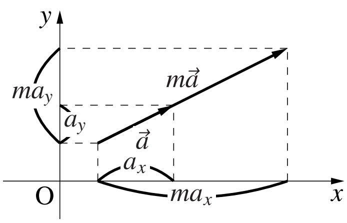
(1) $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\boldsymbol{\dfrac{1}{5}\vec{a}}$ である.

(2) $\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{3}{5}} \\ \boldsymbol{-\frac{4}{5}} \end{pmatrix}$$

■成分表示された平面ベクトルの実数倍

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ とおくとき，右図より



$$m\vec{a} = m\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_x \\ ma_y \end{pmatrix}$$

となる．

また，$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}$ だから，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分表示は，

$\dfrac{1}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ となる．[*4]

【例題：ベクトルの実数倍】

(1) $2(\vec{a} + 2\vec{b}) - (4\vec{a} + \vec{b})$ を計算せよ

(2) $(4\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(2\vec{a} + \vec{b})$ を計算せよ

【解答】

(1)
$$2(\vec{a} + 2\vec{b}) - (4\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 4\vec{b} - 4\vec{a} - \vec{b}$$
$$= \boldsymbol{-2\vec{a} + 3\vec{b}}$$

(2)
$$(4\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(2\vec{a} + \vec{b}) = 4\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{a} - 2\vec{b}$$
$$= \boldsymbol{\vec{0}}$$

■ベクトルの合成と分解

ベクトルの加法と減法で次の式を学習した．

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

このように 2 つ以上のベクトルを 1 つのベクトルで表現することをベクトルの合成という．

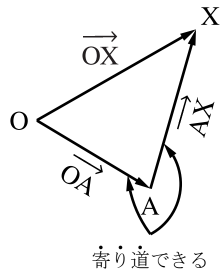
またこれらの式を逆にみて

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

1 つのベクトルを 2 つ以上のベクトルで表現することをベクトルの分解という．

[*4] 反対向きの単位ベクトルの成分表示は $-\dfrac{1}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ となる．



①では経由点として点 B をとっているが，ベクトルの加法の定義を考えると，点 B でなくても任意の点でかまわないことがわかる．つまり

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A\square} + \overrightarrow{\square C}$$

として，□には好きな点を経由点としてとってよい．

同様にして，②では始点として点 O をとっているが，点 O でなくても任意の点でかまわないことがわかる．

つまり

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\square A} - \overrightarrow{\square B}$$

として，□には好きな点を始点としてとってよい．

ベクトルの合成と分解

1) 合成　$\overrightarrow{A\square} + \overrightarrow{\square B} = \overrightarrow{AB}$
　$\overrightarrow{\square B} - \overrightarrow{\square A} = \overrightarrow{AB}$

2) 分解　$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\square} + \overrightarrow{\square B}$
　$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\square B} - \overrightarrow{\square A}$

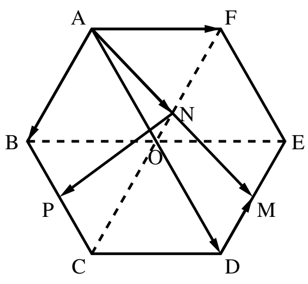
・・・・合成公式の第 1 式と分解公式の第 2 式はよく使うので覚えておこう．

【例題：ベクトルの加法】

正六角形 ABCDEF において，辺 DE の中点を M とし，線分 AM の中点を N，辺 BC の中点を P とする．このとき，$\overrightarrow{AM}$ および $\overrightarrow{NP}$ を，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}$ を用いて表せ．

この正六角形の中心を O とする．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}\\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= \left(2 - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}\right)\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}\right)\\ &= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} - 1\right)\overrightarrow{AF}\end{aligned}$$

$= \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

■ベクトルの平行条件

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じか，または反対であるとき[*5]，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行**であるといい，$\boldsymbol{\vec{a} \parallel \vec{b}}$ と表す．

このとき，$\vec{a} = k\vec{b}$ となる実数 k が存在する．逆に，$k \neq 0$ のとき，$\vec{a} = k\vec{b}$ ならば $\vec{a} \parallel \vec{b}$ といえる．つまり

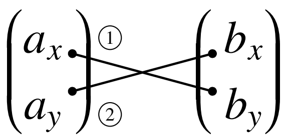
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b} \text{となる } k \in \mathbb{R} \text{ が存在する}$$

である．

また，成分表示された 2 つのベクトル，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ が平行であるとき

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kb_x \\ kb_y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a_x = kb_x \\ a_y = kb_y \end{cases} \iff \begin{cases} k = \dfrac{a_x}{b_x} \\ k = \dfrac{a_y}{b_y} \end{cases}$$



より $(k =)\ \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y}$，つまり

$$a_x b_y = a_y b_x$$

が成り立つ．この式は右上図のように，「① の積 = ② の積」と覚えておくとよい．

ベクトルの平行条件

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ について

$$\begin{aligned} \vec{a} \parallel \vec{b} &\iff \vec{a} = k\vec{b} \text{となる } k \in \mathbb{R} \text{ が存在する} \\ &\iff a_x b_y = a_y b_x \end{aligned}$$

【例題：ベクトルの平行条件】

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ x \end{pmatrix}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であるように x の値を定めよ．

【解答】

[*5] このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「方向が等しい」ともいう．

ベクトルの平行条件 $a_x b_y = a_y b_x$ を考えて

$(-2)\cdot x = 3\cdot 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -6}$

4.2.4　ベクトルの演算法則のまとめ

以上，ベクトルの加法 (p.113)，ベクトルの減法 (p.116)，ベクトルの実数倍 (p.117) に関して，次の計算法則が成り立つことをみてきた[*6].

ベクトルの和・差・実数倍に関する計算法則

1) ベクトルの和の交換法則
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2) ベクトルの和の結合法則
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3) ゼロベクトル
$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4) 逆ベクトル
$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
5) ベクトルの実数倍の結合法則
$m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$
6) ベクトルの実数倍に対する分配法則
$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$
7) 実数倍のベクトルに関する分配法則
$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$
8) 実数倍の単位元
$1\vec{a}=\vec{a}$

[*6] この 8 つはそのまま**ベクトル空間** (vector space) の公理となる.

第 5 章

平面ベクトルと平面図形

§ 5.1

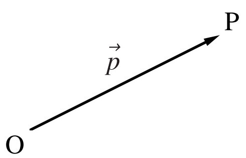
位置ベクトル

ここまでベクトルの定義を行い，ベクトルにおける演算を定義してきた．第 5 章では，ベクトルと図形の関わりを勉強していく．本セクションではまず，図形とベクトルを考えるときの基本となる位置ベクトルについて学習しよう．

5.1.1　位置ベクトルの定義

■位置ベクトルの定義

平面上で，基準とする点 O をあらかじめ定めておくと，任意の点 P の位置は

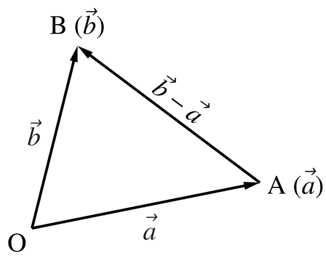


$$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

という $\vec{p}$ によって表すことができる．

この $\vec{p}$ を，点 O に関する点 P への**位置ベクトル** (position vector) という．また，位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を，P ($\vec{p}$) と表す．

点 O に関して，2 点 A，B がそれぞれ，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) であるとき



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であるから[*1]，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$$

と表される．

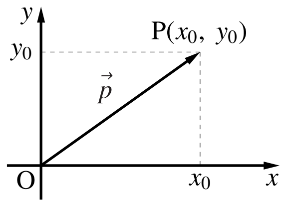
[*1] ベクトルの合成と分解 (p.121) 参照．

つまり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は「終点 B の位置ベクトルから，始点 A の位置ベクトルを引いた差」に等しい．

5.1.2　位置ベクトルの成分と座標の関係

■位置ベクトルの成分と座標の関係

座標平面内で原点 O を基準ととると，平面上の任意の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ への位置ベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ となる．



また，逆に原点 O に関する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ が $\vec{p} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ であるとき，点 P の座標は $(x_0,\ y_0)$ となる．

つまり

「点 P の座標が $(x_0,\ y_0)$ である」

$\Longleftrightarrow$「原点 O に関する点 P への位置ベクトルは $\vec{p} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ である」

となる．

【例題：位置ベクトルの成分と座標の関係】

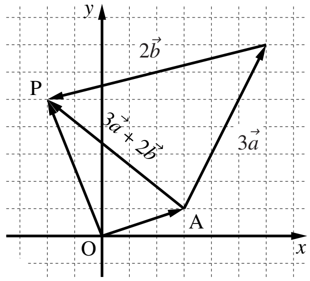
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．

座標平面上の点 A(3, 1) から $3\vec{a} + 2\vec{b}$ だけ移動した点 P の座標を求めよ．

【解答】

まず，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-8 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$



また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから

◀ ベクトルの分解を使って，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を原点 O を始点とするベクトル（原点に関する位置ベクトル）に書き換えた．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5+3 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

よって，点 P の座標は **(−2, 5)** である．

§ 5.2

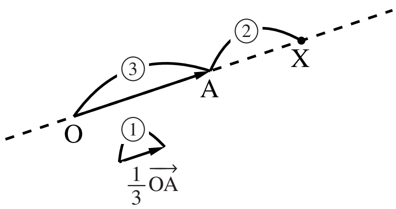
内分点・外分点の位置ベクトル

ここでは，内分点・外分点の位置ベクトルの求め方を勉強する．なお，これから例題の題材として三角形の 5 心をピックアップして説明していく．

5.2.1　3 点が 1 直線上にある条件

■ベクトルの伸縮

たとえば，右図のように直線 OA 上に点 X があり，OA : AX = 3 : 2 であったとする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を「伸縮する」ことによって表すことができ



$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

と書ける．

■3 点が一直線上にある条件

3 点 A，B，C が一直線上にあるのは，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を「伸縮する」ことによって表すことができる場合である．つまり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となる実数 k が存在することである．

3 点が一直線上にある条件

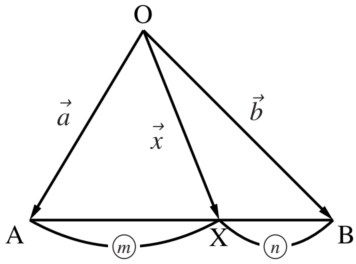
3 点 A，B，C が一直線上にある

$\iff \overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k が存在する

5.2.2　内分点・外分点の位置ベクトル

■内分点の位置ベクトル

右図のように，点 O に関して 2 点，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) をとるとき，線分 AB を $m:n$ の比に内分する点 X の位置ベクトルである $\vec{x}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，m，n を用いて次のように表すことができる．



$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= \overrightarrow{OX} \\
&= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} && \because \text{ベクトルの分解} \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} && \because \text{ベクトルの伸縮} \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) && \because \text{始点を O にする} \\
&= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} \\
&= \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} \\
&= \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}
\end{aligned}
$$

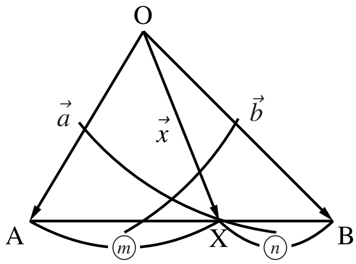
内分点の位置ベクトル

2 点 A ($\vec{a}$)，B ($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB を $m:n$ の比に内分する点 X ($\vec{x}$) において，$\vec{x}$ は

$$\vec{x} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

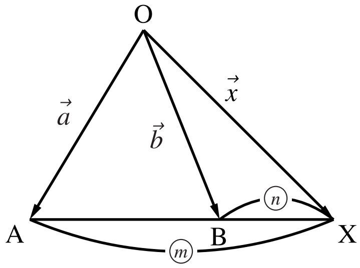
と表すことができる．

この式 $\vec{x} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$ の分子 $n\vec{a} + m\vec{b}$ は，右図の太線で表したようにたすきをかけたような形になっていると覚えるとよい．



■**外分点の位置ベクトル**

右図のように，点 O に関して 2 点，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) をとるとき，線分 AB を $m:n$ の比に外分する点 X の位置ベクトルである $\vec{x}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，m，n を用いて次のように表すことができる[*2]．



$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= \overrightarrow{OX} \\
&= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} && \because \text{ベクトルの分解}
\end{aligned}
$$

[*2] 図では $m > n$ としてあるが，$m < n$ の場合も同じ式で表すことができる．

$$= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad \because \text{ベクトルの伸縮}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \qquad \because \text{始点を O にする}$$

$$= \left(1 - \frac{m}{m-n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$= \frac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$= \frac{-n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m-n} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

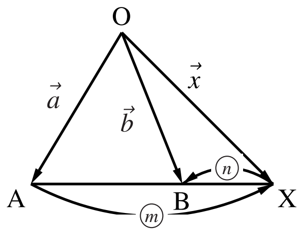
外分点の位置ベクトル

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ の比に外分する点 $\mathrm{X}(\vec{x})$ において，$\vec{x}$ は

$$\vec{x} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

と表すことができる.

この式は,「$m:n$ に外分すること」は「$m:-n$ に内分すること」と等しいと覚えるとよい[*3]．また，$\vec{x} = \dfrac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$ は分母・分子に -1 をかけることにより



$$\vec{x} = \frac{-(-n\vec{a} + m\vec{b})}{-(m-n)} = \frac{n\vec{a} - m\vec{b}}{n-m}$$

とも書けるので,「$-m:n$ に内分すること」とも等しいことがわかる.

【例題：内分点・外分点の座標】

原点を O(0, 0) とする座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(a_x,\ a_y)$，$\mathrm{B}(b_x,\ b_y)$ があり，線分 AB を $m:n$ に内分する点を X とするとき，点 X の座標を求めよ.
また，線分 AB を $m:n$ に外分する点を Y とするとき，点 Y の座標を求めよ.

【解答】

内分点の位置ベクトルの式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

であり，これに $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{n}{m+n}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \frac{m}{m+n}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

[*3] これは，右上図で「m と n の進む向きが逆」であることによるものである.

$$= \frac{1}{m+n}\begin{pmatrix} na_x \\ na_y \end{pmatrix} + \frac{1}{m+n}\begin{pmatrix} mb_x \\ mb_y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m+n}\begin{pmatrix} na_x + mb_x \\ na_y + mb_y \end{pmatrix}$$

よって，点 X の座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{na_x + mb_x}{m+n}}, \boldsymbol{\dfrac{na_y + mb_y}{m+n}}\right)$ となる．

また，外分点の位置ベクトルの式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \frac{-n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m-n} = \frac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

◀「$m : n$ に外分」は「$m : -n$ に内分」することと同じ

であり，これに $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{-n}{m-n}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \frac{m}{m-n}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m-n}\begin{pmatrix} -na_x \\ -na_y \end{pmatrix} + \frac{1}{m-n}\begin{pmatrix} mb_x \\ mb_y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m-n}\begin{pmatrix} -na_x + mb_x \\ -na_y + mb_y \end{pmatrix}$$

よって，点 Y の座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{-na_x + mb_x}{m-n}}, \boldsymbol{\dfrac{-na_y + mb_y}{m-n}}\right)$ となる．

上の例題の結果は，FTEXT数学 II の『図形と方程式』でみた結果と一致する．

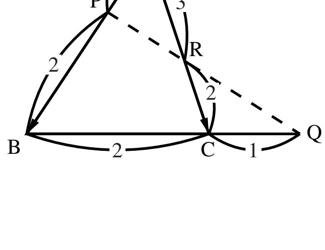
【例題：3 点が一直線上にある条件】

△ABC の辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P，辺 BC を 3 : 1 に外分する点を Q，辺 CA を 2 : 3 に内分する点を R とするとき．3 点 P，Q，R は一直線上にあることを示せ．

【証明】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{-\vec{b}+3\vec{c}}{3-1} = \dfrac{-\vec{b}+3\vec{c}}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{3}{5}\vec{c}$ と表すことができる．

◀



よって

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\frac{5}{6}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{AR}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であり，P，Q，R は同一直線上に

ある. ■

【例題：重心の位置ベクトル】

$\triangle$ABC の重心を G とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ.

(2) ある基準点 O からの位置ベクトルが，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ となるとき，重心の位置ベクトル $\mathrm{G}(\vec{g})$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ.

【解答】

(1) 辺 BC の中点を M とおくと，重心の定義より BM : CM = 1 : 1 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また，重心の性質より AG : GM = 2 : 1 であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$ となる.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AG}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \frac{1}{3}\left(\vec{c} - \vec{a}\right) \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\vec{g} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}}$ となる.

【例題：内心の位置ベクトル】

AB $= c$，BC $= a$，CA $= b$ である $\triangle$ABC の内心を I とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ.

(2) ある基準点 O からの位置ベクトルが，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ となるとき，内心の位置ベクトル $\mathrm{I}(\vec{i})$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ.

【解答】

(1) 直線 AI と線分 BC の交点を D とすると，内心の定義より $\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD}$ である．よって，角の二等分線の定理より $\mathrm{BD}:\mathrm{DC} = c:b$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

であり

$$\mathrm{BD} = \frac{c}{b+c}\cdot a = \frac{ac}{b+c}$$

である．
また，内心の定義より $\angle\mathrm{ABI} = \angle\mathrm{DBI}$ である．よって，角の二等分線の定理より

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID} = \mathrm{AB}:\mathrm{BD} = c : \frac{ac}{b+c} = b+c : a$$

である．
以上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}} &= \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AD}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &= \frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\ &= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$ となる．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AI}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}} &= \vec{a} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= \vec{a} + \frac{b}{a+b+c}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \frac{c}{a+b+c}\left(\vec{c} - \vec{a}\right)\\ &= \frac{a}{a+b+c}\vec{a} + \frac{b}{a+b+c}\vec{b} + \frac{c}{a+b+c}\vec{c}\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{\vec{i} = \frac{a}{a+b+c}\vec{a} + \frac{b}{a+b+c}\vec{b} + \frac{c}{a+b+c}\vec{c}}$$

となる．

§ 5.3

平面ベクトルの 1 次独立

ここではベクトルの分解に関する定理を学習しよう.

5.3.1　ベクトルの 1 次結合の定義

■ベクトルの 1 次結合の定義

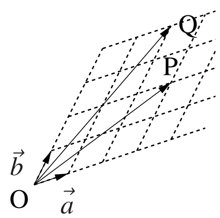
1 次結合の定義

2 つのベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，適当な実数 s，t を用いて

$$s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表されるベクトルのことを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **1 次結合** (linear combination) という.

たとえば，右図において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ の 1 次結合で表すと



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$$

となる.

このように，あるベクトルを 2 つの $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表すことを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ へのベクトルの**分解** (resolution) という（ベクトルの分解については p.121 参照）.

5.3.2　ベクトルの 1 次独立の定義

■ベクトルの 1 次独立の定義

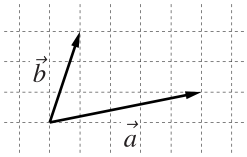
1 次独立の定義

「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が **1 次独立** (linearly independent) である」とは

$$s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0}$$

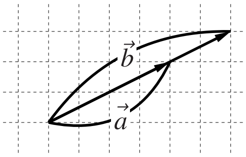
を満たす実数 s，t が $s = t = 0$ のときに限る，ことである.

たとえば，右図のように平行でない $\vec{a}$，$\vec{b}$ では



$$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$$

となる s，t は $s=t=0$ のときに限られるので，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立である．



また，左図のように平行な $\vec{a}$，$\vec{b}$ では，$s=t=0$ のとき以外にも，たとえば $s=\dfrac{3}{2}$，$t=-1$ のときにも

$$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$$

を満たすので，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるとはいえない．

つまり，次のようなことがいえる．

1 次独立なベクトルと平行でないベクトル

$\vec{a}$，$\vec{b}$ が 1 次独立であるならば，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でない．逆に，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でなければ，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立である．

つまり

「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 1 次独立」$\Longleftrightarrow \vec{a} \not\parallel \vec{b}$

である．

証明は背理法による．

5.3.3 1 次独立な平面ベクトルに関する定理

■1 次独立な平面ベクトルに関する定理

1 次独立なベクトルの 1 次結合に関して，次の定理が成り立つ．

1 次独立な平面ベクトルに関する定理

ある $\vec{p}$ が，1 次独立な 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の 1 次結合で

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$
$$\vec{p}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$$

と 2 通りに表されたとする．このとき

$$\begin{cases} s=s' \\ t=t' \end{cases}$$

が成り立つ．つまり，$\vec{p}$ は 1 通りでしか表せない．

【証明】

$\vec{p}$ は

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$$

と表されるので

$$
\begin{aligned}
& s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b} \\
\Leftrightarrow\ & (s-s')\vec{a}+(t-t')\vec{b}=\vec{0}
\end{aligned}
$$

ここで，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，その定義より

$$
\begin{cases} s-s'=0 \\ t-t'=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} s=s' \\ t=t' \end{cases}
$$

■

【例題：重心の定理】

△ABC の重心を G とし，辺 AB の中点を D，辺 CA の中点を E とするとき

CG : GD = 2 : 1

であることを，ベクトルの 1 次独立を用いて証明せよ．

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおく．

まず，G は線分 CD 上にあるから，CG : GD = $s : 1-s$ とおくと

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{\mathrm{AG}}=s\overrightarrow{\mathrm{AD}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{\mathrm{AG}}=s\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+(1-s)\cdot\vec{c} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{s}{2}\vec{b}+(1-s)\vec{c} \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

◀『内分点の位置ベクトル』(p.129)

と表すことができる．

また，G は線分 BE 上にあるから，BG : GE = $t : 1-t$ とおくと

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-t)\cdot\vec{b}+t\cdot\frac{1}{2}\vec{c} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-t)\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c} \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

◀『内分点の位置ベクトル』(p.129)

と表すことができる．

いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，②より

$$
\begin{cases} \dfrac{s}{2}=1-t \\ 1-s=\dfrac{t}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=\dfrac{2}{3} \\ t=\dfrac{2}{3} \end{cases}
$$

よって

$$\mathrm{CG} : \mathrm{GD} = \frac{2}{3} : 1 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1.$$

■

【例題：角の二等分線の定理】

AB $= c$，BC $= a$，CA $= b$ である $\triangle$ABC において，$\angle$A の 2 等分線と辺 BC の交点を D するとき

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = c : b$$

であることを，ベクトルの 1 次独立を用いて証明せよ．

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおく．

まず，直線 AD は $\angle$BAC の二等分線なので，適当な実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = s\left(\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{s}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{s}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{s}{c}\vec{b} + \frac{s}{b}\vec{c} \qquad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる．

◀ $\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は大きさが 1 で等しいので $\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\angle$BAC を 2 等分する直線上にある．
これを**角の二等分ベクトル** (angle bisection vector) という．

また，点 D は辺 BC 上の内分点なので，BD : DC $= t : 1 - t$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c} \qquad \cdots\cdots ②$$

と表すことができる．

いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，②より

$$\begin{cases} \dfrac{s}{c} = 1 - t \\ \dfrac{s}{b} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \dfrac{bc}{b+c} \\ t = \dfrac{c}{b+c} \end{cases}$$

よって

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \frac{c}{b+c} : 1 - \frac{c}{b+c} = \frac{c}{b+c} : \frac{b}{b+c} = c : b$$

■

【例題：直線の交点の位置ベクトル】

△OAB において，辺 OA を 2 : 3 に内分する点を M，辺 OB を 4 : 3 に内分する点を N とし，線分 AN と線分 BM の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ を用いて表せ．

O を基準にした位置ベクトルを考えてみる．

【解答】

まず, 点 P は線分 BM 上にあるから, BP : PM = $s : 1-s$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OM}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = s \cdot \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2s}{5}\vec{a} + (1-s)\vec{b} \quad \cdots\cdots ①$$

◀『内分点の位置ベクトル』(p.129)

と表すことができる．

また，点 P は辺 AN 上にあるから，AP : PN = $t : 1-t$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t \cdot \frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\vec{a} + \frac{4t}{7}\vec{b} \quad \cdots\cdots ②$$

◀『内分点の位置ベクトル』(p.129)

と表すことができる．

いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，②より

$$\begin{cases} \dfrac{2s}{5} = 1-t \\ 1-s = \dfrac{4t}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \dfrac{5}{9} \\ t = \dfrac{7}{9} \end{cases}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}}$$

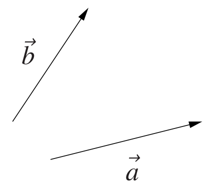
§ 5.4

ベクトルの内積

ここではベクトル同士の積の一つであるベクトルの内積を学習する．内積は 2 つのベクトルのなす角と密接な関係があり，そのため図形の性質を求める際によく登場する演算法則である．

5.4.1　ベクトルの正射影

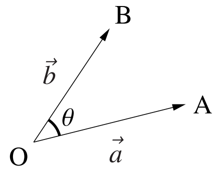
■ベクトルのなす角の定義



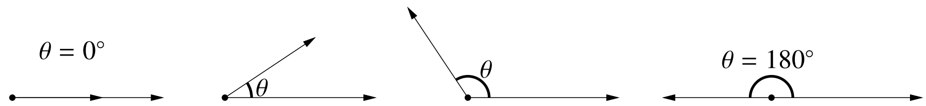
$\vec{0}$ でない 2 つの $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，点 O を始点として

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

となるように点 A，B をとる．このとき，$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさ θ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ によって決まる．この θ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**なす角** (included angle) という．



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向きのときは 0° であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ 向きがすれるにつれだんだん大きくなり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が開ききって互いに逆向きとなるとき 180° となる．



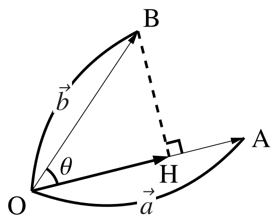
それ以上ベクトルが開いたときには，角度の狭いほうをなす角とするので，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ の取り得る範囲は $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ となる．

■ベクトルの正射影と有向距離

$\vec{0}$ でない 2 つの $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，点 O を始点として

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

となるように点 A，B をとる．

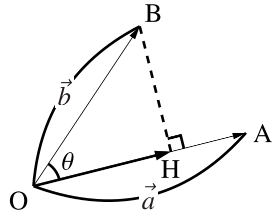


いま，右図の点 B からから直線 OA に下ろした垂線の足を H とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への**正射影** (orthogonal projection) ベクトルといい ${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ と表す[*4]．正射影ベクトル ${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ とそのなす角 θ を用いて次のように表すことができる．

1) **$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき**

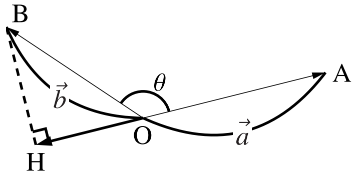
[*4] この表し方は FTEXT 独自の表記であり，一般的ではない．

$$
\begin{aligned}
{}_{\vec{b}\to}\vec{a} &= \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}\cos\theta}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \frac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\vec{a}
\end{aligned}
$$



2) **90° < θ ≦ 180° のとき**

$$
\begin{aligned}
{}_{\vec{b}\to}\vec{a} &= -\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\frac{\mathrm{OB}\cos(180^\circ-\theta)}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \frac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\vec{a}
\end{aligned}
$$



つまり，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で ${}_{\vec{b}\to}\vec{a} = \dfrac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\vec{a}$ と表せる．この $|\vec{b}|\cos\theta$ の値のことを，${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の**有向距離**または**符号付長さ**という．

なお，${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の大きさは

$$
\left|{}_{\vec{b}\to}\vec{a}\right| = \left|\frac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = \frac{|\vec{b}\cos\theta|}{\cancel{|\vec{a}|}}\cancel{|\vec{a}|} = |\vec{b}\cos\theta|
$$

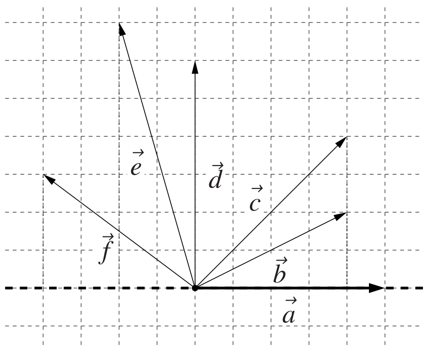
で表される．

【例】

ますめの一辺の長さが 1 の右図において

1) ${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の有向距離は 4
2) ${}_{\vec{c}\to}\vec{a}$ の有向距離は 4
3) ${}_{\vec{d}\to}\vec{a}$ の有向距離は 0
4) ${}_{\vec{e}\to}\vec{a}$ の有向距離は −2
5) ${}_{\vec{f}\to}\vec{a}$ の有向距離は −4

となる．



5.4.2　ベクトルの内積

■ベクトルの内積の定義

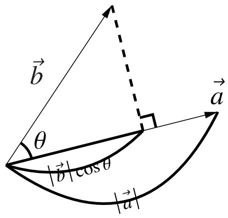
任意の 2 つのベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して**内積** (inner product) という演算 $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}$ を次のように定義する．

1) **$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき**

「$\vec{a}$ の大きさに，${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の有向距離をかけたもの」，すなわち

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \times \left|\vec{b}\right| \cos\theta$$

とする．ここで，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角である．



2) **$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のとき**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

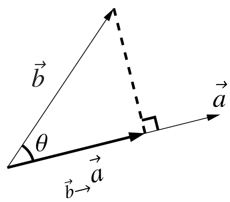
とする．

ベクトルの内積

> $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を
>
> $$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$
>
> とする．ここで，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角である．
> また，$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ とする．

■正射影ベクトルの内積での表し方

$\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトル ${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ は



$$\begin{aligned}
{}_{\vec{b}\to}\vec{a} &= \frac{\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a} \\
&= \frac{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a} && \because \text{分母分子に } \left|\vec{a}\right| \text{ をかけた} \\
&= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a} && \because \vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta
\end{aligned}$$

と表すことができる．

■内積の計算法則

ベクトルの内積に関して，次の計算法則が成り立つ[*5]．

[*5] ベクトル空間の公理および，この公理を満たすものを**計量ベクトル空間**という．ただし，公理であるためには 4) は $\vec{a}\cdot\vec{a} \geqq 0$ かつ $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = 0$ である．

内積に関する計算法則

1) 交換法則
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2) 結合法則
$\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

3) 分配法則
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

4) $\vec{a}\cdot\vec{a}\geqq 0$

【証明】

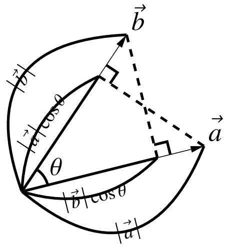
ゼロベクトルを含む場合の成立は明らかなので，以下ベクトルはすべてゼロベクトルでないとする．

1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta$$

より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　■



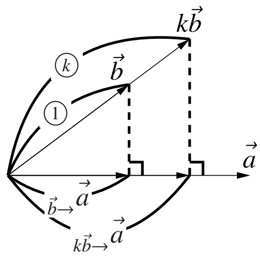
2) 右図において，${}_{k\vec{b}\to}\vec{a}=k\,{}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ より

$$\frac{\vec{a}\cdot(k\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=k\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ だから，係数を比較して

$$\frac{\vec{a}\cdot(k\vec{b})}{|\vec{a}|^2}=k\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$　■



3) 右図において，${}_{(\vec{b}+\vec{c})\to}\vec{a}={}_{\vec{b}\to}\vec{a}+{}_{\vec{c}\to}\vec{a}$ より

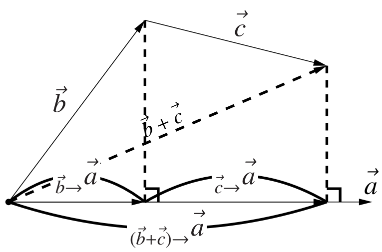
$$\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}+\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ だから，係数を比較して

$$\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}|^2}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}+\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$　■



4) 等しいベクトルどうしのなす角は 0° であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 \geqq 0 \qquad \blacksquare$$

等号成立は $|\vec{a}| = 0$，つまり $\vec{a} = 0$ のときに限る．

【例題：内積の計算法則】

次の計算が成り立つことを，内積の定義 (p.140) および内積の計算法則 1)〜3)(p.141) を用いて証明せよ．なお，(2) を証明する際には (1) を使ってよい．

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(2) $(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(u\vec{a}+v\vec{b}) = su|\vec{a}|^2+(sv+tu)\vec{a}\cdot\vec{b}+tv|\vec{b}|^2$

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}
&(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}\\
&= \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) && \blacktriangleleft \text{計算法則 1)}\\
&= \vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b} && \blacktriangleleft \text{計算法則 3)}\\
&= \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} && \blacktriangleleft \text{計算法則 1)}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

(2)

$$\begin{aligned}
&(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(u\vec{a}+v\vec{b})\\
&= (s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(u\vec{a})+(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(v\vec{b}) && \blacktriangleleft \text{計算法則 3)}\\
&= (s\vec{a})\cdot(u\vec{a})+(t\vec{b})\cdot(u\vec{a})+(s\vec{a})\cdot(v\vec{b})+(t\vec{b})\cdot(v\vec{b}) && \blacktriangleleft \text{(1)}\\
&= su(\vec{a}\cdot\vec{a})+tu(\vec{b}\cdot\vec{a})+sv(\vec{a}\cdot\vec{b})+tv(\vec{b}\cdot\vec{b}) && \blacktriangleleft \text{計算法則 2)}\\
&= su(\vec{a}\cdot\vec{a})+(tu+sv)\vec{a}\cdot\vec{b}+tv(\vec{b}\cdot\vec{b}) && \blacktriangleleft \text{計算法則 1)}\\
&= su|\vec{a}|^2+(tu+sv)\vec{a}\cdot\vec{b}+tv|\vec{b}|^2 && \blacktriangleleft \text{定義}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

【例題：意味のある演算とない演算】

次に表す式のうち，無意味なものには×を，意味のあるものには○つけよ．

(1) $\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}$　(2) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$　(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$

(4) $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$　(5) $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}}$　(6) $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

【解答】

(1) （×）$\vec{a}$ はベクトルで $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は実数．よって，ベクトルと実数の和となり無意味である．

(2) （○）$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は実数で $\vec{c}$ はベクトル．よって，$\vec{c}$ の $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 倍の意味をもつ．

(3) （×）2 つの $\cdot$ のうち，どちらを内積の記号とみるかで意味するものが異なるので無意味である．

(4) （○）$\vec{b}\cdot\vec{c}$ は実数で $\vec{a}$ はベクトル．よって，$\vec{a}$ の $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 倍の意味をもつ．

(5) （×）ベクトルに除法はないので，分母に $\vec{a}$ がある時点で無意味である．

(6) （○）$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は実数で $\left|\vec{a}\right|$ も実数であるのでその比を表す．

■成分表示された平面ベクトルの内積

成分表示された 2 つのベクトル，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ の内積について考えてみよう．

まず，$\vec{e_x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e_y}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ という 2 つのベクトル（**基本ベクトル** (fundamental vector) ）をとる．それぞれのベクトルの大きさは 1 であり，なす角は 90° であるから

$$\left|\vec{e_x}\right|=\left|\vec{e_y}\right|=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\vec{e_x}\cdot\vec{e_y}=0 \qquad \because \left|\vec{e_x}\right|\left|\vec{e_y}\right|\cos 90^\circ=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

ここで，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_y\end{pmatrix}=a_x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+a_y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

であるから，$\vec{a}$ を $\vec{e_x}$，$\vec{e_y}$ に分解すると

$$\vec{a}=a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y} \qquad \cdots\cdots ③$$

となる．

同様にして

$$\vec{b}=b_x\vec{e_x}+b_y\vec{e_y} \qquad \cdots\cdots ④$$

となる．

よって，③，④より

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y})\cdot(b_x\vec{e_x}+b_y\vec{e_y})\\&=a_xb_x\left|\vec{e_x}\right|^2+(a_xb_y+a_yb_x)\vec{e_x}\cdot\vec{e_y}+a_yb_y\left|\vec{e_y}\right|^2\\&=a_xb_x\left|\vec{e_x}\right|^2+a_yb_y\left|\vec{e_y}\right|^2 && \because ②\\&=a_xb_x+a_yb_y && \because ①\end{aligned}$$

となる．

成分表示されたベクトルの内積

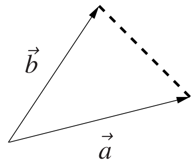
$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y$$

となる.

【暗記：ベクトルを用いた三角形の面積公式】

右の図のように，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる三角形の面積を S とする.



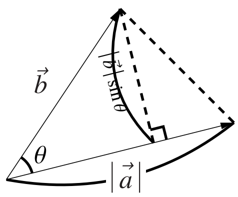
(1) S を $|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ と $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用いて表せ.

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ であるとき，S を a_x，a_y，b_x，b_y を用いて表せ.

(3) 座標平面上に 3 点 A(2, 1)，B(7, 2)，C(4, 5) をとる．このとき，△ABC の面積を求めよ.

【解答】

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq 180°)$ とおき，$|\vec{a}|$ を三角形の底辺とみると，高さは $|\vec{b}|\sin\theta$ とかけるから，三角形の面積 S は



$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|\vec{a}|\times|\vec{b}|\sin\theta\\&=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\end{aligned}$$

◀ $S=\frac{1}{2}$(底辺)×(高さ)

◀ $\sin^2+\cos^2\theta=1$ より $\sin^2=1-\cos^2\theta$ であり，$0°\leqq\theta\leqq180°$ より $\sin\theta\geqq 0$ だから

◀ 内積の定義

よって，$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}$ と表せる.

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ のとき

$$|\vec{a}|=\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y$$

であるから，$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ に代入して

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{({a_x}^2 + {a_y}^2)({b_x}^2 + {b_y}^2) - (a_xb_x + a_yb_y)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{{a_x}^2{b_y}^2 + {b_x}^2{a_y}^2 - 2a_xb_xa_yb_y} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(a_xb_y - b_xa_y)^2} \\ &= \frac{1}{2}|a_xb_y - b_xa_y| \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{S = \dfrac{1}{2}|a_xb_y - b_xa_y|}$ と表せる．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ より，$\triangle$ABC の面積 S' は

$$S' = \frac{1}{2}|5\cdot 4 - 1\cdot 2| = \mathbf{9}$$

ベクトルを用いた三角形の面積公式

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|a_xb_y - b_xa_y|$$

■ベクトルの垂直条件

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 90° とき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**垂直** (perpendicular) であるといい，$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}}$ と表す．また，$\vec{0}$ はすべてのベクトルに対し垂直と定める．

このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ = 0$ となる．逆に，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ならば $\vec{a}\perp\vec{b}$ といえる．つまり

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

である．

また，成分表示された 2 つのベクトル，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ と $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ が垂直であるとき

$$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}=0 \iff a_xb_x+a_yb_y=0$$

が成り立つ．

ベクトルの垂直条件

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であり，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ とする．

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_xb_x+a_yb_y=0$$

【例題：外心の位置ベクトル】

AB = 3，BC = 7，CA = 5 である △ABC がある．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，△ABC の外心を O とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ をもちいて表せ．

【解答】

(1) △ABC に ∠A からみる余弦定理を使うと

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2}=\frac{9+25-49}{2}=\frac{-15}{2}$$

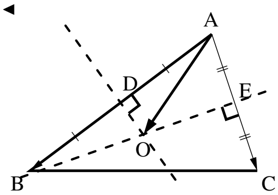
◀ $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta$

であるから

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta=\boldsymbol{\frac{-15}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=x\vec{b}+y\vec{c}$ とおく．
まず，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は直交するから

$$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x\vec{b}+y\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2+y\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

◀


$$\Leftrightarrow\ 9\left(x-\frac{1}{2}\right)+y\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$$\Leftrightarrow\ 9\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{15}{2}y=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{EO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は直交するから

$$\overrightarrow{\mathrm{EO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(x\vec{b}+y\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=0$$

$$\Leftrightarrow\ x\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\left|\vec{c}\right|^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ x\vec{b}\cdot\vec{c}+25\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{15}{2}x+25\left(y-\frac{1}{2}\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

式①，②を連立して

$$\begin{cases}6x-5y=3\\-3x+10y=5\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{11}{9}\\y=\dfrac{13}{15}\end{cases}$$

よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{11}{9}\vec{b}+\frac{13}{15}\vec{c}}$.

【例題：垂心の位置ベクトル】

AB = 5，BC = 6，CA = 4 である △ABC がある．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，△ABC の垂心を H とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ をもちいて表せ．

【解答 1：直交条件を使う】

(1) △ABC に ∠A からにらむ余弦定理を使うと

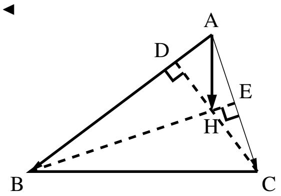
◀ $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta$

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2}=\frac{25+16-36}{2}=\frac{5}{2}$$

であるから，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=x\vec{b}+y\vec{c}$ とおく．

◀



まず，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は直交するから

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(x\vec{b}+y\vec{c}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0\\
\Leftrightarrow\ &x\left|\vec{b}\right|^2+(y-1)\vec{b}\cdot\vec{c}=0\\
\Leftrightarrow\ &25x+(y-1)\frac{5}{2}=0\\
\Leftrightarrow\ &10x+y=1 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①
\end{aligned}
$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は直交するから

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(x\vec{b}+y\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-1)\vec{b}\cdot\vec{c}+y\left|\vec{c}\right|^2=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-1)\frac{5}{2}+16y=0\\
\Leftrightarrow\ &5x+32y=5 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②
\end{aligned}
$$

式①，②を連立して

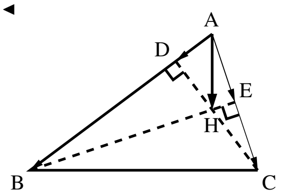
$$
\begin{cases}10x+y=1\\5x+32=5\end{cases}\iff\begin{cases}x=\dfrac{3}{35}\\y=\dfrac{1}{7}\end{cases}
$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{35}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}}$.

【解答 2：正射影ベクトル＆一次独立を使う】

(1) （【解答 1】と同じ）

(2) ベクトルの正射影を考え



$$
\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b}=\frac{\frac{5}{2}}{25}\vec{b}=\frac{1}{10}\vec{b}
$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

同様にして

$$
\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{5}{32}\vec{c} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②
$$

である．

まず，点 H は線分 BE 上にあるから，BH : HE = s :

$1-s$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{AH}} = (1-s)\vec{b} + \frac{5s}{32}\vec{c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

◀ ②より

また，点 H は線分 CD 上にあるから，CH : HD = t : $1-t$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\overrightarrow{\mathrm{AD}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{t}{10}\vec{b} + (1-t)\vec{c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

◀ ①より

いま，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立であるから，③，④より

$$\begin{cases} 1-s = \dfrac{t}{10} \\ \dfrac{5s}{32} = 1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10s + t = 10 \\ 5s + 32t = 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = \dfrac{32}{35} \\ t = \dfrac{6}{7} \end{cases}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{35}\vec{b} + \dfrac{1}{7}\vec{c}}$.

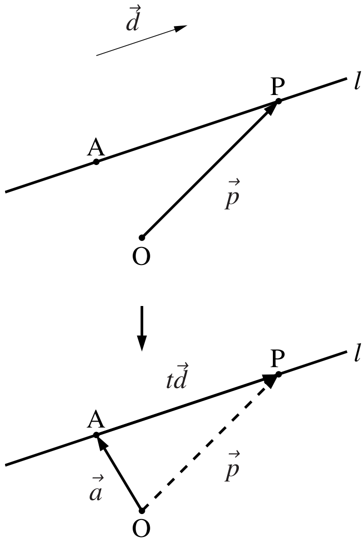
§ 5.5

ベクトル方程式

ここでは，ベクトルをもちいて，平面上の直線や円などの図形を表す方法について学んでいこう．

5.5.1　直線のベクトル方程式

■直線の通る 1 点と方向ベクトルが与えられたとき



点 A($\vec{a}$) を通り $\vec{0}$ でない $\vec{d}$ に平行な直線を l とする．このとき，この直線上を動く点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方を考えよう．

まず，点 P が直線 l 上にある限り，必ず $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \parallel \vec{d}$ であるから，ベクトルの平行条件 (p.123) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$$

となる実数 t が存在する．

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ はベクトルの分解 (p.121) を考えて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

つまり　$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$　…………………… ①

が成り立つ[*6]．

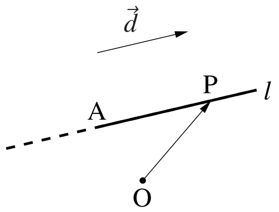
この①のことを，「点 A($\vec{a}$) を通り $\vec{d}$ に平行な直線の**ベクトル方程式** (vector equation)」といい，t をその**媒介変数** (parameter) という．また，$\vec{d}$ を，この直線の**方向ベクトル** (direction vector) という．

①で t がすべての実数をとって変化すれば，点 P は直線 l 上のすべての点を動く．また，t がある範囲で変化すれば，点 P は直線 l 上の一部の点を動く．

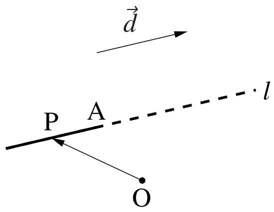
【例】

[*6] 感覚的には「O から P への向かう ($\vec{p}$) には，まず O から A への向かい ($\vec{a}$)，それから $\vec{d}$ 方向に進めばよい ($t\vec{d}$)」と理解できる．

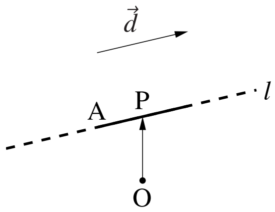
1) $0 \leqq t$ のとき



2) $t \leqq 0$ のとき



3) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき



次に，座標平面上で成分表示されたベクトルのベクトル方程式を考えてみよう．

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$ である直線上の点 P の座標を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから，①より

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = x_0 + d_x t \\ y = y_0 + d_y t \end{cases}$$

と表せる．これを，**t を媒介変数とする直線 l の方程式**という．

$d_x \fallingdotseq 0$ かつ $d_y \fallingdotseq 0$ のとき，この式から媒介変数 t を消去すると

$$(t =)\ \frac{x - x_0}{d_x} = \frac{y - y_0}{d_y}$$

$$\Leftrightarrow\ y = \frac{d_y}{d_x}(x - x_0) + y_0$$

となり，これは点 $(x_0,\ y_0)$ を通る傾き $\dfrac{d_y}{d_x}$ の直線の方程式として，FTEXT数学 II の『図形と方程式』ですでに学んだものと一致している．

【例題：直線のベクトル方程式〜その１〜】

以下のそれぞれについて，点 A を通り方向ベクトルを $\vec{d}$ とする直線 l の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ．また，媒介変数を用いない形で直線の方程式を表せ．

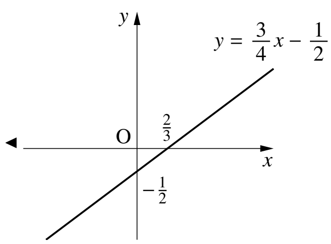
(1) $\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $\mathrm{A}(-1,\ 3)$，$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$　　(4) $\mathrm{A}(-2,\ 1)$，$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

【解答】

(1) $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + 4t} \\ \boldsymbol{y = 1 + 3t} \end{cases}$

上式と下式を t について解くと，$t = \dfrac{x-2}{4}$，$t = \dfrac{y-1}{3}$



となるから

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} \Leftrightarrow y-1 = \frac{3}{4}(x-2)$$

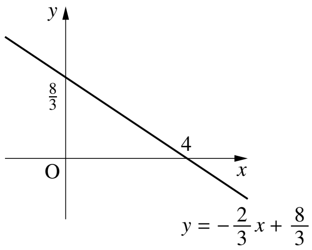
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}}.$$

(2) $\begin{cases} \boldsymbol{x = 4 - 3t} \\ \boldsymbol{y = 2t} \end{cases}$

上式と下式を t について解くと，$t = \dfrac{x-4}{-3}$，$t = \dfrac{y}{2}$ となるから

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2}{-3}(x-4)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}}.$$

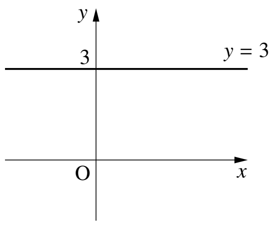
◀


(3) $\begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 3} \end{cases}$　上式と下式を t について解くと，

$t = \dfrac{x-4}{-3}$，$t = \dfrac{y}{2}$ となるから

t が変化すると x はすべての実数をとるが，y は常に 3 であるから

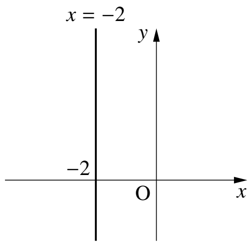
$\boldsymbol{y = 3}$　(x はすべての実数).

◀


(4) $\begin{cases} \boldsymbol{x = -2} \\ \boldsymbol{y = 1 - 3t} \end{cases}$

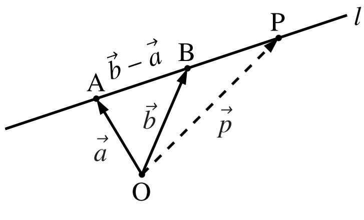
t が変化すると y はすべての実数をとるが，x は常に -2 であるから

$\boldsymbol{x = -2}$　(y はすべての実数).

◀


■直線の通る 2 点が与えられたとき

　異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線を l とする．このとき，l は点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ の直線であるから，l 上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に関するベクトル方程式は，p.151 の①より



$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$$

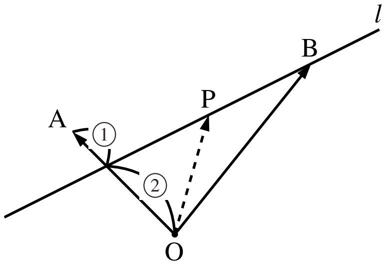
$$\Leftrightarrow \ \vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる．

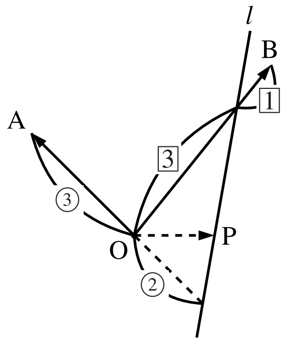
【例題：直線のベクトル方程式〜その２〜】

点 O に関する位置ベクトルを A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とする．以下のそれぞれについて，直線 l 上の点 P($\vec{p}$) に関するベクトル方程式を適当な実数 t を用いて表せ．

(1)



(2)



【解答】

(1) 線分 OA を 2 : 1 に内分する点を C とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{2}{3}\vec{a}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

◀ p.153 の①を使った

つまり

$$\boldsymbol{\vec{p} = \frac{2(1-t)}{3}\vec{a} + t\vec{b}}$$

と表せる．

(2) 線分 OA を 2 : 5 に外分する点を C，線分 OB を 3 : 1 に内分する点を D とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\dfrac{2}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{3}{4}\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

◀ p.153 の①を使った

つまり

$$\boldsymbol{\vec{p} = \frac{-2(1-t)}{3}\vec{a} + \frac{3t}{4}\vec{b}}$$

と表せる．

ここで，p.153 の①

$$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

は，$1 - t = s$ とおくことにより

$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}\ \ (s + t = 1)$ …………………… ①

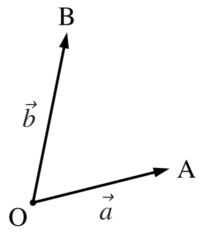
と表すこともできる．この s, t に適当な条件をつけることにより，半直線や領域などを表すベクトル方程式をつくることができる．

【例題：1 次結合で表された位置ベクトルの軌跡】

点 O に関する位置ベクトルを A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とし，点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

を満たし動くものとする．以下の場合について，点 P の動く範囲を図示せよ．



(1) $s > 0$ かつ $t > 0$　　(2) $s < 0$ かつ $t > 0$

(3) $\dfrac{5}{2}s + \dfrac{2}{3}t = 1$　　(4) $s + t = \dfrac{2}{3}$

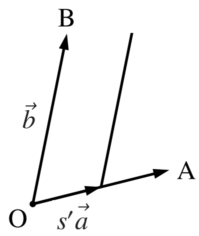
(5) $s > 0$ かつ $t > 0$ かつ $s + t < 1$

【解答】

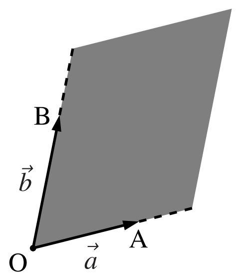
(1) まず，s をある定数 s' (> 0) で固定し

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\vec{a} + t\vec{b}\quad (t > 0)$$

を考えると，点 P は右図の半直線上にある．



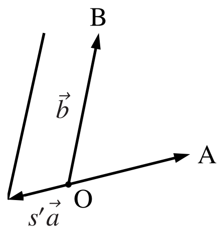
よって，s を動かすと答えは下図網掛け部分となる．



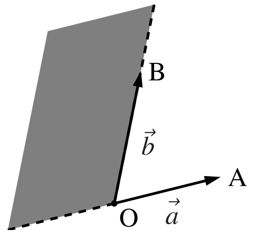
(2) まず，s をある定数 s' (> 0) で固定し

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\vec{a} + t\vec{b}\quad (t > 0)$$

を考えると，点 P は右図の半直線上にある．



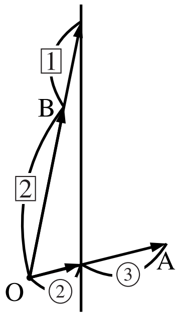
よって，s を動かすと答えは下図網掛け部分となる．



(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$$
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{5s}{2}\left(\frac{2}{5}\vec{a}\right) + \frac{2t}{3}\left(\frac{3}{2}\vec{b}\right)$$

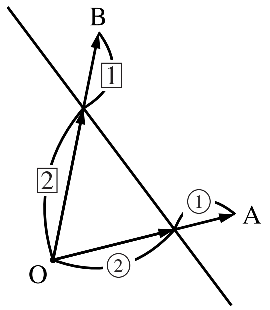
と変形でき，条件より $\dfrac{5s}{2} + \dfrac{2t}{3} = 1$ であるから，答えは下図の直線部分となる．



(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ は

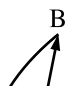
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$$
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3s}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a}\right) + \frac{3t}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{b}\right)$$

と変形でき，条件より $\dfrac{3s}{2} + \dfrac{3t}{2} = 1$ であるから，答えは下図の直線部分となる．



(5) まず，条件より $s > 0$, $t > 0$ であるから，点 P は (1) で求めた領域内にあることが必要．

次に，$s+t$ の値を k (< 1) で固定する，つまり $s+t = k$



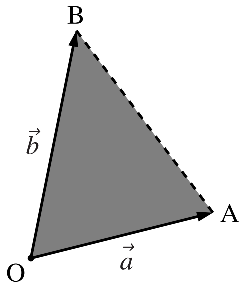
とすると，条件より $s>0,\ t>0$ であるから $k \fallingdotseq 0$ なので

$$
\begin{aligned}
& s+t=k \\
\Leftrightarrow\ & \frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1
\end{aligned}
$$

となり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ は

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{s}{k}\left(k\vec{a}\right)+\frac{t}{k}\left(k\vec{b}\right)
\end{aligned}
$$

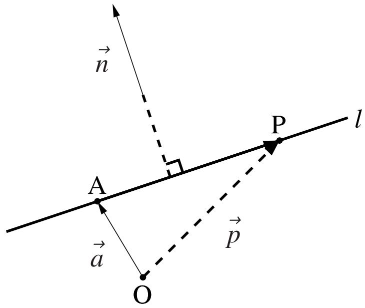
と変形できるので，点 P は
右上図の線分上を動く.
よって，$s+t$ の値を動かすと答えは下図網掛け部分となる.



■**直線の通る 1 点と法線ベクトルが与えられたとき**

点 $A(\vec{a})$ を通り $\vec{0}$ でない $\vec{n}$ に垂直な直線を l とする．このとき，この直線上を動く点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方を考えよう．

まず，点 P が直線 l 上にある限り，必ず $\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ であるから，ベクトルの垂直条件 (p.146) より



$$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$$

となる．

ここで，$\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$ であるから

$$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$$

つまり　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$　…………………… ①

が成り立つ．

この①のことを，「点 $A(\vec{a})$ を通り $\vec{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式」という．また，$\vec{n}$ を，この直線の**法線ベクトル** (normal vector) という．

次に，座標平面上で成分表示されたベクトルのベクトル方程式を考えてみよう．

点 $A(x_0,\ y_0)$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_x\\n_y\end{pmatrix}$ である直線上の点 P の座標を $P(x,\ y)$ とおくと，$\vec{a}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ であるから，①より

$$
\begin{aligned}
&(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}n_x\\n_y\end{pmatrix}=0\\
\Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_x\\n_y\end{pmatrix}=0\\
\Leftrightarrow\ &n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)=0
\end{aligned}
$$

と表せる．

ここで，n_x を a，n_y を b，$-(n_xx_0+n_yy_0)$ を c とおけば，この式は

$$ax+by+c=0$$

と書きなおされ，これはの直線の方程式として，FTEXT 数学 II『図形と方程式』ですでに学んだものと一致している．

また，このことから，直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトルの 1 つとして $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ が拾える．

【例題：直線のベクトル方程式〜その３〜】

次のそれぞれについて，点 A を通り法線ベクトルを $\vec{n}$ とする直線の方程式を求めよ．

(1) A(2, 1), $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$　　(2) A(4, 0), $\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

(3) A(−1, 3), $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$　　(4) A(−2, 1), $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

【解答】

直線 l 上を動く点 P の座標を $(x,\ y)$ とおく．

(1)
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0\\ \Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=0\\ \Leftrightarrow\ &4(x-2)+3(y-1)=0\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{4x+3y-11=0}\end{aligned}$$

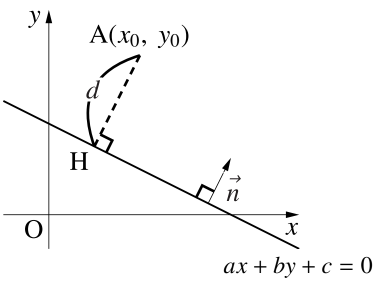
(2)
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0\\ \Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix}x-4\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}=0\\ \Leftrightarrow\ &-3(x-4)+2y=0\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{3x-2y-12=0}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0\\ \Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix}x-(-1)\\y-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=0\\ \Leftrightarrow\ &2(x+1)+0(y-3)=0\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{x+1=0}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0\\ \Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix}x-(-2)\\y-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}=0\\ \Leftrightarrow\ &0(x+2)-3(y-1)=0\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{y-1=0}\end{aligned}$$

【例題：点と直線の距離の公式】

直線 $l : ax + by + c = 0$ と点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ との距離 d を求めよ.



【解答】

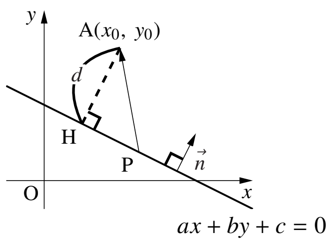
直線 l 上の点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とおくと，P の座標に関して

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ.

いま，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ を $\vec{n}$ に正射影したベクトル ${}_{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\to}\vec{n}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{HA}}$ と等しいので，この ${}_{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\to}\vec{n}$ の大きさが d となる.

◀



$$\begin{aligned}
{}_{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\to}\vec{n} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \frac{ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

◀ 正射影ベクトルの内積での表し方 (p.141)

◀ ①を使った

よって

$$\begin{aligned}
\left|{}_{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\to}\vec{n}\right| &= \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right|\sqrt{a^2 + b^2} \\
&= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} \\
&= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}
\end{aligned}$$

つまり，$\boldsymbol{d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$ となる.

ここで，直線のベクトル方程式をまとめておこう.

直線のベクトル方程式

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とし，P は直線上の任意の点で，s，t は実数の変数，$\vec{n}\neq\vec{0}$ とする．

1) 点 A を通り，OD に平行な直線

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$$

2) 2 点 A，B を通る直線

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b} \quad \text{または} \quad \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\ (s+t=1)$$

3) 点 A を通り，$\vec{n}$ に垂直な直線

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$$

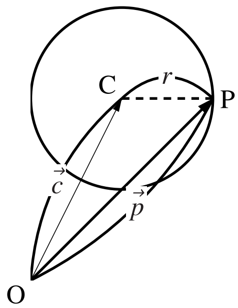
5.5.2　円のベクトル方程式

次に，点 O に関する位置ベクトルを用いて円を表す方法について考えてみよう．

■中心と半径が与えられたとき

点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ を中心とする，半径 r の円を C とする．このとき，この円周上を動く点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方を考えよう．

点 P が円 C 上にあるとき，線分 CP の長さは常に r となる，すなわち $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r$ となるから



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r$$

$$\Leftrightarrow\ \left|\vec{p}-\vec{c}\right|=r \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．この②を円 C のベクトル方程式という．

また，座標平面上で $\vec{c}$ が $\vec{c}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ と成分表示された場合，

$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおくと

$$\left|\vec{p}-\vec{c}\right|=r$$

$$\Leftrightarrow\ \left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|=r$$

$$\Leftrightarrow\ \left|\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\right|=r$$

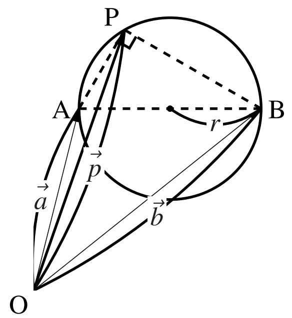
$$\Leftrightarrow\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$

$$\Leftrightarrow\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

となり，これは FTEXT 数学 II の『図形と方程式』で学習した円の方程式と一致する．

■直径の両端が与えられたとき

異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ と $\mathrm{B}(\vec{b})$ を直径の両端とするの円を C とする．このとき，この円周上を動く点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方を考えよう．



点 P が円 C 上にあるとき，線分 AP と BP は直交する，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$

$$\Leftrightarrow\ (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ③$$

が成り立つ．この③も円 C のベクトル方程式である．

また，座標平面上で $\vec{a}$ が $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$，$\vec{b}$ が $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$ と成分表示された場合，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおくと

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}x-a_x\\y-a_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-b_x\\y-b_y\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-a_x)(x-b_x)+(y-a_y)(y-b_y)=0$$

となり，これは 2 点 $\mathrm{A}(a_x,\ a_y)$，$\mathrm{B}(b_x,\ b_y)$ を直径とする円の方程式を表す．

【例題：円のベクトル方程式の別表記】

異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ と $\mathrm{B}(\vec{b})$ を直径の両端とする円を C とする．p.162 の③より，円 C のベクトル方程式は

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

であったが，円 C の中心の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，半径は $\dfrac{|\vec{b}-\vec{a}|}{2}$ となるので，p.161 の②より

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{2}$$

とも表される．

いま，この 2 式が等しくなることをベクトルの計算で証明せよ．

【解答】

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right| = \frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2 = \frac{|\vec{b}-\vec{a}|^2}{4}$$

◀ 両辺が正なので，2 乗しても同値が保たれる．

$$\Leftrightarrow |\vec{p}|^2 - \vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + \frac{|\vec{a}+\vec{b}|^2}{4} = \frac{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2}{4}$$

◀ $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$$\Leftrightarrow |\vec{p}|^2 - \vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b}) = 0$$

■

【例題：円のベクトル方程式】

平面上に定点 $A(\vec{a})$ があり，点 $P(\vec{p})$ が以下の式を満たしながら動くとき，P はどのような軌跡を描くか考えよ．

(1) $|\vec{p}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{p} = 4|\vec{a}|^2$　　(2) $|\vec{p}-\vec{a}| = 2|\vec{p}|$

【解答】

(1)
$$|\vec{p}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{p} + |\vec{a}|^2 = 4|\vec{a}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{p}-\vec{a}|^2 = 4|\vec{a}|^2$$

◀ ベクトルの計算での「平方完成」

$$\Leftrightarrow |\vec{p}-\vec{a}| = 2|\vec{a}|$$

よって, P は **A を中心とする半径2 × OA の円**を描く.

(2)
$$|\vec{p}-\vec{a}| = 2|\vec{p}|$$

$$\Leftrightarrow |\vec{p}-\vec{a}|^2 = 2|\vec{p}|^2$$

◀ 両辺正なので，2 乗しても同値は保たれる

$$\Leftrightarrow |\vec{p}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{p} + |\vec{a}|^2 = 4|\vec{p}|^2$$

◀ $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$$\Leftrightarrow 3|\vec{p}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{p} = |\vec{a}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{p}^2| + \frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{p} = \frac{1}{3}|\vec{a}|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{a}\right|^2 = \frac{4}{9}|\vec{a}|^2$$

◀ ベクトルの計算での「平方完成」

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{a}\right| = \frac{2}{3}|\vec{a}|$$

よって，P は $\mathbf{B}\left(-\frac{1}{3}\vec{a}\right)$ **を中心とする半径 $\frac{2}{3}$ × OA の円**を描く.

【例題：円の接線のベクトル方程式】

点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ を中心とする半径 r の円周上の点 $\mathrm{P}_0(\vec{p_0})$ における接線のベクトル方程式は，この接線上を動く点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ として

$$(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$

と表されることを示せ．

また，$\vec{c}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$，$\vec{p_0}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ としたとき，接線の方程式を求めよ．

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ のなす角を θ として，この 2 つのベクトルの内積を考えると

$$\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\mathrm{CP_0}\times\mathrm{CP}\times\cos\theta$$

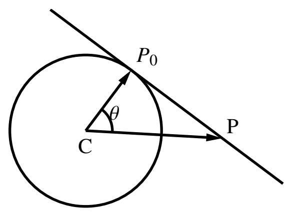
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{CP_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\mathrm{CP_0}^2$$

◀ $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}$ に正射影した

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{CP_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=r^2$$

◀

$$\Leftrightarrow\ (\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2 \qquad \blacksquare$$



接線の方程式は，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおき，いま得られた式に，

$\vec{c}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$，$\vec{p_0}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を代入して

$$(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}=r^2$$

$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)=r^2}$$

となる．

$\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}=0$ より $(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{p_0})=0$ もある．

以上，円のベクトル方程式をまとめておこう．

円のベクトル方程式

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とし，P は円周上の任意の点とする．

1) 中心 C，半径 r の円

$$\left|\vec{p} - \vec{c}\right| = r$$

2) 線分 AB を直径とする円

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

第6章 空間ベクトルの演算

§ 6.1 空間における点・直線・平面

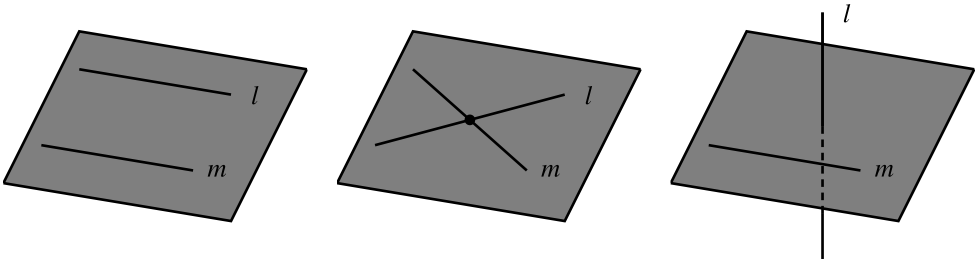
ここではまず，空間における直線や平面の位置関係についてまとめておく．

6.1.1 2 直線の位置関係

■2 直線の位置関係

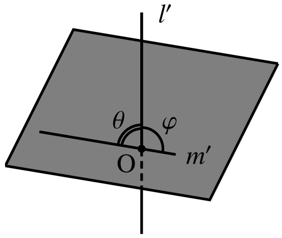
異なる 2 直線 l，m の位置関係には次の 3 つの場合がある．

1) **平行である**　　2) **1 点で交わる**　　3) **ねじれの位置にある**



1)，2) の場合は 2 直線は同じ平面上にあり，3) の場合は同じ平面上にない．

3) の場合，右の図のように，任意の 1 点 O を通り l，m にそれぞれ平行な直線 l'，m' をひくと，点 O のとり方に関係なく，2 つの角 θ，φ が決まる．$\theta+\varphi=180°$ となるので，片方の角度が決まればもう片方の角度も決まる．この 2 つの角のうち大きくないほう，すなわち $\theta \leqq \varphi$ のときの θ を 2 直線 l，m のなす角という．



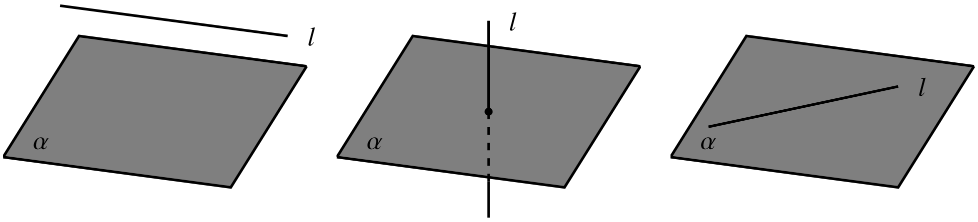
2)，3) の場合において，特に l，m のなす角が直角であるとき，l と m は垂直であるといい，$l \perp m$ と書く．さらに，垂直である 2 直線が交わるとき，直交するという．

6.1.2　直線と平面の位置関係

■直線と平面の位置関係

直線 l と平面 α の位置関係には，次の 3 つの場合がある．

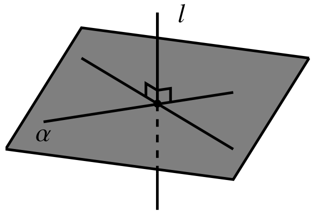
1) **平行である**　2) **1 点で交わる**　3) **l は α 上にある**



右図のように，直線 l が平面 α 上のすべての直線と垂直であるとき，l と α は垂直である，または直交するといい，$l \perp \alpha$ と表す．また，このとき，l を平面 α の垂線という．

実は，直線 l が平面 α 上の異なる 2 直線と垂直であれば，l は α 上のすべての直線と垂直となって，$l \perp \alpha$ となる．

平面 α 上にない点 A を通る α の垂線が，平面 α と交わる点 H を，点 A から平面 α におろした垂線の足という．

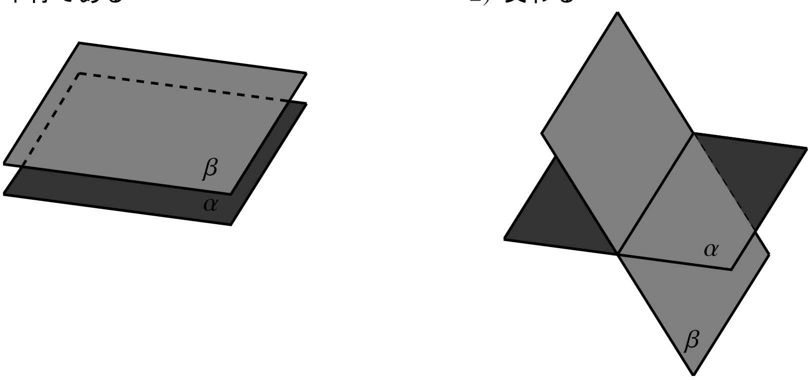


6.1.3　2 平面の位置関係

■2 平面の位置関係

異なる 2 平面 α，β の位置関係には，次の 2 つの場合がある．

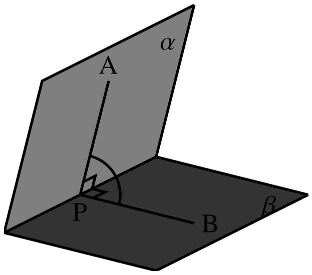
1) **平行である**　2) **交わる**



1) のように，2 平面 α，β が共有点をもたないとき，この 2 平面は平行であるといい，$alpha \parallel \beta$ とかく．

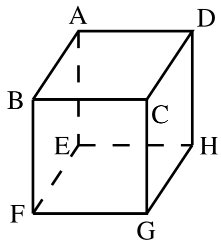
また，2) のように，2 つの平面 α，β が共有点をもつとき，この 2 平面はその共有点を含むある 1 つの直線を共有する．このとき，この 2 平面は交わるといい，この直線を α と β の交線という．

交わる 2 平面 α，β の交線上の点 P から交線に垂直な直線 PA，PB をそれぞれ α，β 上に引くと，P のとり方に関係なく $\angle$APB の大きさは一定となる．この角を 2 平面 α，β のなす角という．特に，$\angle\mathrm{APB} = 90^\circ$ のとき，α と β は直交する，または垂直であるといい，$\alpha\perp\beta$ と書く．



【例題：空間における点・直線・平面】

右図の立方体について，以下の問いに答えよ．



(1) AB と FH のなす角を求めよ．
(2) AB と FC のなす角を求めよ．
(3) BD と AH のなす角を求めよ．
(4) 平面 ABCD と平面 BFHD のなす角を求めよ．
(5) DF と平面 EFGH のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

【解答】

(1) AB と FH のなす角は，EF と FH のなす角と等しい．したがって，$\triangle$EFH は $1:1:\sqrt{2}$ の二等辺三角形なので，**45°** である．
(2) AB と FC のなす角は EF と FC のなす角と等しいので，**90°** である．
(3) BD と AH のなす角は BD と BG のなす角と等しい．したがって，$\triangle$BGD は正三角形なので，**60°** である．
(4) 図より，**90°** である．
(5) 立方体の 1 辺の長さを 1 とすると，$\mathrm{DF} = \sqrt{3}$，$\mathrm{FH} = \sqrt{2}$ であるから

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

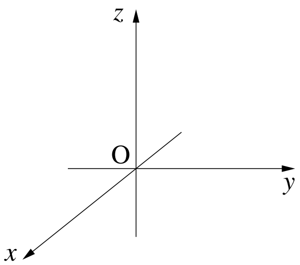
§ 6.2
空間座標

直線上の点や平面上の点を座標を用いて表す方法はすでに学んでいるので，ここでは空間における座標について考えてみよう．

6.2.1　空間での座標の表し方

■空間での座標の表し方

空間内に 1 点 O を定め，O で互いに直交する 3 つの直線 Ox，Oy，Oz を引く．これらの各直線を，O を原点とする数直線と考えたとき，Ox，Oy，Oz を**座標軸** (coordinate axis)，または**直交座標軸** (orthogonal axis) といい，座標軸定められた空間を**座標空間** (coordinate space) という．



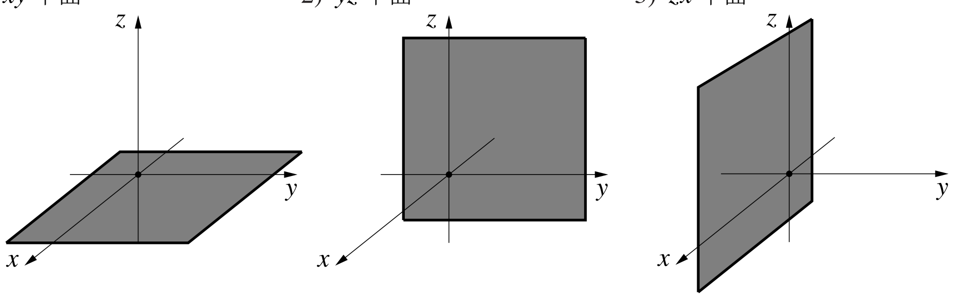
このときの O のことを座標空間の**原点** (limiting point) といい，数直線 Ox，Oy，Oz をそれぞれ，***x*** **軸** (x-axis)，***y*** **軸** (y-axis)，***z*** **軸** (z-axis) という．

また，下図に示すように

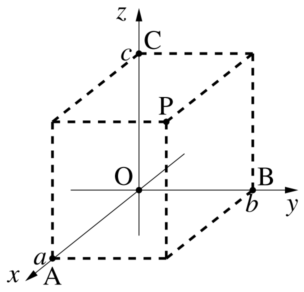
x 軸と y 軸を含む平面を ***xy*** **平面** (xy-plane)
y 軸と z 軸を含む平面を ***yz*** **平面** (yz-plane)
z 軸と x 軸を含む平面を ***zx*** **平面** (zx-plane)

という．

1) xy 平面　2) yz 平面　3) zx 平面



空間座標内のある点 P を通り，3 つの座標軸のそれぞれに直交する各平面が，x 軸，y 軸，z 軸と交わる点を，それぞれ A，B，C とし，その各座標軸上における座標を，それぞれ a，b，c とする．



このとき定まる 3 つの実数の組 $(a,\ b,\ c)$ を点 P の**座標** (coordinate) といい，a，b，c をそれぞれ点 P の **x 座標** (x-coordinate)，**y 座標** (y-coordinate)，**z 座標** (z-coordinate) という．点 P の座標が $(a,\ b,\ c)$ であるとき，**P(a, b, c)** と表す．

【例題：空間座標】

以下の問いに答えよ．

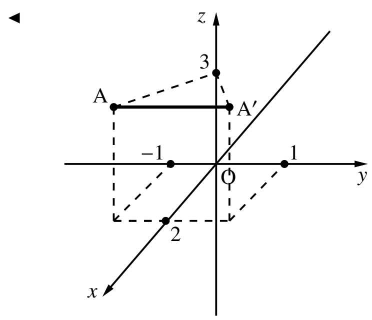
(1) A(2, −1, 3) と xz 平面について対称な点 A′ の座標を求めよ．

(2) A(3, −2, 4) と B(2, 0, 3) について，線分 AB の長さを求めよ．

【解答】

(1) 右図のように y 座標の符号が変化し，x，z 座標は不変であるから，A′ の座標は **(2, 1, 3)** である．

(2) $$\mathrm{AB} = \sqrt{(2-3)^2+(0+2)^2+(3-4)^2} = \boldsymbol{\sqrt{6}}$$



§ 6.3
空間ベクトルの定義

空間の場合にも，「ベクトルとは何か (p.107)」での考え方を拡張して，空間におけるベクトルを導入しよう．

6.3.1　空間ベクトルとは何か

■空間ベクトルの定義

空間内の有向線分 AB から，その“位置”を無視して“向き”と“大きさ”だけに着目したものを **(空間) ベクトル**といい，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表すことにする．

■空間ベクトルの相等

「平面上のベクトルの相等 (p.109)」と同じように，空間内でも 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の“向き”と“大きさ”が等しいとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

と書くことにし，このとき $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は**等しい**ということにする．

■空間ベクトルの大きさの表し方

空間ベクトルの場合にも，「ベクトルの大きさの表し方 (p.110)」と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ や $\vec{a}$ の大きさを，それぞれ

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|,\ |\vec{a}|$$

と表す．ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ は，(有向) 線分 AB の長さに等しい．

6.3.2　空間ベクトルの成分表示

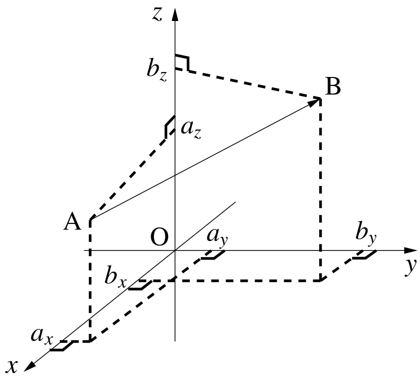
■空間ベクトルを成分で表す

「平面ベクトルを成分で表す (p.110)」と同じように，今度は座標空間内にあるベクトルの成分を用いた表し方についてみていこう．

右図のように，座標空間内に 2 点

$A(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$B(b_x,\ b_y,\ b_z)$

があるとき，$\overrightarrow{AB}$ を



x の増分 : $b_x - a_x$

y の増分 : $b_y - a_y$

z の増分 : $b_z - a_z$

を用いて，$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix}$ と表すことにする．

$b_x - a_x$ の値を **x 成分** (x-component)，$b_y - a_y$ の値を **y 成分** (y-component)，$b_z - a_z$ の値を **z 成分** (z-component) という．

■成分表示された空間ベクトルの相等

「成分表示された平面ベクトルの相等 (p.111)」は，空間ベクトルの場合にも拡張される．

一般に，2 つの $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ の相等に関して

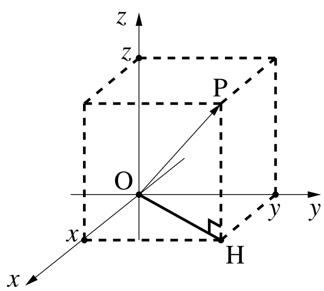
$$\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$$

が成り立つ．

■成分表示された空間ベクトルの大きさ

空間ベクトル $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の大きさは，線分 OP の長さである．いま，この線分の長さを求めてみよう．

点 P から，xy 平面に下ろした垂線の足を H とすると，H の座標は $(x,\ y,\ 0)$ であるから，三平方の定理より



$$OH^2 = x^2 + y^2$$

である．また，$\triangle POH$ は H を直角とする直角三角形であるから，再び三平方の定理より

$$OP^2 = OH^2 + PH^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

となり

$$\mathrm{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

と計算できる.

これより，2 点，$\mathrm{A}(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\mathrm{B}(b_x,\ b_y,\ b_z)$ 間の距離は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix}$ を用いて

$$\mathrm{AB} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

と計算できる.

§ **6.4**

空間ベクトルの演算

空間ベクトルの場合にも，平面ベクトル同様に演算を導入しよう．

6.4.1　空間ベクトルの加法

■ベクトルの加法の定義

「平面ベクトルの加法 (p.113)」と同じように，空間ベクトルの加法も定義する．

ベクトルの加法についての計算法則

1) 交換法則
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2) 結合法則
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

は，空間ベクトルの場合にもそのまま成り立つ．

また，逆ベクトル，ゼロベクトルも同様に定義する．

■成分表示された空間ベクトルの加法

成分表示された空間ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$ に関して，和 $\vec{a}+\vec{b}$ は

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\\a_z+b_z\end{pmatrix}$$

となる．

6.4.2　空間ベクトルの減法

■ベクトルの減法の定義

「平面ベクトルの減法 (p.116)」と同じように，空間ベクトルの減法も定義する．

■成分表示された平面ベクトルの減法

成分表示された空間ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$ に関して，差 $\vec{a}-\vec{b}$ は

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x-b_x\\a_y-b_y\\a_z-b_z\end{pmatrix}$$

となる．

6.4.3　ベクトルの実数倍

■ベクトルの実数倍の定義

「平面ベクトルの実数倍 (p.117)」と同じように，空間ベクトルの実数倍も定義する．

ベクトルの実数倍についての計算法則

1) 結合法則
$m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$

2) ベクトルの分配法則
$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$

3) 実数倍の分配法則
$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$

は，空間ベクトルの場合にもそのまま成り立つ．

また，単位ベクトルも同様に定義する．

■成分表示された空間ベクトルの実数倍

成分表示された空間ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$ に関して，実数倍 $m\vec{a}$ は

$$m\vec{a}=m\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ma_x\\ma_y\\ma_z\end{pmatrix}$$

となる．

■空間ベクトルの平行条件

2 つの空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の平行に関しても，平面の場合と同様に

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}=k\vec{b}\text{となる } k\in\mathbb{R}\text{ が存在する}$$

である．

また，成分表示された 2 つのベクトル，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$ と $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$ が平行であるとき

$$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kb_x\\kb_y\\kb_z\end{pmatrix} \iff \begin{cases}a_x=kb_x\\a_y=kb_y\\a_z=kb_z\end{cases} \iff \begin{cases}k=\dfrac{a_x}{b_x}\\k=\dfrac{a_y}{b_y}\\k=\dfrac{a_z}{b_z}\end{cases}$$

より $(k=)\ \dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$，つまり

$a_xb_y=a_yb_x$ かつ $a_yb_z=a_zb_y$[*1]

が成り立つ．

【例題：空間ベクトルの成分】

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$，$\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\left|\vec{b}\right|$ を求めよ．
(2) $2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ の成分を求めよ．
(3) $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ を求めよ．
(4) $\vec{x}+\vec{y}=2\vec{a}$，$2\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=2\vec{b}$，$\vec{x}+3\vec{y}+2\vec{z}=\vec{c}$ をみたす $\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ の成分を求めよ．
(5) $\vec{b}$ と反対向きの単位ベクトルを求めよ．

【解答】

(1) $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+3^2+(-4)^2}=\boldsymbol{\sqrt{29}}$

◀『成分表示された空間ベクトルの大きさ』(p.173)

(2)
$$\begin{aligned}2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}&=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2-2-6\\2-3+15\\2+4+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-6}\\\mathbf{14}\\\mathbf{18}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ を成分で表すと

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\9\\1\end{pmatrix}$$

[*1] この関係から $a_zb_x=a_xb_z$ も成り立つ

となるので

$$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right| = \sqrt{1^2+9^2+1^2} = \boldsymbol{\sqrt{83}}$$

◀『成分表示された空間ベクトルの大きさ』(p.173)

(4) $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ を連立方程式として考えると

$$\begin{cases} \vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 2\vec{x}+\vec{y}+\vec{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ \vec{x}+3\vec{y}+2\vec{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

① × 2 − ② より

$$\vec{y}-\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

③ × $\frac{1}{2}$ − ① × $\frac{1}{2}$ より

$$\vec{y}+\vec{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

④ + ⑤ より

$$2\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 13 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

④, ⑥ より $\boldsymbol{\vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{7}{4} \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}}$ である.

また, ①, ⑥ より $\boldsymbol{\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{9}{4} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}}$ である.

(5) (1) より，求めるベクトルは

$$-\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

【例題：空間ベクトルの平行条件】

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} z-1 \\ 2 \\ z+1 \end{pmatrix}$ のとき，$\vec{a} \parallel \vec{b}$ となることはあるか.

【解答】

もし，$\vec{a} \parallel \vec{b}$ ならば

空間ベクトルの平行条件 $a_x b_y = a_y b_x$ かつ $a_y b_z = a_z b_y$ つまり

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 = (-1) \cdot (z-1) & \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦ \\ -1 \cdot (z+1) = 5 \cdot 2 & \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧ \end{cases}$$

が成り立つはずである．だが，⑦ より $z = -3$，⑧ より $z = -11$ である．したがって，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行となることはない.

第 7 章

空間ベクトルと空間図形

§ 7.1

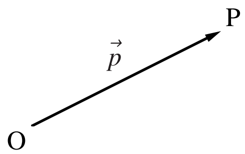
内分点・外分点の位置ベクトル

空間のベクトルの内分・外分点の位置ベクトルに関しても，「平面の内分点・外分点の位置ベクトル (p.128)」と同様に考えることができる．

7.1.1　空間内での位置ベクトル

■空間内での位置ベクトル

空間内でも平面上のときと同様にして，基準とする点 O をあらかじめ定めておくと，任意の点 P の位置は

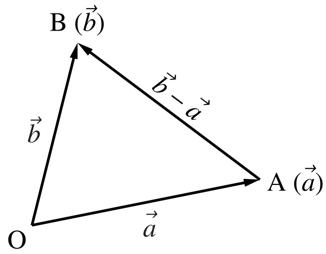


$$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

という $\vec{p}$ によって表すことができる．

この $\vec{p}$ を，点 O に関する点 P への位置ベクトルという．また，位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を，P $(\vec{p})$ と表す．

点 O に関して，2 点 A，B がそれぞれ，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ であるとき



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$$

と表される．

つまり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は「終点 B の位置ベクトルから，始点 A の位置ベクトルを引いた差」に等しい．

7.1.2　空間内での内分点・外分点の位置ベクトル

■内分・外分点の位置ベクトル

点 O に関して空間内の 2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) をとるとき，線分 AB を $m:n$ の比に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$，および外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$，m，n を用いて次のように表すことができる．

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n},\quad \vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

これより，2 点 A(a_x, a_y, a_z)，B(b_x, b_y, b_z) を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を P，外分する点を Q とすると，点 P，Q の座標は次のようになる．

$$\mathrm{P}\left(\frac{na_x+mb_x}{m+n},\ \frac{na_y+mb_y}{m+n},\ \frac{na_z+mb_z}{m+n}\right)$$
$$\mathrm{Q}\left(\frac{-na_x+mb_x}{m-n},\ \frac{-na_y+mb_y}{m-n},\ \frac{-na_z+mb_z}{m-n}\right)$$

■空間内の三角形の重心

点 O に関して空間内の 3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) をとるとき，△ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて次のように表すことができる．

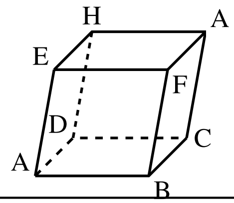
$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

これより，3 点 A(a_x, a_y, a_z)，B(b_x, b_y, b_z)，C(c_x, c_y, c_z) を結んでできる空間内の三角形の重心を G とすると，点 G の座標は次のようになる．

$$\mathrm{G}\left(\frac{a_x+b_x+c_x}{3},\ \frac{a_y+b_y+c_y}{3},\ \frac{a_z+b_z+c_z}{3}\right)$$

【例題：空間内の三角形の重心】

右図のような平行六面体において，△EDB, △FAC, △CFH, △DGE の重心をそれぞれ，G_1，G_2，G_3，G_4 とするとき，この 4 点は平行四辺形をなすことを証明せよ．



【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とすると，G_1，G_2，G_3，G_4 の位置ベクトル，$\vec{g}_1$，$\vec{g}_2$，$\vec{g}_3$，$\vec{g}_4$ は

$$\vec{g}_1=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

◀『空間内の三角形の重心』(p.**??**)

$$\vec{g}_2=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

◀『空間内の三角形の重心』(p.**??**)

$$\vec{g_3} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

◀『空間内の三角形の重心』(p.??)

$$\vec{g_4} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

◀『空間内の三角形の重心』(p.??)

となり

$$\overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}} = \vec{g_2} - \vec{g_1} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

◀『空間内での位置ベクトル』(p.181)

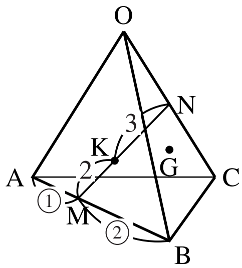
$$\overrightarrow{\mathrm{G_3G_4}} = \vec{g_4} - \vec{g_3} = -\frac{1}{3}\vec{a}$$

◀『空間内での位置ベクトル』(p.181)

であるから，平行四辺形をなすことがわかる．■

【例題：内分点・外分点の位置ベクトル】

四面体 O-ABC で，AB を 1 : 2 に内分する点を M，OC の中点を N，MN を 2 : 3 に内分する点を K，△OBC の重心を G とするとき，3 点 A，K，G は同一直線上にあることを示せ．



【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

◀『空間内での内分点・外分点の位置ベクトル』(p.182)

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

◀『空間内の三角形の重心』(p.??)

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OM}} + 2\overrightarrow{\mathrm{ON}}}{5} = \frac{1}{5}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

◀『空間内での内分点・外分点の位置ベクトル』(p.182)

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{5}(-3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{3}(-3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ となるので，A，K，G は一直線上にある．■

§ 7.2 空間ベクトルの 1 次独立

1 次独立な空間ベクトルに関しても，「1 次独立な平面ベクトルに関する定理 (p.135)」と同様に考えることができる．

7.2.1　ベクトルの 1 次結合の定義

■ベクトルの 1 次結合の定義

2 つの $\vec{a}$，$\vec{b}$ に関する 1 次結合は，「ベクトルの 1 次結合の定義 (p.134)」で見たように，適当な実数 s，t を用いて

$$s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表されるベクトルのことであった．

ここでは，これを拡張して，3 つの $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に関する 1 次結合を次のように定義する．

1 次結合の定義

3 つのベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に対して，適当な実数 s，t，u を用いて

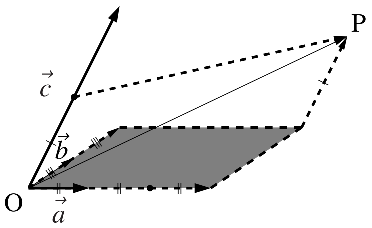
$$s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$$

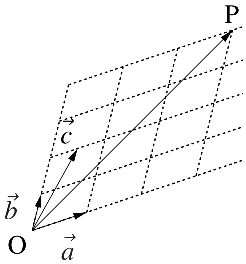
と表されるベクトルのことを，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の 1 次結合という．

たとえば，右図の空間において $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の 1 次結合で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

とただ 1 通りに表せる．





また，左図の平面おいて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の 1 次結合で表すと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= 4\vec{a} + 0\vec{b} + 2\vec{c}\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= 6\vec{a} + 4\vec{b} + 0\vec{c}\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= 5\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}\\ &\vdots\end{aligned}$$

などいろいろな方法で表せる．

7.2.2　ベクトルの 1 次独立の定義

■ベクトルの 1 次独立の定義

2 つの $\vec{a}$，$\vec{b}$ が 1 次独立であることの定義は，「ベクトルの 1 次独立の定義 (p.134)」で見たように

$$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$$

を満たす実数 s，t が $s=t=0$ のときに限る，ことであった．

ここでは，これを拡張して，3 つの $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に関する 1 次独立を次のように定義する．

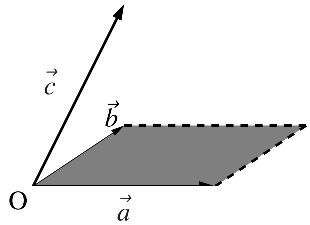
1 次独立の定義

「$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が **1 次独立**である」とは

$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=\vec{0}$$

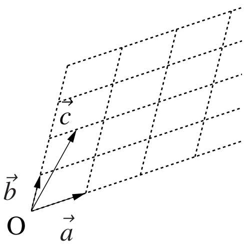
を満たす実数 s，t，u が $s=t=u=0$ のときに限る，ことである．

たとえば，右図のように空間内にある $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ では



$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=\vec{0}$$

となる s，t は $s=t=u=0$ のときに限られるので，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立である．



また，左図のように同一平面上にある $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$（$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$ を満たす）では，$s=t=u=0$ のとき以外にも，たとえば $s=-1$，$t=-2$，$u=1$ のときや，$s=2$，$t=4$，$u=-2$ のときも

$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=\vec{0}$$

を満たすので，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるとはいえない．

つまり，次のようなことがいえる．

1 次独立なベクトルと平行でないベクトル

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が 1 次独立であるならば，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は同一平面内にない．逆に，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が同一平面になければ，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立である．
つまり

「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 1 次独立」$\Longleftrightarrow$ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$が同一平面内にない

である．

証明は省略．

7.2.3　1 次独立な空間ベクトルに関する定理

■1 次独立な空間ベクトルに関する定理

2 つの 1 次独立なベクトルの 1 次結合に関して，「1 次独立な平面ベクトルに関する定理 (p.135)」が成り立った．ここでは，これを拡張した，3 つの 1 次独立なベクトルの 1 次結合に関する次の定理を示す．

1 次独立な空間ベクトルに関する定理

ある $\vec{p}$ が，1 次独立な $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の 1 次結合で

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$$
$$\vec{p} = s'\vec{a} + t'\vec{b} + u'\vec{c}$$

と 2 通りに表されたとする．このとき

$$\begin{cases} s = s' \\ t = t' \\ u = u' \end{cases}$$

が成り立つ．つまり，$\vec{p}$ は 1 通りでしか表せない．

【証明】

$\vec{p}$ は

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = s'\vec{a} + t'\vec{b} + u'\vec{c}$$

と表されるので

$$\begin{aligned} & s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = s'\vec{a} + t'\vec{b} + u'\vec{c} \\ \Leftrightarrow\ & (s - s')\vec{a} + (t - t')\vec{b} + (u - u')\vec{c} = \vec{0} \end{aligned}$$

ここで，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから，その定義より

$$\begin{cases} s - s' = 0 \\ t - t' = 0 \\ u - u' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s = s' \\ t = t' \\ u = u' \end{cases}$$

■

【例題：空間内の直線の交点の位置ベクトル】

空間内の四面体 OABC において，辺 AB の中点を E，辺 OC を 2 : 1 に内分する点を F，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を P とする．また，Q を辺 BC 上の点とする．線分 EF と PQ のが交点 X をもつとき，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ．

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく.

まず，X は線分 EF 上にあるから，EX : XF $= s : 1-s$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+s\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-s)\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+s\cdot\frac{2}{3}\vec{c}$$
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{1-s}{2}\vec{a}+\frac{1-s}{2}\vec{b}+\frac{2s}{3}\vec{c}\qquad\cdots\cdots\cdots ①$$

◀『内分点の位置ベクトル』(p.182

と表すことができる.

また，X は線分 PQ 上にあるから，PX : XQ $= t : 1-t$ とおき，また，点 Q について BQ : QC $= u : 1-u$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-t)\cdot\frac{1}{3}\vec{a}+t\cdot\left\{(1-u)\vec{b}+u\vec{c}\right\}$$
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{1-t}{3}\vec{a}+t(1-u)\vec{b}+tu\vec{c}\qquad\cdots\cdots\cdots ②$$

◀『内分点の位置ベクトル』(p.182)

と表すことができる.

いま，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立であるから，①，②より

$$\begin{cases}\dfrac{1-s}{2}=\dfrac{1-t}{3}\\ \dfrac{1-s}{2}=t(1-u)\\ \dfrac{2s}{3}=tu\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}3-3s=2-2t\\ \dfrac{1-s}{2}=t-tu\\ \dfrac{2s}{3}=tu\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}t=\dfrac{3s-1}{2}\\ \dfrac{3-3s}{6}=t-tu\\ \dfrac{4s}{6}=tu\end{cases}$$

以下，連立方程式

$$\begin{cases}t=\dfrac{3s-1}{2} & \cdots\cdots\cdots ③\\ \dfrac{3-3s}{6}=t-tu & \cdots\cdots\cdots ④\\ \dfrac{4s}{6}=tu & \cdots\cdots\cdots ⑤\end{cases}$$

を解く.

まず，④ + ⑤ より

$$t = \frac{3+s}{6}$$

これを③に代入して

$$\frac{3+s}{6} = \frac{3s-1}{2} \Leftrightarrow 6+2s = 18s-6$$
$$\therefore s = \frac{3}{4}$$

これと④より，$t = \frac{5}{8}$ である．これらと⑤より，$u = \frac{4}{5}$ となる．

よって

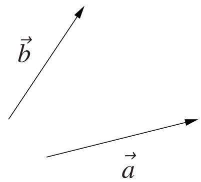
$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \boldsymbol{\frac{1}{8}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}}$$

§ 7.3
空間ベクトルの内積

平面ベクトルの場合と同じように，空間ベクトルでもベクトルの内積を定義する．

7.3.1　空間ベクトルの正射影

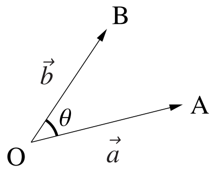
■ベクトルのなす角の定義



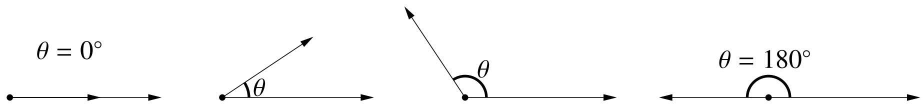
まず平面ベクトルの場合 (p.139) と同じように，空間ベクトルでもベクトルのなす角を定義する．

$\vec{0}$ でない 2 つの空間ベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，点 O を始点として

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ,\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

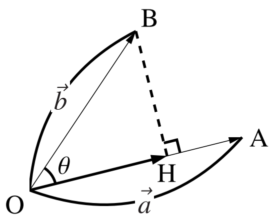


となるように点 A，B をとる．このとき，∠AOB の大きさ θ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ によって決まる．この θ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角とする．



なす角の取り得る範囲は，平面ベクトルの場合と同様に $0° \leqq \theta \leqq 180°$ となる．

■ベクトルの正射影と有向距離



平面ベクトルの場合 (p.139) と同じように，空間ベクトルでもベクトルの正射影と有向距離を定義する．

$\vec{0}$ でない 2 つの空間ベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，点 O を始点として

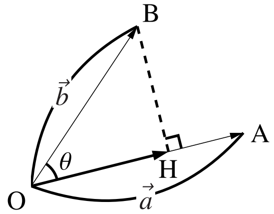
$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ,\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となるように点 A，B をとる．

いま，右図の点 B からから直線 OA に下ろした垂線の足を H とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトルといい ${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ と表す．正射影ベクトル ${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ とそのなす角 θ を用いて次のように表すことができる．

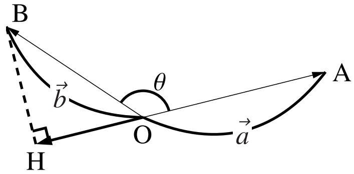
1) **$0° \leqq \theta \leqq 90°$** のとき

$$\begin{aligned}{}_{\vec{b}\to}\vec{a} &= \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}\cos\theta}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}\end{aligned}$$



2) **$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき**

$$\begin{aligned}{}_{\vec{b}\to}\vec{a} &= -\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\frac{\mathrm{OB}\cos(180^\circ-\theta)}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}\end{aligned}$$



つまり，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で ${}_{\vec{b}\to}\vec{a} = \dfrac{\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}$ と表せる．この $\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ の値のことを，${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の**有向距離**または**符号付長さ**という．

なお，${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の大きさは

$$\left|{}_{\vec{b}\to}\vec{a}\right| = \left|\frac{\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}\right| = \frac{\left|\vec{b}\cos\theta\right|}{\cancel{\left|\vec{a}\right|}}\cancel{\left|\vec{a}\right|} = \left|\vec{b}\cos\theta\right|$$

で表される．

7.3.2　ベクトルの内積

■ベクトルの内積の定義

平面ベクトルの場合 (p.140) と同じように，空間ベクトルでもベクトルの内積を定義する．

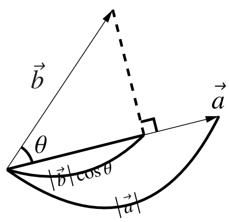
任意の 2 つの空間ベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して**内積**という演算 $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}$ を次のように定義する．

1) **$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき**

「$\vec{a}$ の大きさに，${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ の有向距離をかけたもの」，すなわち

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \times \left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

とする．ここで，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角である．



2) **$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のとき**

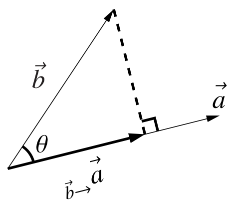
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

とする．

■空間の正射影ベクトルの内積での表し方

平面ベクトルの場合 (p.141) と同じように，空間ベクトルでも同様な形で，正射影ベクトルを内積で表すことができる．

$\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトル ${}_{\vec{b}\to}\vec{a}$ は



$$
\begin{aligned}
{}_{\vec{b}\to}\vec{a} &= \frac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\vec{a} \\
&= \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|^2}\vec{a} \qquad \because \text{分母分子に } |\vec{a}| \text{ をかけた} \\
&= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} \qquad \because \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta
\end{aligned}
$$

と表すことができる.

■内積の計算法則

平面ベクトルの場合 (p.141) と同じように，空間ベクトルの内積でも，次のような計算法則が成り立つ.

内積に関する計算法則

1) 交換法則
   $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
2) 結合法則
   $\vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
3) 分配法則
   $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
4) $\vec{a}\cdot\vec{a} \geqq 0$

【証明】は p.141 と同様.

■成分表示された空間ベクトルの内積

成分表示された 2 つの空間ベクトル，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ の内積について考えてみよう.

まず，$\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，それぞれのベクトルの大きさは 1 であり，どの 2 つのベクトルのなす角も 90° であるから

$$|\vec{e_x}| = |\vec{e_y}| = |\vec{e_y}| = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\vec{e_x}\cdot\vec{e_y} = 0\,,\ \vec{e_y}\cdot\vec{e_z} = 0\,,\ \vec{e_z}\cdot\vec{e_x} = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ.

ここで，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\a_z\end{pmatrix}=a_x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+a_z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

であるから，$\vec{a}$ を $\vec{e_x}$，$\vec{e_y}$，$\vec{e_z}$ に分解すると

$$\vec{a}=a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y}+a_z\vec{e_z} \quad \cdots\cdots ③$$

となる．

同様にして

$$\vec{b}=b_x\vec{e_x}+b_y\vec{e_y}+b_z\vec{e_z} \quad \cdots\cdots ④$$

となる．

よって，③，④より

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y}+a_z\vec{e_z})\cdot(b_x\vec{e_x}+b_y\vec{e_y}+b_z\vec{e_z})\\&=a_xb_x\left|\vec{e_x}\right|^2+a_yb_y\left|\vec{e_y}\right|^2+a_zb_z\left|\vec{e_z}\right|^2 && \because ②\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z && \because ①\end{aligned}$$

となる．

【例題：空間ベクトルの内積】

次の 2 つのベクトルの内積の値とそのなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ．

(1) $(-1,\ -2,\ 1)$，$(1,\ -1,\ 2)$

(2) $(1,\ 0,\ -1)$，$(1,\ 2,\ -2)$

【解答】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\cdot1-2\cdot(-1)+1\cdot2=\mathbf{3}$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ であるので，

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{3}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}\\&=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+0\cdot2-1\cdot(-2)=\mathbf{3}$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ であるので，

$$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$

■空間ベクトルの垂直条件

平面ベクトルの場合 (p.146) と同じように，空間ベクトルでもベクトルの垂直を定義する．

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 90° とき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直であるといい，$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}}$ と表す．また，$\vec{0}$ はすべてのベクトルに対し垂直と定める．

このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ となる．逆に，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ならば $\vec{a}\perp\vec{b}$ といえる．つまり

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

である．

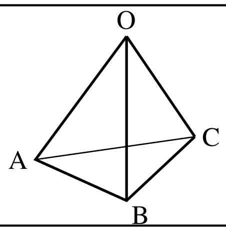
また，成分表示された 2 つのベクトル，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ が垂直であるとき

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$$

が成り立つ．

【例題：空間ベクトルの垂直条件】

正四面体 O-ABC で，OA⊥OB が垂直であることを証明せよ．



【解答】

正四面体であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

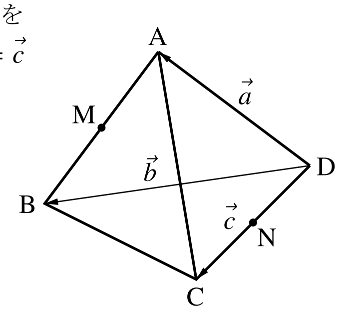
より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$$

以上から，OA⊥OB であることが示せた．　■

【例題：空間ベクトルの内積と垂直条件】

1 辺の長さ 2 の正四面体 ABCD がある．AB の中点を M，CD の中点を N とする．$\overrightarrow{\mathrm{DA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．



(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(3) MN⊥AB であることを証明せよ．

(4) $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ を求めよ．

(5) $\overrightarrow{\mathrm{DM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ のなす角の余弦を求めよ．

【解答】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 2\cdot\cos 60^\circ = \mathbf{2}$

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{DN}} - \overrightarrow{\mathrm{DM}}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}-\vec{a}$ であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}\Big)$$

ここで，(1) と ABCD が正四面体であることから，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 2$ であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}(-2+4-4+2+2-2) = 0$$

したがって，MN⊥AB である． ■

(4)
$$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2 + 2\Big(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}\Big)$$
$$= 4+4+4+2(2+2+2) = 24$$

したがって，$\boldsymbol{\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right| = 2\sqrt{6}}$ である．

(5) △DAB は正三角形であり，M が AB の中点であることから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DM}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

となり，また

$$\overrightarrow{\mathrm{DM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}\right) = 2$$

である．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{DM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{DM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{DM}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right|} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

§ 7.4
ベクトルの外積

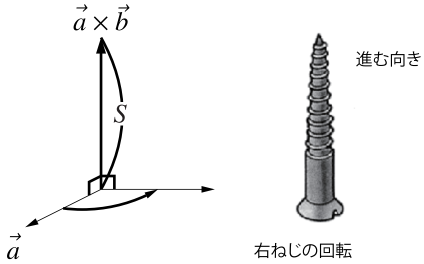
剛体の運動や，電磁気現象などを記述するには，ここで学ぶベクトルの計算が役に立つ．以下ではその計算方法について学んでいこう．

7.4.1　ベクトルの外積

■ベクトルの外積の定義

任意の 2 つのベクトル，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して**外積**という演算 $\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b}}$ を次の

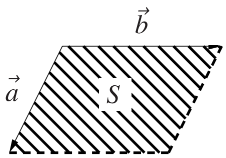
1) $\boldsymbol{\vec{a} \neq \vec{0}}$ **かつ** $\boldsymbol{\vec{b} \neq \vec{0}}$ **のとき**
   $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を含む平面内で，$\vec{a}$ の向きから $\vec{b}$ の向きへの回転を考える．$\vec{a}\times\vec{b}$ は，このような回転により右ねじが進む向きをもつベクトルであり，大きさは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ によって張られる平行四辺形の大きさとする．



2) $\boldsymbol{\vec{a} = \vec{0}}$ **または** $\boldsymbol{\vec{b} = \vec{0}}$ **のとき**

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$$

とする．



■外積の計算法則

ベクトルの外積に関して，次の計算法則が成り立つ．

外積に関する計算法則

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
2) 結合法則
   $\vec{a}\times(k\vec{b}) = k(\vec{a}\times\vec{b})$
3) 分配法則
   $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

【証明】

ゼロベクトルを含む場合の成立は明らかなので，以下ベクトルはすべてゼロベクトルでないとする．

1) まず，$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}\times\vec{a}$ の大きさは，共に $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積であり等しい．

また，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ右ねじを回して進む向きと，$\vec{b}$ から $\vec{a}$ へ右ねじを回して進む向きはちょうど逆になるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}\times\vec{a}$ は互いに逆ベクトルとなり

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

が成り立つ．■

2) $k=0$ のときの成立は明らかなので，それ以外の場合について証明する．

$k>0$ のとき

まず，$\vec{a}\times(k\vec{b})$ と $k(\vec{b}\times\vec{a})$ の大きさは，共に $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積を k 倍したものであり等しい．

また，$k\vec{b}$ と $\vec{b}$ は同じ向きを向いているから，$\vec{a}$ から $k\vec{b}$ へ右ねじを回して進む向きと，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ右ねじを回して進む向きは等しくなる．

$k<0$ のとき

まず，$\vec{a}\times(k\vec{b})$ と $k(\vec{b}\times\vec{a})$ の大きさは，共に $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積を $-k$ 倍したものであり等しい．

また，$k\vec{b}$ と $\vec{b}$ は逆を向いているから，$\vec{a}$ から $k\vec{b}$ へ右ねじを回して進む向きと，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ右ねじを回して進む向きは逆になり，$\vec{a}\times\vec{b}$ を k 倍することにより，結局同じ向きを向く

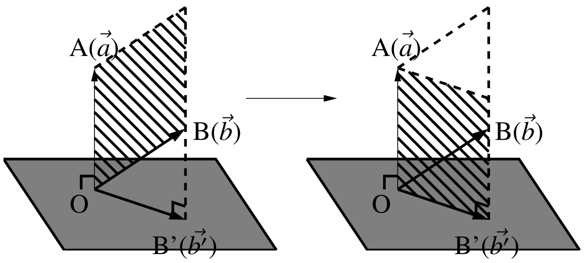
以上から，任意の実数 k に対して

$$\vec{a}\times(k\vec{b}) = k(\vec{a}\times\vec{b})$$

が成り立つ．

3) まず準備として，$\vec{a}\times\vec{b}$ について少し考察しておく．

右図のように，$\vec{a}$，$\vec{b}$，および $\vec{a}$ に垂直な平面に $\vec{b}$ を正射影した $\vec{b}'$ を考える．

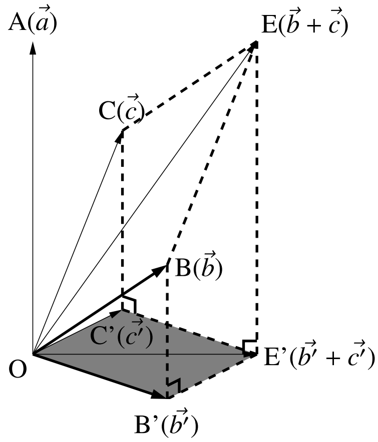


このとき，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ右ねじを回して進む向きと，$\vec{a}$ から $\vec{b}'$ へ右ねじを回して進む向きは等しい．また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積と，$\vec{a}$ と $\vec{b}'$ で張られる平行四辺形の面積も等しい．つまり

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}'$$

が成り立つ．

次に，$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$ について考える．

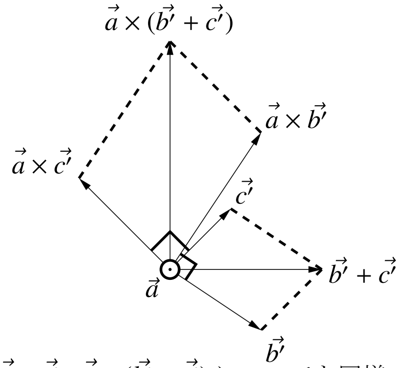


右図のように，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，および $\vec{b}+\vec{c}$ をとる．さらに，$\vec{a}$ に垂直な平面にそれらを正射影した，$\vec{b}'$，$\vec{c}'$，および $(\vec{b}+\vec{c})'$ をとる．ここで，$(\vec{b}+\vec{c})'$ は，$\vec{b}'$ と $\vec{c}'$ の和になっているので，$(\vec{b}+\vec{c})' = \vec{b}'+\vec{c}'$ である．

このとき, さきほどの話から $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})'$，つまり

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times(\vec{b}'+\vec{c}')$$

が成り立つ．



この図を上からのぞき込んでみると，右図のようになる．

このとき，たとえば $\vec{a}\times\vec{b}'$ は，$\vec{a}$ から $\vec{b}'$ に右ねじを回して進む向きをもち，$\vec{a}$ と $\vec{b}'$ で張られる平行四辺形（長方形）の面積を大きさにもつベクトルである．

いいかえると，$\vec{a}\times\vec{b}'$ は，$\vec{b}'$ を $\vec{a}$ に垂直な平面内で反時計回りに 90° 回転させた向きをもち，$|\vec{b}'|$ の $|\vec{a}|$ 倍の大きさをもつベクトルである．これは，$\vec{a}\times\vec{c}'$，$\vec{a}\times(\vec{b}'+\vec{c}')$ についても同様に考えることができ，$\vec{a}\times(\vec{b}'+\vec{c}')$ は，$\vec{a}\times\vec{b}'$ と $\vec{a}\times\vec{c}'$ で張られる平行四辺形の対角線を表すベクトルとなる．

このことから

$$\vec{a}\times(\vec{b}'+\vec{c}') = \vec{a}\times\vec{b}'+\vec{a}\times\vec{c}'$$

が成り立ち，$\vec{a}\times\vec{b}'$，$\vec{a}\times\vec{c}'$ がそれぞれ $\vec{a}\times\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{c}$ と等しくなることに注意すると

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

がいえる．■

■外積の成分表示

成分表示された 2 つのベクトル，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$ の外積について考えてみよう．

まず，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{e_x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e_y}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e_z}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ を用いて

$$\vec{a} = a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y}+a_z\vec{e_z}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{e_x} + b_y\vec{e_y} + b_z\vec{e_z}$$

と分解できる．

$\vec{e_x}\times\vec{e_x}=\vec{0}$，$\vec{e_y}\times\vec{e_y}=\vec{0}$，$\vec{e_z}\times\vec{e_z}=\vec{0}$ であることに注意して，$\vec{a}\times\vec{b}$ を計算していくと

$$\begin{aligned}
&\vec{a}\times\vec{b}\\
=&(a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y}+a_z\vec{e_z})\times(b_x\vec{e_x}+b_y\vec{e_y}+b_z\vec{e_z})\\
=&a_xb_y(\vec{e_x}\times\vec{e_y})+a_xb_z(\vec{e_x}\times\vec{e_z})+a_yb_x(\vec{e_y}\times\vec{e_x})+a_yb_z(\vec{e_y}\times\vec{e_z})+a_zb_x(\vec{e_z}\times\vec{e_x})+a_zb_y(\vec{e_z}\times\vec{e_y})\\
=&a_xb_y(\vec{e_z})+a_xb_z(-\vec{e_y})+a_yb_x(-\vec{e_z})+a_yb_z(\vec{e_x})+a_zb_x(\vec{e_y})+a_zb_y(-\vec{e_x})\\
=&(a_yb_z-a_zb_y)\vec{e_x}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{e_y}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{e_z}
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}$$

が成立する．

【例題】外積の成分計算

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}$ とする．

(1) $\vec{a}\times\vec{b}$ を成分で表せ．

(2) $\vec{a}\times\vec{b}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ それぞれと垂直になっていることを，内積を計算することによって確かめよ．

【解答】

(1)

x 成分：$1\cdot 3-(-4)\cdot 5=23$

y 成分：$5\cdot(-1)-3\cdot(-2)=1$

z 成分：$(-2)\cdot(-4)-(-1)\cdot 1=9$

より，$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}\mathbf{23}\\\mathbf{1}\\\mathbf{9}\end{pmatrix}$.

◀ $\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}$

(2) まず

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$$

$$=\begin{pmatrix}23\\1\\9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}=23\cdot(-2)+1\cdot1+9\cdot5=0$$

◀ $\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

となり，確かに $\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{a}$ は垂直となっている．また

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}$$
$$=\begin{pmatrix}23\\1\\9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}=23\cdot(-1)+1\cdot(-4)+9\cdot3=0$$

◀ $\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

となり，確かに $\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}$ も垂直となっている．■

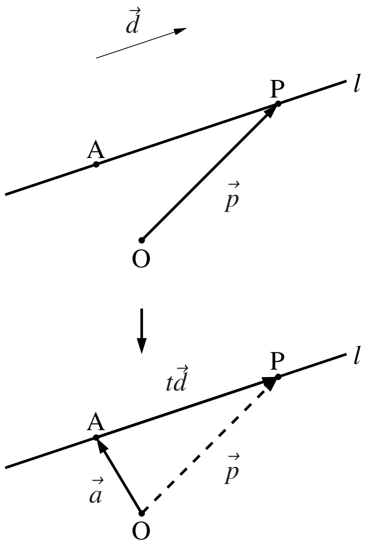
§ **7.5**

ベクトル方程式

7.5.1　直線のベクトル方程式

ここでは，点 O に関する位置ベクトルを用いて空間内での直線を表す方法について考えてみよう．

■直線の通る 1 点と方向ベクトルが与えられたとき



空間内の点 A$(\vec{a})$ を通り $\vec{0}$ でない $\vec{d}$ に平行な直線を l とする．このとき，この直線上を動くの点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方は，平面内の場合と全く同様で次のようになる．

まず，点 P が直線 l 上にある限り，必ず $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \parallel \vec{d}$ であるから，空間ベクトルの平行条件 (p.176) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$$

となる実数 t が存在する．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

つまり　$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$　……………………… ①

が成り立つ

次に，座標空間内で成分表示されたベクトルのベクトル方程式を考えてみよう．

点 A$(x_0. y_0, z_0)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$ である直線上の点 P の座標を P(x, y, z)

とおくと，$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ であるから，①より

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = x_0 + d_x t \\ y = y_0 + d_y t \\ z = z_0 + d_z t \end{cases}$$

と表せる．これを，t を媒介変数とする直線 l の方程式という．

$d_x \fallingdotseq 0$ かつ $d_y \fallingdotseq 0$ かつ $d_y \fallingdotseq 0$ のとき，この式から媒介変数 t を消去すると，座標空間内の直線の方程式は

$$(t =)\ \frac{x - x_0}{d_x} = \frac{y - y_0}{d_y} = \frac{z - z_0}{d_z}$$

と表せる．

【例題】直線のベクトル方程式 I

以下のそれぞれについて，点 A を通り方向ベクトルを $\vec{d}$ とする直線 l の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ．また，媒介変数を用いない形で直線の方程式を表せ．

(1) A(2, 1, − 2), $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$　　(2) A(4, 0, 1), $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) A(−1, 3, 0), $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$　　(4) A(−2, 1, 0), $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

【解答】

(1) $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + 4t} \\ \boldsymbol{y = 1 + 3t} \\ \boldsymbol{z = -2 + t} \end{cases}$

それぞれの式を t について解くと，$t = \dfrac{x-2}{4}$，$t = \dfrac{y-1}{3}$，$t = z+2$ となるから

$$\boldsymbol{\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = z + 2}.$$

(2) $\begin{cases} \boldsymbol{x = 4 - 3t} \\ \boldsymbol{y = 2t} \\ \boldsymbol{z = 1} \end{cases}$

それぞれの式を t について解くと，$t = \dfrac{x-4}{-3}$，$t = \dfrac{y}{2}$ となり，z は常に 1 であるから

$$\boldsymbol{\frac{x-4}{-3} = \frac{y}{2},\ z = 1}.$$

(3) $\begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 3} \\ \boldsymbol{z = -t} \end{cases}$

それぞれの式を t について解くと，$t=\dfrac{x+1}{2}$，$t=\dfrac{z}{-1}$ となり，y は常に 3 であるから

$$\boldsymbol{\frac{x+1}{2}=\frac{z}{-1},\ y=3}$$

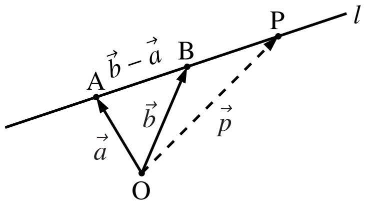
(4) $\begin{cases}\boldsymbol{x=-2}\\ \boldsymbol{y=1-3t}\\ \boldsymbol{z=0}\end{cases}$

t が変化すると y はすべての実数をとるが，x は常に -2 であり，z は常に 0 であるから

$x=-2$，$z=0$，y はすべての実数

■**直線の通る 2 点が与えられたとき**

空間内の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線を l とする．このとき，l は点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$ の直線であるから，l 上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に関するベクトル方程式は，p.201 の①より



$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$$
$$\Leftrightarrow\ \vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

となる．

この式を利用して，座標空間内の 2 点が与えられたときの直線の方程式を求めてみよう．

$\vec{a}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ とし，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすると，②より

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x=(1-t)x_0+tx_1\\y=(1-t)y_0+ty_1\\z=(1-t)z_0+ty_1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x-x_0=t(x_1-x_0)\\y-y_0=t(y_1-y_0)\\z-z_0=t(z_1-z_0)\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\\t=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}\\t=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}\end{cases}$$

これより，t を消去して

$$(t=)\ \frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

を得る．

この式は，直線の通る 1 点 A($\vec{a}$) を $\vec{a}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$，方向ベクトル $\vec{d}$ を $\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\\z_1-z_0\end{pmatrix}$ として，①を用いた結果に他ならない．

【例題】2 直線の距離

空間内に 2 直線

$$l:\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d_l}$$

$$m:\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\vec{d_m}$$

がねじれの位置にあるとする（s，t は任意の実数をとる）．

(1) 直線 l と m の距離 d を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\vec{d_l}\times\vec{d_m}$ を用いて表せ．

(2) 点 A(5, 3, -2)，$\vec{d_l}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$，点 B(2, -1. 6)，$\vec{d_m}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$ とするとき直線 l と m の距離を求めよ．

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\vec{d_l}\times\vec{d_m}$ に正射影したベクトル $_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\vec{d_l}\times\vec{d_m})$ は

$$_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\vec{d_l}\times\vec{d_m})=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\vec{d_l}\times\vec{d_m})}{\left|\vec{d_l}\times\vec{d_m}\right|^2}\ \vec{d_l}\times\vec{d_m}$$

◀ 空間の正射影ベクトルの内積での表し方 (p.190)

であり，$\left|_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\vec{d_l}\times\vec{d_m})\right|$ が d であるから

$$\left|_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\vec{d_l}\times\vec{d_m})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\vec{d_l}\times\vec{d_m})\right|}{\left|\vec{d_l}\times\vec{d_m}\right|^2}\ \left|\vec{d_l}\times\vec{d_m}\right|$$

$$=\boldsymbol{\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\vec{d_l}\times\vec{d_m})\right|}{\left|\vec{d_l}\times\vec{d_m}\right|}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-4\\8\end{pmatrix}$ であり，$\vec{d_l}\times\vec{d_m}=$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$ あるから

◀ 外積の成分表示 (p.??)

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot (\vec{d_l} \times \vec{d_m})\right|}{\left|\vec{d_l} \times \vec{d_m}\right|} \\ &= \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} \\ &= \frac{|(-3)\cdot(-6) + (-4)\cdot 9 + 8\cdot(-3)|}{\sqrt{(-6)^2 + 9^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{42}{3\sqrt{14}} = \boldsymbol{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

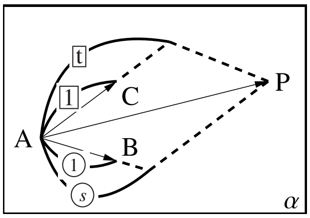
7.5.2 平面のベクトル方程式

ここでは，点 O に関する位置ベクトルを用いて空間内での平面を表す方法について考えてみよう．

■平面上の 3 点が与えられたとき

ここでは，同一直線上にない空間内の 3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を含む平面 α を表すベクトル方程式を求めてみる．

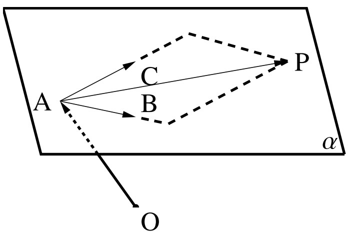
まず，平面 α 上の点 P($\vec{p}$) に関して $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は，「ベクトルの 1 次結合の定義 (p.134)」で見たように，平面上の 1 次独立な 2 つの $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に分解して



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表すことができる．

これを用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は



$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \end{aligned}$$

と表すことができる．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c} - \vec{a}$ を用いて整理すると

$$\vec{p} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$$

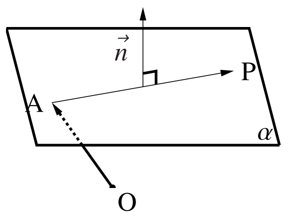
$$= (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる．

■平面上の 1 点と法線ベクトルが与えられたとき

次に，平面 α 上の 1 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ と，α 法線ベクトル $\vec{n}$ が与えられた場合のベクトル方程式を求めてみる．

平面 α 上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に関して $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は，法線ベクトル $\vec{n}$ と常に垂直になるから



$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a}) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と表すことができる．

次に，座標空間内で成分表示されたベクトルのベクトル方程式をみていこう．

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ である平面 α 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ であるから，②より

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

となる．

【例題】平面のベクトル方程式

(1) 点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離を p とすると

$$p = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

であることを証明せよ．

(2) 点 $(1,\ 1,\ 1)$ と平面 $3x+6y+2z+3=0$ との距離を求めよ．

【解答】

(1) 点 A から平面に下ろした垂線と平面との交点を $\mathrm{P}(x_1,\ x_2.\ x_3)$ とすると，平面の法線ベクトル $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

と $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ のなす角度は 0° もしくは 180° であるので

$$1 = \left| \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}}}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right| = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right| = \frac{|\, a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right| = \frac{|\, ax_0 + by_0 + cz_0 + d \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

◀ 点 P は平面上にあるので，$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ が成立することを用いた

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right| = p$ であるので，

$p = \dfrac{|\, ax_0 + by_0 + cz_0 + d \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ となる．■

(2) (1) の関係を用いて

$$p = \frac{|\, 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \,|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = \mathbf{2}$$

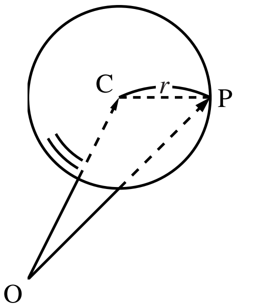
7.5.3　球面のベクトル方程式

ここでは，点 O に関する位置ベクトルを用いて空間内での球面を表す方法について考えてみよう．

■中心と半径が与えられたとき

点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ を中心とする，半径 r の球を S とする．このとき，この球面上を動くの点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方を考えよう．

点 P が球 S 上にあるとき，常に線分 CP の長さは r，すなわち $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r$ となるから



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{p} - \vec{c}\right| = r \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成り立つ．この①を球 S のベクトル方程式という．

また，座標空間内で $\vec{c}$ が $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ と成分表示された場合，

$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと

$$\left|\vec{p} - \vec{c}\right| = r \Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}\right| = r \Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}\right| = r$$

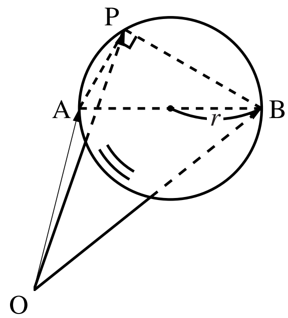
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

となり，これを座標空間における**球の方程式**という.

■直径の両端が与えられたとき

異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ と $\mathrm{B}(\vec{b})$ を直径の両端とするの球を S とする．このとき，この球面上を動くの点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の表し方を考えよう.



点 P が球 S 上にあるとき，常に線分 AP と BP は直交，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．この②も球 S のベクトル方程式である.

また，座標空間内で $\vec{a}$ が $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ と成分表示された場合，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \\ z - a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - b_x \\ y - b_y \\ z - b_z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a_x)(x - b_x) + (y - a_y)(y - b_y) + (z - a_z)(z - b_z) = 0$$

となり，これは 2 点 $\mathrm{A}(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\mathrm{B}(b_x,\ b_y,\ b_z)$ を直径とする球の方程式を表す.

【例題】球面のベクトル方程式

以下の条件を満たす球面の方程式を求めよ．

(1) 中心が $(1,\ -2,\ 3)$ で，半径が 4
(2) 中心が原点で，点 $(6,\ 3,\ 2)$ を通る
(3) 直径の両端が $(5,\ -2,\ 2)$，$(1,\ 6,\ 4)$

【解答】

(1) 中心と半径が与えられたとき円のベクトル方程式 (p.207) より

$$\Leftrightarrow\ \left|\vec{p}-\vec{c}\right| = 4$$

$$\Leftrightarrow\ \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = 4$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2} = 4$$

$$\therefore\ \boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 16}$$

(2) 中心が原点なので，半径を r とすると

$$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

となる．ここで，$(6,\ 3,\ 2)$ を通ることより

$$6^2+3^2+2^2 = r^2 \Leftrightarrow\ r^2 = 49$$

したがって，求める方程式は $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2 = 49}$ である．

(3) 直径の両端が与えられたときのベクトル方程式 (p.208) より

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} x-5 \\ y+2 \\ z-2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y-6 \\ z-4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-5)(x-1)+(y+2)(y-6)+(z-2)(z-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 21}$$

あとがき

コンピュータがネットワークで繋がれた現在，ソフトウェアの開発において，オープンソースという活動があります．オープンソースとは，ソフトウェアの設計図にあたるソースコードを，インターネットなどを通じて無償で公開し，誰でもそのソフトウェアの開発に参加できるというものです．

ソースコードさえあれば，そのソフトウェアで利用されている技術を容易に転用することが可能となるため，企業などでは自社の開発したソフトウェアのソースコードは極秘とするのが普通です．しかし，オープンソースの考え方は，ソースコードを公開して有用な技術を共有することで，世界中の誰もが自由にソフトウェアの開発に参加することができ，その方が素晴らしいソフトウェアが生まれるはずだという思想に基づいています．

私達 FTEXTは，このオープンソースという考え方を，ソースコードに限らず教材や一般のコンテンツ作成に応用する活動を進めています．この FTEXT数学シリーズもそうして作られたものです．

このような手法で教科書を作ることには，従来の教科書作りにはない特徴として，次のことが挙げられます．

まず 1 点目として，書く側と読む側とに完全に二分化されていた状況が崩れ，全ての人が書くことに参加できる，ということがあります．従来では，教師が生徒の視点を想像して文章を書いていました．しかし，この新しい教科書作りでは，教科書が作られるまさにその過程で，生徒からの質問や指摘が飛び込んできます．さらには，能力とやる気さえあれば生徒自らが教科書を書き進めていくこともできるのです．

次に 2 点目として，数学の教授法について，全国の先生方がもつコツを取り入れた教科書作りができる，ということがあります．食べ物に好き嫌いがあるように，教師といえども教える部分によって，説明の得意不得意があるものです．この新しい教科書作りでは，全国の先生方の得意な部分を集めていくことができるのです．これは，生徒のためになるだけではなく，他の先生方の教授法のスキルアップにもつながるでしょう．実際この FTEXT数学でも，従来の教科書では見られない最新の教授法を取り入れた編集になっています．

最後に 3 点目として，この教科書はインターネットを通じて世界中の人に公開されるので，今まで教育業界とは直接関係なかった方々の意見やアイデアも取り入れられる，ということがあります．ある分野での専門家の方々に，教科書で学ぶ数学の応用例などを盛んに紹介していただければ，「数学なんて何の役に立つのかわからない」などという言説を

払拭することができるかもしれません．

普通，教材というものは，ある技術を身に付ける必要のある人が利用するものであり，特化した知識を扱うものですが，“教科書”は日本中のほぼ全員が触れるという特殊な教材です．それゆえ，教科書の役割とは，次代を支える人たちにぜひ学んでおいて欲しい知識について，その時代のスタンダードを担うものであると考えます．工学的技術の進歩により，世界の知識はより細分化の方向に進んでいます．しかし，そのような時代であるからこそ，知識の全体を広く見渡せる教科書の存在が必要なのではないでしょうか.

現在私達は，世界の知恵を集めるという手法を用いて，数学の教科書に限らず，他の分野の教科書についても執筆をはじめようています．さらに今後は，教科書を作るという枠組みを超えて，新しい教材作成のプラットフォームを開発していく予定です.

しかし，これらを実行していくための力がまだまだ私達には足りません．このような活動に興味をもたれた方やご支援いただける方は，ぜひホームページ (http://www.ftext.org/) の方までアクセスください.

索引