第 1 章

数列の一般項と和

§ 1.1

数列とは何か

ここでは，数列の基本的な考え方を知り，数列の利用法についての全体像をみる．

1.1.1 数列の定義

■数列とは何か

人にプレゼントを贈るのため，今日から少しずつ貯金をしていく例を考える．今の貯金は 0 円だとして，毎日貯金してお金をためていく．最初は少額の 1 円からスタートして，1 日ごとに 2 円ずつ金額を増やしていくことにする．つまり，次のように貯金していく．

$$\overset{\text{初日}}{1\text{円}},\ \overset{\text{2日目}}{3\text{円}},\ \overset{\text{3日目}}{5\text{円}},\ \overset{\text{4日目}}{7\text{円}},\ \overset{\text{5日目}}{9\text{円}},\ \overset{\text{6日目}}{11\text{円}},\ \cdots$$

この

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots$$

のように，数字をならべたものを**数列** (sequence) という．そして，数列の中の数ひとつひとつを，その数列の**項** (term) という．特に，一番はじめの項のことを**初項** (first term) といい，2 番目の項を第 2 項，3 番目の項を第 3 項，N 番目の項を第 N 項，一番最後の項を**末項** (last term) という．

一般的には，数列の各項を

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ a_n,\ \cdots$$

のように，文字に項の番号を右下に添えて書く．また数列全体を $\{a_n\}$ と書く．

■漸化式とは何か

この数列では，n 日目（n は自然数とする）に貯金する金額を a_n で表すと

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

という関係が常に成り立つ（ここで，a_1 は初日の金額を表すので，$a_1 = 1$ である）.

実際，この式の n に 1 や 2 を代入してみると

$$a_2 = a_1 + 2$$
$$a_3 = a_2 + 2$$

となり，$a_1 = 1$ だから，$a_2 = 1 + 2 = 3$ として確かに 2 日目の貯金額が導かれる．また，$a_2 = 3$ だから，$a_3 = 3 + 2 = 5$ として 3 日目の貯金額が導かれる.

この $a_{n+1} = a_n + 2$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のように，ある項 (a_n) と別のある項 (a_{n+1}) との間に成り立つ関係式のことを，**漸化式**（ぜんかしき） (recurrence formula) という.

以上をまとめると，この数列は漸化式を用いて次のように表すことができる.

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

【例題：漸化式から数列の項を求める】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 5 項までを書き出せ.

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n^2$

(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$

(3) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + 2^n$

(4) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + n$

(5) $a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

(6) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 2}{a_n + 3}$

【解答】

(1)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1 + 2^2 = 5$$
$$a_3 = 5 + 3^2 = 14$$
$$a_4 = 14 + 4^2 = 30$$
$$a_5 = 30 + 5^2 = 55$$

より，**1, 5, 14, 30, 55** である.

(2)
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$
$$a_3 = 3 \cdot 8 + 2 = 26$$
$$a_4 = 3 \cdot 26 + 2 = 80$$
$$a_5 = 3 \cdot 80 + 2 = 242$$

より，**2, 8, 26, 80, 242** である．

(3)

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$$

$$a_3 = 5 \cdot 7 + 2^2 = 39$$

$$a_4 = 5 \cdot 39 + 2^3 = 203$$

$$a_5 = 5 \cdot 203 + 2^4 = 1031$$

より，**1, 7, 39, 203, 1031** である．

(4)

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 5 \cdot 1 + 1 = 6$$

$$a_3 = 5 \cdot 6 + 2 = 32$$

$$a_4 = 5 \cdot 32 + 3 = 163$$

$$a_5 = 5 \cdot 163 + 4 = 819$$

より，**1, 6, 32, 163, 819** である．

(5)

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 5$$

$$a_3 = 5 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 13$$

$$a_4 = 5 \cdot 13 - 6 \cdot 5 = 35$$

$$a_5 = 5 \cdot 35 - 6 \cdot 13 = 97$$

より，**2, 5, 13, 35, 97** である．

(6)

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{2 \cdot 2 + 2}{2 + 3} = \frac{6}{5}$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot \frac{6}{5} + 2}{\frac{6}{5} + 3} = \frac{\frac{22}{5}}{\frac{21}{5}} = \frac{22}{21}$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot \frac{22}{21} + 2}{\frac{22}{21} + 3} = \frac{\frac{86}{21}}{\frac{85}{21}} = \frac{86}{85}$$

$$a_5 = \frac{2 \cdot \frac{86}{85} + 2}{\frac{86}{85} + 3} = \frac{\frac{342}{85}}{\frac{341}{85}} = \frac{342}{341}$$

より，$\mathbf{2,\ \frac{6}{5},\ \frac{22}{21},\ \frac{86}{85},\ \frac{342}{341}}$ である．

1.1.2　数列の一般項

■数列の一般項

さきほどの例では，10 日目にはいったい何円貯金しなければならないだろうか？

実際に数列を書き並べて

$$\overset{\boxed{1}}{1},\ \overset{\boxed{2}}{3},\ \overset{\boxed{3}}{5},\ \overset{\boxed{4}}{7},\ \overset{\boxed{5}}{9},\ \overset{\boxed{6}}{11},\ \overset{\boxed{7}}{13},\ \overset{\boxed{8}}{15},\ \overset{\boxed{9}}{17},\ \overset{\boxed{10}}{19}$$

とすれば，19 円貯金しなければならないことがわかるが，これでは 20 日目や 50 日目の貯金額を知りたいときにかなり面倒である．

そこで，別の見方を考えてみよう．

たとえば,「日にち」と「貯金額」との対応を見たときに, $\boxed{1}\times 2-1=1$ 円, $\boxed{2}\times 2-1=3$ 円, $\boxed{3}\times 2-1=5$ 円，$\cdots$ だから

$$(\text{日にち})\times 2-1=(\text{貯金額})$$

であることに気がつけば，10 日目に貯金しなければならない金額 a_{10} は

$$a_{10}=10\times 2-1=19 \text{ 円}$$

と求めることができる．この方法を使えば, 20 日目の貯金額 a_{20} は $a_{20}=20\times 2-1=39$ 円, 50 日目の貯金額 a_{50} は $a_{50}=50\times 2-1=99$ 円 と簡単に求めることができる．

さらに，n 日目の貯金額 a_n は

$$a_n=n\times 2-1=2n-1 \text{ 円}$$

と表すことができる．

このように，数列の第 n 項（n 日目の貯金額）が n（n 日目）の式で表されているとき，その第 n 項を**一般項** (general term) という．一般項が求まれば，n に自然数を順次代入することによって，数列の各項を求めることができる．

【例題：数列の一般項】

数列 $\{a_n\}$ の一般項が，次の式で与えられているとき，初項から第 5 項までを書き出せ．

(1) $a_n=2n$　　(2) $a_n=2^n$

(3) $a_n=\dfrac{2n+1}{n}$　　(4) $a_n=\dfrac{2^n}{n+1}$

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}a_1&=2\cdot 1=2\\ a_2&=2\cdot 2=4\\ a_3&=2\cdot 3=6\\ a_4&=2\cdot 4=8\end{aligned}$$

$$a_5 = 2 \cdot 5 = 10$$

より，**2, 4, 6, 8, 10** である．

(2)
$$a_1 = 2^1 = 2$$
$$a_2 = 2^2 = 4$$
$$a_3 = 2^3 = 8$$
$$a_4 = 2^4 = 16$$
$$a_5 = 2^5 = 32$$

より，**2, 4, 8, 16, 32** である．

(3)
$$a_1 = \frac{2+1}{1} = 3$$
$$a_2 = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$
$$a_3 = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$$
$$a_4 = \frac{8+1}{4} = \frac{9}{4}$$
$$a_5 = \frac{10+1}{5} = \frac{11}{5}$$

より，$\mathbf{3,\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{4},\ \frac{11}{5}}$ である．

(4)
$$a_1 = \frac{2^1}{1+1} = 1$$
$$a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$
$$a_3 = \frac{2^3}{3+1} = 2$$
$$a_4 = \frac{2^4}{4+1} = \frac{16}{5}$$
$$a_5 = \frac{2^5}{5+1} = \frac{16}{3}$$

より，$\mathbf{1,\ \frac{4}{3},\ 2,\ \frac{16}{5},\ \frac{16}{3}}$ である．

1.1.3　数列の和

■数列の和

10 日に貯金しなければいけない金額はわかった．次に，10 日間で貯金できた合計金額を考えてみよう．

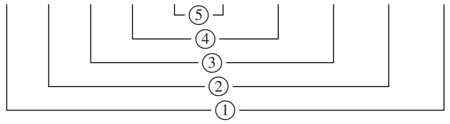
初日に 1 円，2 日目に 3 円，3 日目に 5 円，$\cdots$，10 日目に 19 円貯金するのだから，金額を順に足していくことにより

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100\ [円]$$

となり，ちょうど 100 円貯金できたことがわかる．

しかし，この考え方では，20 日間や 50 日間で貯金した合計金額を知りたいときに相当面倒である．そこで，別の見方を考えてみよう．

$$S_{10} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$



上記のように両端から順にペアを組ませると，ペア同士の和が全て同じ数値「20」になることに気がつけば

$$S_{10} = 20 \times \frac{10}{2} = 100 \text{ [円]}$$

と求めることができる．（ペアの個数は，元の項数 10 の半分となる．）

この方法を使えば，S_{20}，S_{50} も次のように求めることができる．

$$\begin{aligned} S_{20} &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 35 + 37 + 39 \\ &= 40 \times \frac{20}{2} = 400 \text{ [円]} \\ S_{50} &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 95 + 97 + 99 \\ &= 100 \times \frac{50}{2} = 2500 \text{ [円]} \end{aligned}$$

さらに，n 日間で貯金できた合計金額 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 5) + (2n - 3) + (2n - 1) \\ &= 2n \times \frac{n}{2} = n^2 \text{ [円]} \end{aligned}$$

と表すことができる[1]．

ここで，貯金が 1 万円になるまでの日数を考えると，$S_n = 10000$ という方程式を考えて

$$\begin{aligned} & S_n = 10000 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 = 10000 \\ \therefore\ & n = 100 \end{aligned}$$

より 100 日間とわかる．つまり，最初 1 円からスタートしても 3 ヶ月弱で達成できる．意外と早いものだ．

---

[1] $S_n = n^2$ は数列 $\{S_n\}$ の一般項という意味もある．

§ 1.2

等差数列

ここでは等差数列の一般項や和について学ぶ．等差数列の和について理解できると，「1 から 100 までの自然数の和を計算せよ」といった問題が簡単に解けるようになる．

1.2.1 等差数列の一般項

■等差数列の定義

§1.1 でとりあげた貯金の例のように，初項 a に順次，一定の数 d（**公差** (common difference) という）を加えて得られる数列のことを**等差数列** (arithmetic sequence) という．具体的に数列を書き表すと

$$\begin{array}{ccccccccc} a, & & a+d, & & a+2d, & & a+3d, & & a+4d, \quad \cdots \\ & \searrow_{+d}\nearrow & & \searrow_{+d}\nearrow & & \searrow_{+d}\nearrow & & \searrow_{+d}\nearrow & \end{array}$$

となる．

また，等差数列は漸化式を用いて

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表すこともできる[*2]．

試しに，この漸化式①の n に 1，2，3 を代入すると，確かに $a+d$，$a+2d$，$a+3d$ が作られるのがわかる．

■等差数列の一般項

この等差数列の第 N 項つまり一般項 a_N は

「第 N 項は初項 a に d を $N-1$ 個加えたもの」

と考えて

$$a_N = a + (N-1)d$$

となるのはすぐにわかるだろう．

また，漸化式①から一般項 a_N を求める方法もみておこう．

[*2] 初項 a_1 の条件は必須であることに注意しよう．

STEP1

漸化式を $a_{n+1}-a_n=d$ と変形し，n に 1，2，3，$\cdots$，$N-2$，$N-1$ を代入し，得られる式を縦に並べておく．

$$\begin{aligned} a_2-a_1&=d\\ a_3-a_2&=d\\ &\vdots\\ a_{N-1}-a_{N-2}&=d\\ a_N-a_{N-1}&=d \end{aligned}$$

STEP2

すべての式の辺々を加え合わせる．

$$\begin{array}{rl} \cancel{a_2}-a_1&=d\\ \cancel{a_3}-\cancel{a_2}&=d\\ &\vdots\\ \cancel{a_{N-1}}-\cancel{a_{N-2}}&=d\\ +)\quad a_N-\cancel{a_{N-1}}&=d\\ \hline a_N-a_1&=(N-1)d \end{array}$$

よって，$a_1=a$ であることに注意して，次式を得る．

$$a_N=a+(N-1)d$$

■n と N を混同してもちいる

さきほど STEP1 で使った文字 N は「ある N 番目」という意味で用いた．ただし慣例では “N” ではなく “n” を使うので，今後このテキストでもこの慣例に従い，特別 N を使用せずに n を使うものとする．

しかし，こうすると STEP1 で「n に 1，2，3，$\cdots$，$n-2$，$n-1$ を代入」と表現されることになり「n に $n-1$ を代入する？」と誤解を招きやすい．

最初の n は 1，2，3，$\cdots$ を代入するための変数であり，後の $n-2$，$n-1$ に含まれる n は定数として用いられており，同じ n でも別物として取り扱うことに注意しよう．

等差数列の漸化式と一般項

初項 a，公差 d の等差数列の漸化式は

$$\begin{cases} a_1=a\\ a_{n+1}=a_n+d\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

初項 a，公差 d の等差数列の一般項 a_n は

$$a_n=a+(n-1)d\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

【例題：等差数列の一般項〜その１〜】

次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．また，第 10 項を求めよ．

(1) 2，5，8，11，14，$\cdots$

(2) 100，98，96，94，92，$\cdots$

【解答】

(1) 初項が 2，公差が 3 の等差数列であり，第 n 項（一般項）は初項 a_1 に公差 d を $n-1$ 回加えることによって求められるので

$$a_n = 2 + (n-1)3 = \mathbf{3n-1}$$

また，第 10 項は $a_{10} = 3 \cdot 10 - 1 = \mathbf{29}$ である．

◀ 2，5，8，11，14，$\cdots$
+3 +3 +3 +3 +3

(2) 初項が 100，公差が -2 の等差数列だから

$$a_n = 100 + (n-1) \cdot (-2) = \mathbf{-2n+102}$$

また，第 10 項は $a_{10} = -2 \cdot 10 + 102 = \mathbf{82}$ である．

◀ 100，98，96，94，92，$\cdots$
-2 -2 -2 -2 -2

【例題：等差数列の一般項〜その２〜】

次の条件を満たす等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) 初項が 13，第 4 項が 22

(2) 第 3 項が 1，第 10 項が -13

【解答】

(1) 等差数列は公差が一定であるので，条件からまず公差を求めよう．初項から第 4 項までは，公差が 3 回足されるので，公差を d とすると

$$3d = a_4 - a_1 = 22 - 13 = 9$$
$$\therefore\ d = 3$$

よって，$a_n = 13 + (n-1) \cdot 3 = \mathbf{3n-10}$ となる．

◀ a_1，a_2，a_3，a_4
$+d$ $+d$ $+d$

◀ $d = \dfrac{a_4 - a_1}{4-1}$

【別解】

等差数列の一般項は $a_n = a_1 + (n-1)d$ として与えられるので，問題の条件から a_1 と d の連立方程式を立てることができる．初項を a，公差を d とすると

$$a_1 = a = 13$$
$$a_4 = a + 3d = 22$$

となる．これらを連立させて解くと

$$a = 13,\ d = 3$$

よって，$a_n = 13 + (n-1) \cdot 3 = \mathbf{3n - 10}$ となる．

(2) 第 3 項から第 10 項までは，公差が 7 回足されるので，公差を d とすると

$$7d = a_{10} - a_3 = -13 - 1 = -14$$
$$\therefore\ d = -2$$

◀ $d = \dfrac{a_{10} - a_3}{10 - 3}$

第 10 項から第 n 項までは，公差が $n - 10$ 回足されるので

$$\begin{aligned} a_n &= a_{10} + (n-10)d = -13 + (n-10) \cdot (-2) \\ &= \mathbf{-2n + 7} \end{aligned}$$

【別解】

初項を a，公差を d とすると

初項が 3 であるから　$a + 2d = 1$

第 10 項が -13 であるから　$a + 9d = -13$

となる．これらを連立させて解くと

$$a = 5,\ d = -2$$

よって，$a_n = 5 + (n-1) \cdot (-2) = \mathbf{-2n + 7}$ となる．

【例題：等差数列の一般項〜その３〜】

第 12 項が 43，第 27 項が 223 である等差数列がある．このとき，295 はこの数列の第何項か．

【解答】

この数列の初項を a，公差を d とすると

$$a_n = a + (n-1)d$$

ここで $a_{12} = 43$，$a_{27} = 223$ であるから

$$43 = a + 11d$$
$$223 = a + 26d$$

これを解いて，$a = -89$，$d = 12$.

よって一般項 a_n は

$$a_n = -89 + (n-1)\cdot 12 = 12n - 77$$

ここで 295 が第 n 項であるとすると

$$295 = 12n - 77$$

これを解いて，$n = 32$.
したがって，295 はこの数列の**第 32 項**である.

1.2.2　等差数列の和

■等差数列の和の求めかた

ここでは，等差数列の初項 a から第 n 項までの和 S_n を求めてみよう.

STEP1

等差数列の一般項 $a_n = a + (n-1)d$ に，1，2，3，$\cdots$，$n-2$，$n-1$，n を代入して足し合わせる式を書く.

$$S_n = \overset{\boxed{1}}{a} + (a + \overset{\boxed{2}}{d}) + (a + \overset{\boxed{3}}{2}d) + \cdots + \{a + (\overset{\boxed{n-2}}{n} - 3)d\} + \{a + (\overset{\boxed{n-1}}{n} - 2)d\} + \{a + (\overset{\boxed{n}}{n} - 1)d\}$$

STEP2

この式の右辺を，逆に並べて書く.

$$S_n = \{a + (\overset{\boxed{n}}{n} - 1)d\} + \{a + (\overset{\boxed{n-1}}{n} - 2)d\} + \{a + (\overset{\boxed{n-2}}{n} - 3)d\} + \cdots + (a + \overset{\boxed{3}}{2}d) + (a + \overset{\boxed{2}}{d}) + \overset{\boxed{1}}{a}$$

STEP3

上の 2 式を縦に足し合わせる.

$$\begin{array}{lllllll}
 & S_n & = a & +(a+d) & +\cdots & +\{a+(n-2)d\} & +\{a+(n-1)d\} \\
+) & S_n & = \{a+(n-1)d\} & +\{a+(n-3)d\} & +\cdots & +(a+d) & +a \\
\hline
 & 2S_n & = \{2a+(n-1)d\} & +\{2a+(n-1)d\} & +\cdots & +\{2a+(n-1)d\} & +\{2a+(n-1)d\}
\end{array}$$

右辺は全て $2a + (n-1)d$ であり，これが n 個存在するので

$$2S_n = \{2a + (n-1)d\} \times n$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

と表すことができる．これが求めたかった等差数列の初項 a から第 n 項までの和 S_n である.

なお，$2a + (n-1)d = a_1 + a_n$ より

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

と表すこともできる.

以上，等差数列の和についてまとめておこう.

等差数列の和

初項 a，公差 d の等差数列の，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$
$$= \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

と表せる．

等差数列の和の公式は

$$（等差数列の和）= \frac{（項数）}{2} \times \Big(（初項）+（末項）\Big)$$

と覚えておくとよい．つまり，等差数列の和は「項数」と「初項」と「末項」という 3 つの要素がわかれば求めることができる．

【例題：等差数列の和〜その１〜】

次の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．また，S_{10} を求めよ．

(1) 2，5，8，11，14，$\cdots$

(2) 100，98，96，94，92，$\cdots$

【解答】

(1) 初項が 2，公差が 3 の等差数列だから，この数列の一般項 a_n は

$$a_n = 2 + (n-1)3 = 3n - 1$$

よって，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \boldsymbol{\frac{n(3n+1)}{2}}$$

また，初項から第 10 項までの和 S_{10} は

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (3 \cdot 10 + 1)}{2} = \mathbf{155}$$

◀ 2，5，8，11，14，$\cdots$
$+3$　$+3$　$+3$　$+3$　$+3$

(2) 初項が 100，公差が -2 の等差数列だから，この数列の一般項 a_n は

$$a_n = 100 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 102$$

よって，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \boldsymbol{n(101 - n)}$$

◀ 100，98，96，94，92，$\cdots$
-2　-2　-2　-2　-2

また，初項から第 10 項までの和 S_{10} は

$$S_{10} = 10 \cdot (101 - 10) = \mathbf{910}$$

【例題：等差数列の和〜その２〜】

1 から 50 までの整数のうち，次のような数の和を求めよ.

(1) 2 の倍数

(2) 3 の倍数

(3) 2 または 3 の倍数

【解答】

(1) $A_2 = \{2,\ 4,\ 6, \cdots,\ 50\}$ は，初項 2，項数 25，末項 50 の等差数列であるから，求める和 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 25(2 + 50) = \mathbf{650}$$

(2) $A_3 = \{3,\ 6,\ 9, \cdots,\ 48\}$ は，初項 3，項数 16，末項 48 の等差数列であるから，求める和 S_3 は

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 16(3 + 48) = \mathbf{408}$$

(3) 2 または 3 の倍数の和 S は，$S = S_2 + S_3 - S_6$ で与えられるので，S_6 を求めればよい．$A_6 = \{6,\ 12,\ 18, \cdots,\ 48\}$ は，初項 6，項数 8，末項 48 の等差数列であるから，S_6 は

$$S_6 = \frac{1}{2} \cdot 8(6 + 48) = 216$$

よって

$$S_6 = 650 + 408 - 216 = \mathbf{842}$$

【例題：等差数列の和の最大値】

一般項 a_n が $a_n = -6n + 120$ である数列 $\{a_n\}$ について，以下の問に答えよ.

(1) 初めて負になる項は第何項目か.

(2) 初項からの和が最大になるのは，第何項目までの和か．また，その和の最大値を求めよ.

【解答】

(1) $a_n = -6n + 120$ が負になるのは

$$\begin{aligned} & -6n + 120 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & 6n > 120 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ n > 20$$

つまり，$n \geqq 21$ のとき a_n は負となる．よって，初めて負になるのは**第 21 項目**である．

(2) (1) より，初項から第 20 項までの項は，すべて正あるいは 0 なので，S_{20} が初項からの和の最大値となる．また，$a_{20} = 0$ であるから，$S_{20} = S_{19}$ であり，こちらも最大値である．よって，和が最大になるのは，**第 19 項目または第 20 項目**である．

このとき，最大値は

$$\begin{aligned} S_{19} &= \frac{19}{2} \cdot (a_1 + a_{19}) \\ &= \frac{19}{2} \cdot (114 + 6) \\ &= \mathbf{1140} \end{aligned}$$

◀ $S_{20} = \frac{20}{2} \cdot (a_1 + a_{20})$
$= \frac{20}{2} \cdot (114 + 0)$
$= 1140$

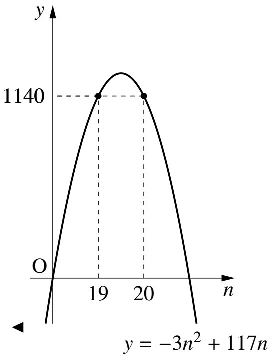
【別解】

一般項が $a_n = -6n + 120$ である等差数列の和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\{114 + (-6n + 120)\} \\ &= \frac{1}{2}(-6n + 234) \\ &= -3n^2 + 117n \end{aligned}$$

となり，S_n が 2 次関数で与えられていることがわかる．右図のグラフより，n が整数であることに注意すると，この S_n が最大値をとるのは $\boldsymbol{n = 19,\ 20}$ のときである．

◀



§ 1.3

等比数列

等差数列は隣り合う項の差が一定の数列であった．ここでは隣り合う項の比が一定の数列「等比数列」の一般項や和について学んでいく．なお，等比数列の和について理解できると，「利率 5 %の銀行に毎年 100 万円ずつ貯金するとき，10 年目の貯金総額はいくらか」といった問題が解けるようになる．

1.3.1　等比数列の一般項

■等比数列の定義

初項 a に順次，一定の数 r（**公比** (common ratio) という）をかけて得られる数列のことを**等比数列** (geometric sequence) という．具体的に書き表すと

$$\begin{tikzcd} a, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & ar, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & ar^2, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & ar^3, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & ar^4, & \cdots \end{tikzcd}$$

となる．

また，等比数列は漸化式を用いて

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n r \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表すこともできる[*3]．

試しに，この漸化式①の n に 1，2，3 を代入すると，確かに ar，ar^2，ar^3 が作られるのがわかる．

なお，次のような数列も等比数列となることに注意しておこう．

a，0，0，0，$\cdots$（初項 a，公比 0 の等比数列）

a，a，a，a，$\cdots$（初項 a，公比 1 の等比数列）

■等比数列の一般項

この等比数列の第 n 項つまり一般項 a_n は

「初項から第 n 項までには r を $n-1$ 個かける」

と考えて

$$a_n = ar^{n-1}$$

となるのはすぐにわかるだろう．

[*3] 初項 a_1 の条件は必須であることに注意しよう．

また，漸化式①から一般項 a_n を求める方法もみておこう．

STEP1

漸化式①の n に 1，2，3，⋯，$n-2$，$n-1$ を代入し，得られる式を縦に並べておく．

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r \\ &\ \vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} r \\ a_n &= a_{n-1} r \end{aligned}$$

STEP2

すべての式の辺々を掛け合わせると，a_2，a_3，⋯，a_{n-1} が打ち消される．

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r \\ &\ \vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} r \\ a_n &= a_{n-1} r \\ \hline a_n &= a_1 r^{n-1} \end{aligned}$$

よって，$a_1 = a$ に注意して，次式を得る．

$$a_n = ar^{n-1}$$

等比数列の漸化式と一般項

初項 a，公比 r の等比数列の漸化式は

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n r \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

初項 a，公比 r の等比数列の一般項 a_n は

$$a_n = ar^{n-1} \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

【例題：等比数列の一般項〜その１〜】

次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．また，第 10 項を求めよ．

(1) 2，6，18，54，162，⋯

(2) 81，-27，9，-3，1，⋯

【解答】

(1) 初項が 2，公比が 3 の等比数列であり，第 n 項（一般項）は初項 a_1 に公比 r を $n-1$ 回かけることによっ

◀ 2，6，18，54，162，⋯
×3 ×3 ×3 ×3 ×3

て求められるので

$$a_n = \mathbf{2 \cdot 3^{n-1}}$$

また，第 10 項は $a_{10} = 2 \cdot 3^9 = \mathbf{39366}$ である．

(2) 初項が 81，公比が $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列だから

$$a_n = \mathbf{81\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

また，第 10 項は $a_{10} = 81\left(-\dfrac{1}{3}\right)^9 = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{243}}$ である．

◀ $$\begin{tikzcd}81, \arrow[r, bend right, "\times\left(-\frac{1}{3}\right)"'] & -27, \arrow[r, bend right, "\times\left(-\frac{1}{3}\right)"'] & 9, \arrow[r, bend right, "\times\left(-\frac{1}{3}\right)"'] & -3, \arrow[r, bend right, "\times\left(-\frac{1}{3}\right)"'] & 1, \cdots\end{tikzcd}$$

【例題：等比数列の一般項～その２～】

次の条件を満たす等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) 初項が 2，第 4 項が -54

(2) 第 3 項が $\dfrac{3}{4}$，第 7 項が $\dfrac{3}{64}$

【解答】

(1) 等比数列は公比が一定であるので，条件からまず公比を求めよう．初項から第 4 項までは, 公比が $(4-1=)3$ 回掛けられるので，公比を r とすると

$$a_1 r^3 = a_4$$
$$\Leftrightarrow\ r^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{-54}{2} = -27$$
$$\therefore\ r = -3$$

◀ $$\begin{tikzcd}a_1, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & a_2, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & a_3, \arrow[r, bend right, "\times r"'] & a_4\end{tikzcd}$$

よって，$a_n = \mathbf{2(-3)^{n-1}}$ となる．

【別解】

等比数列の一般項は $a_n = a_1 r^{n-1}$ として与えられるので，問題の条件から a_1 と r の連立方程式を立てることができる．初項を a，公比を r とすると

$$a_1 = a = 2$$
$$a_4 = ar^3 = -54$$

となる．これらを連立させて解くと

$$a = 2\ ,\ \ r = -3$$

よって，$a_n = \mathbf{2(-3)^{n-1}}$ となる．

(2) 第 3 項から第 7 項までは，公比が $(7-3=)4$ 回かけ

られるので，公比を r とすると

$$a_3r^4 = a_7$$

$$\Leftrightarrow\ r^4 = \frac{a_7}{a_3} = \frac{3}{64} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\therefore\ \ r = \pm\frac{1}{2}$$

第 3 項から第 n 項までは，公比の $n-3$ 乗がかかるので

$$\begin{aligned} a_n &= a_3r^{n-3} \\ &= \frac{3}{4}\left(\pm\frac{1}{2}\right)^{n-3} \\ &= \boldsymbol{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ ,\ 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

【別解】

初項を a，公比を r とすると

第 3 項が $\dfrac{3}{4}$ であるから　$ar^2 = \dfrac{3}{4}$

第 7 項が $\dfrac{3}{64}$ であるから $ar^6 = \dfrac{3}{64}$

となる．これらを連立させて解くと

$$a = 3\ ,\ \ r = \pm\frac{1}{2}$$

よって，$a_n = \boldsymbol{3\left(\pm\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ となる．

1.3.2　等比数列の和

■等比数列の和の求め方

ここでは，等比数列の初項 a から第 n 項までの和 S_n を求めてみよう．$r \fallingdotseq 1$ のときは次のようになる．

STEP1

等比数列の一般項 $a_n = a_1r^{n-1}$ に，1，2，3，$\cdots$，$n-2$，$n-1$，n を代入して足し合わせる式を書く．

$$S_n = \overset{\boxed{1}}{a} + \overset{\boxed{2}}{ar} + \overset{\boxed{3}}{ar^2} + \cdots + \overset{\boxed{n-2}}{ar^{n-3}} + \overset{\boxed{n-1}}{ar^{n-2}} + \overset{\boxed{n}}{ar^{n-1}}$$

STEP2

この式の辺々 r 倍した式を書く．

$$rS_n = \overset{\boxed{1}}{ar} + \overset{\boxed{2}}{ar^2} + \overset{\boxed{3}}{ar^3} + \cdots + \overset{\boxed{n-2}}{ar^{n-2}} + \overset{\boxed{n-1}}{ar^{n-1}} + \overset{\boxed{n}}{ar^n}$$

STEP3

上の 2 つの式を並べる．このとき，r 倍した式の方を右に 1 段ずらして書いておく．

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S_n & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-3} & + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & & \\ rS_n & = & & & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-3} & + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & + & ar^n \end{array}$$

STEP4

上の式から下の式を引く．そのとき，各項のかたまりを崩さないようにする．

$$\begin{array}{lrcccccccccccccccc} & S_n & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-3} & + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & & \\ -) & rS_n & = & & & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-3} & + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & + & ar^n \\ \hline & (1-r)S_n & = & a & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & ar^n \end{array}$$

$r \fallingdotseq 1$ ならば，この式の両辺を $1-r$ で割ることができるので，$(1-r)S_n = a(1-r^n)$ より

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \left(= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \right)$$

を得る．

また，$r=1$ のときは，$S_n = \overbrace{a+a+a+\cdots+a+a}^{n\text{ 個}} = an$ となる．

以上，まとめておこう．

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の，初項から第 n 項までの和 S_n は

(1) $r \fallingdotseq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \end{aligned}$$

(2) $r=1$ のとき $S_n = an$

この式は

$$（\text{等比数列の和}）= \frac{（\text{初項}）\times\left(1-（\text{公比}）^{（\text{項数}）}\right)}{1-（\text{公比}）}$$

と覚えておくとよい．つまり，等比数列の和は「初項」と「公比」と「項数」という 3 つの要素がわかれば簡単に計算することができる．

【例題：等比数列の和～その１～】

次の等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．また，S_6 を求めよ．

(1) 2，6，18，54，162，$\cdots$

(2) 81，-27，9，-3，1，$\cdots$

【解答】

(1) 初項が 2，公比が 3 の等比数列だから，初項から第 n

◂ $\underbrace{2,\ \ 6}_{\times 3},\ \underbrace{\ \ 18}_{\times 3},\ \underbrace{\ \ 54}_{\times 3},\ \underbrace{\ \ 162}_{\times 3},\ \underbrace{\ \ \cdots}_{\times 3}$

項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = \mathbf{3^n - 1}$$

また，$S_6 = 3^6 - 1 = \mathbf{728}$ である．

(2) 初項が 81，公比が $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列だから，初項から第 n 項までの和 S_n は

◂ $81,\quad -27,\quad 9,\quad -3,\quad 1,\quad \cdots$
$\times\left(-\frac{1}{3}\right)\ \times\left(-\frac{1}{3}\right)\ \times\left(-\frac{1}{3}\right)\ \times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{81\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} \\ &= \boldsymbol{\frac{243}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{243}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^6\right\} = \frac{243}{4}\left(1 + \frac{1}{729}\right) \\ &= \mathbf{\frac{365}{6}} \end{aligned}$$

【例題：等比数列の和〜その２〜】

毎年の初めに 100 万円ずつ，年利 3%，1 年ごとの複利法で 10 年積み立てたときの元利合計 S 円を求めよ．ただし $1.03^{10} = 1.34$ とする．なお，複利法とは 1 年ごとに利子を元金にくり入れ，その合計額を次年の元金として利子を計算する手法のことである．

【解答】

毎年の元利がいくらになるかを考えると

$$\begin{aligned} &1\text{ 年目}：100 \times 1.03 \\ &2\text{ 年目}：(100 + 100 \times 1.03) \times 1.03 \\ &\qquad\quad =100 \times 1.03 + 100 \times 1.03^2 \\ &3\text{ 年目}：(100 + 100 \times 1.03 + 100 \times 1.03^2) \times 1.03 \\ &\qquad\quad =100 \times 1.03 + 100 \times 1.03^2 + 100 \times 1.03^3 \\ &10\text{ 年目}：100 \times 1.03 + 100 \times 1.03^2 + 100 \times 1.03^3 + \cdots \\ &\qquad\qquad\quad + 100 \times 1.03^{10} \end{aligned}$$

これは初項 100×1.03，公比 1.03，項数 10 の等比数列の

和なので

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{100 \times 1.03(1.03^{10} - 1)}{1.03 - 1} \\ &= \frac{100 \times 1.03(1.34 - 1)}{1.03 - 1} \\ &= \frac{100 \times 1.03 \times 0.34}{0.03} \\ &\risingdotseq \mathbf{1167} \end{aligned}$$

§ 1.4

Σ 記号

前節では，数列の和について等差数列と等比数列の場合を勉強した．しかし，今後取り扱っていく数列は等差数列や等比数列と比べて複雑になってくるので，そのような複雑な数列においても和を考えることができるように新しい記号を導入し，その性質について勉強しよう．

1.4.1　Σ 記号の定義

■Σ 記号の定義

ここで，数列の和を表すのに便利な記号 Σ を導入する[4]．

Σ 記号の定義

数列 $\{a_n\}$ の初項から，第 n 項までの和 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ を，Σ 記号を用いて

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

と表す．

つまり，$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ とは，a_k において，$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n$ として得られるすべての項 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_{n-1}，a_n の和であると定義する．文字 k の代わりに，i，j などを用いてもよい．

また，a_1 ではなく a_2 からの和を表したいときには，$\sum\limits_{k=2}^{n} a_k$ と書けばよい．つまり

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

である．

■Σ 記号に慣れる

まずは Σ 記号に慣れるために，例題をみていくことにしよう．

---

[4] Σ は和 (sum) の頭文字 S にあたるギリシア文字で，シグマと読む．

【例題：Σ 記号の練習〜その１〜】

次の和を，Σ 記号を用いずに表せ（計算はしなくてよい）.

(1) $\sum_{k=1}^{3}(2k-1)$　(2) $\sum_{k=2}^{4}3k^2$　(3) $\sum_{i=1}^{n}3$　(4) $\sum_{j=1}^{n}3^j$　(5) $\sum_{k=1}^{3}(2n-1)$

【解答】

(1) $\sum_{k=1}^{3}(2k-1) = \mathbf{1+3+5}$

(2) $\sum_{k=2}^{4}3k^2 = \mathbf{3\cdot 2^2+3\cdot 3^2+3\cdot 4^2}$

(3) $\sum_{i=1}^{n}3 = \mathbf{3+3+3+\cdots+3}$

◀ 3 は全部で n 個ある

(4) $\sum_{j=1}^{n}3^j = \mathbf{3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n}$

(5) $\sum_{k=1}^{3}(2n-1) = \mathbf{(2n-1)+(2n-1)+(2n-1)}$

◀ $\sum_{k=1}^{3}$ の変数は k なので $a_k = 2n-1$ であり，この数列の値は k に何を代入しても $2n-1$ となる

次に数列の和を Σ 記号に書き直してみよう.

【例題：Σ 記号の練習〜その２〜】

次の和を，Σ 記号を用いて表せ.

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2$

(2) $3+5+7+\cdots+(2n+1)$

(3) $3+3+3+\cdots+3$　（3 は全部で n 個あるとする）

(4) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+5\cdot 7$

Σ 記号に書き直すときには，まずは数列の一般項を求めるとよい．そうすれば数列の和が

$$\sum_{k=\text{（最初の項番号）}}^{\text{（最後の項番号）}}\text{（一般項）}$$

と表現することが出来るようになる.

【解答】

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2 = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{7}k^2}$

◀ $\sum_{k=1}^{7}k^2$ 以外にも $\sum_{k=2}^{8}(k-1)^2$，$\sum_{k=0}^{6}(k+1)^2$ と表せる

(2) $3+5+7+\cdots+(2n+1) = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(2k+1)}$

(3) $\underbrace{3+3+3+\cdots+3}_{n\text{ 個}} = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}3}$

(4) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+5\cdot 7 = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{5}k(k+2)}$

【例題：Σ 記号の練習〜その３〜】

次の和はどれも同じことを表現していることを確認せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$　(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} 2^{k-1}$　(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2 \cdot 2^{i-1})$

【解答】

Σ 記号から数列の和に書き下して同一であることを確かめればよい．和はそれぞれ

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} 2^{k-1} = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

(3) $$\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot 2^{i-1} = 2 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-1}$$
$$= 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

となり，同じことを表現している.

1.4.2　Σ の性質

■Σ の性質

Σ を導入した理由は，数列の和を簡単に取り扱うためであった．つまり，

$3 + 1,\ 6 + 4,\ 9 + 9,\ \cdots,\ 3n + n^2$ ………………………… ①

のような等差数列でも等比数列でもない数列についても和を考えやすくするためである．その際，よく利用される Σ の計算法則があるので，まずはその計算法則を確認しよう.

Σ 記号に関して，次のことが成り立つ.

Σ 記号の性質

1) $\displaystyle\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k}$

2) $\displaystyle\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k}$ (c は定数)

【証明】

(1)
$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$
$$= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_n + b_n)$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + b_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$ ■

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} ca_k$$

$$= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_{n-1} + ca_n$$

$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n)$$

$$= c\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \blacksquare$$

これらは，それぞれ

1) Σ 記号は和のところで分配できる

2) Σ 記号内の実数倍は Σ 記号の表に出る

と意味をもたせて覚えるとよい．

この性質を利用すると，数列①の第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+k^2) = 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}k^2$$

と簡単にすることができる．

あとは $\sum_{k=1}^{n}k$ や $\sum_{k=1}^{n}k^2$ がわかれば，数列①の和を求めることができるわけであるが，これら $\sum_{k=1}^{n}k$ や $\sum_{k=1}^{n}k^2$ については次の『Σ 記号の公式』でまとめて学習することにしよう．

1.4.3　Σ 記号の公式

■Σ 記号の公式

複雑な数列の和が計算できるように，ここでは Σ 記号の公式を学んでいこう．

【 暗記 : 基本的な Σ の計算〜その１〜】

次の数列の和を求めよ．ただし，c は定数とする．

(1) $\sum_{k=1}^{n}c$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}k$

【解答】

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c = \underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{ 個}} = \boldsymbol{nc}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k = \underbrace{1+2+3+\cdots+n}_{n\text{ 個}} = \boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}}$

◀ n 個の c の和は nc である

◀ 初項 1，公差 1 の『等差数列の和』(p.12) である

【暗記：基本的な Σ の計算〜その２〜】

等式 $k(k+1) = \dfrac{1}{3}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$ を利用して

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を証明せよ.

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}\right]$$

◀ 等式を利用した

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \\
&= \frac{1}{3}\Big[\ (\cancel{1\cdot 2\cdot 3} - 0\cdot 1\cdot 2) \\
&\qquad + (\cancel{2\cdot 3\cdot 4} - \cancel{1\cdot 2\cdot 3}) \\
&\qquad + (\cancel{3\cdot 4\cdot 5} - \cancel{2\cdot 3\cdot 4}) \\
&\qquad + \cdots \\
&\qquad + \{\cancel{(n-1)n(n+1)} - \cancel{(n-2)(n-1)n}\} \\
&\qquad + \{n(n+1)(n+2) - \cancel{(n-1)n(n+1)}\}\ \Big]
\end{aligned}$$

◀ 数列を書き下すことにより項が相殺して消えていくことがわかる

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

なので

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\
\Leftrightarrow\ &\sum_{k=1}^{n}\left(k^2 + k\right) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\
\Leftrightarrow\ &\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\
\Leftrightarrow\ &\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \sum_{k=1}^{n} k
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}2n(n+1)(n+2) - \frac{1}{6}3n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \blacksquare$$

◀ $\frac{1}{6}$ で通分した

自然数の累乗の和

数列の和に関して，次の式がなりたつ．

1) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

2) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

3) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

4) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

【例題：Σの計算】

次の数列の和を求めよ．

(1) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)^2$

【解答】

(1)

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2+4k+1)$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n}k^2 + 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}$$

$$= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$+ 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$= \frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)$$

$$+6(n+1)+3\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(4n^2+12n+11)}$$

■等比数列の Σ 計算

c は定数として，$\sum c^{(k\text{ の 1 次式})}$ タイプの和は，すべて『等比数列の和』(p.19) として求めることができる．

【例題：等比数列の Σ 計算】

次の数列の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$　(3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$　(4) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 3^{k-1}$　(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1}$

【解答】

(1) $$\sum_{k=1}^{n} 3^k = \underbrace{3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n}_{n\text{ 個}} = \frac{3(1-3^n)}{1-3} = \boldsymbol{\frac{3(3^n-1)}{2}}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \underbrace{3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}}_{n-1\text{ 個}} = \frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} = \boldsymbol{\frac{3(3^{n-1}-1)}{2}}$$

(3) $$\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = \underbrace{3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^n}_{n-2\text{ 個}} = \frac{3^2(1-3^{n-2})}{1-3} = \boldsymbol{\frac{9(3^{n-2}-1)}{2}}$$

(4) $$\sum_{k=2}^{n} 3^{k-1} = \underbrace{3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}}_{n-1\text{ 個}} = \frac{3(1-3^n)}{1-3} = \boldsymbol{\frac{3(3^n-1)}{2}}$$

◀ (2) と同じ答えである

(5) $$\sum_{k=1}^{n} 3^{2k} = \underbrace{3^2 + 3^4 + 3^6 + \cdots + 3^{2n}}_{n\text{ 個}}$$
$$= 9+9^2+9^3+\cdots+9^n = \frac{9(1-9^n)}{1-9} = \boldsymbol{\frac{9(9^n-1)}{8}}$$

繰り返しになるが，$\sum c^{(k\text{ の 1 次式})}$ タイプの和は，『等比数列の和』(p.19) として求めることができる．和を求める際には，数列の和を一度書き下してみて，初項と公比と項数をチェックすればよい．

§ 1.5

いろいろな数列

ここでは，これまでの和の求め方を簡単におさらいした上で，$(n+1)\cdot 2^n$（等差数列 × 等比数列）や $\dfrac{1}{n(n+1)}$（分数列）のような形で一般項が与えられている数列の和の求め方を学ぶ.

1.5.1　a_n =(等差数列の項)×(等比数列の項)

■a_n =(等差数列の項)×(等比数列の項) の和

一般項 a_n が

$$a_n = n\cdot 2^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で与えられる数列は，具体的に書くと

$$\overset{\boxed{1}}{1\cdot 2^0},\ \overset{\boxed{2}}{2\cdot 2^1},\ \overset{\boxed{3}}{3\cdot 2^2},\ \overset{\boxed{4}}{4\cdot 2^3},\ \overset{\boxed{5}}{5\cdot 2^4},\ \overset{\boxed{6}}{6\cdot 2^5},\ \cdots$$

となる[*5].

この①のように，(等差数列) × (等比数列) で表される数列の，初項から第 n 項までの和は次のように求めることができる[*6].

STEP1

初項から第 n 項までの和 S_n を書き下す.

$$S_n = \underbrace{1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + (n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1}}_{n\ \text{個の項}}$$

STEP2

この式の辺々を 2 倍（公比倍）した式を書く.

$$2S_n = \underbrace{1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + (n-1)\cdot 2^{n-1} + n\cdot 2^n}_{n\ \text{個の項}}$$

STEP3

上の 2 つの式を並べる．このとき，下のように，2 倍（公比倍）した式の方を右に 1 段ずらして書いておく.

$$\begin{array}{rclllllll} S_n & = & 1 & +2\cdot 2 & +3\cdot 2^2 & +\cdots & +(n-1)\cdot 2^{n-2} & +n\cdot 2^{n-1} & \\ 2S_n & = & & 1\cdot 2 & +2\cdot 2^2 & +\cdots & +(n-2)\cdot 2^{n-2} & +(n-1)\cdot 2^{n-1} & +n\cdot 2^n \end{array}$$

[*5] この数列は，各項の左側の数字は初項 1，公差 1 の等差数列になっていて，各項の右側の数字は初項 1，公比 2 の等比数列になっている.

[*6] 以下，**STEP4** までは，等比数列の和の求め方 (p.18) とまったく同じである.

STEP4

上の式から下の式を引く.

$$\begin{array}{rrcllllll} & S_n & = & 1 & +2\cdot 2 & +3\cdot 2^2 & +\cdots & +(n-1)\cdot 2^{n-2} & +n\cdot 2^{n-1} & \\ -) & 2S_n & = & & 1\cdot 2 & +2\cdot 2^2 & +\cdots & +(n-2)\cdot 2^{n-2} & +(n-1)\cdot 2^{n-1} & +n\cdot 2^n \\ \hline & -S_n & = & 1 & +1\cdot 2 & +1\cdot 2^2 & +\cdots & +1\cdot 2^{n-2} & +1\cdot 2^{n-1} & -n\cdot 2^n \end{array}$$

STEP5

このとき，必ず等比数列の和が現れるので，その部分を計算する.

$$\begin{aligned} -S_n &= \underbrace{1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2^2 + \cdots + 1\cdot 2^{n-2} + 1\cdot 2^{n-1}}_{\text{初項 1 公比 2 の等比数列}} - n\cdot 2^n \\ &= \frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2} - n\cdot 2^n \\ &= 2^n - 1 - n\cdot 2^n \\ &= -\,(n-1)2^n - 1 \end{aligned}$$

式全体に -1 を掛けて

$$S_n = (n-1)2^n + 1$$

を得る.

解法をまとめておこう.

a_n = (等差数列の項) × (等比数列の項) の和の解法

STEP1：和を書き下す.

STEP2：和を公比倍したものを書く.

STEP3：上の 2 式をずらして並べる.

STEP4：項のかたまりを崩さないように差をとる.

STEP5：等比数列の和を見つけて計算し，S_n を求める.

【例題：等差×等比型数列の和〜その１〜】

次の和 S を求めよ.

$$S = 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^{n-1}$$

【解答】

公比を掛けて差をとると

$$\begin{aligned} S &= 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^{n-1} \\ 2S &= 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + (2n-3)\cdot 2^{n-1} + (2n-1) + 2^n \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} -S &= 1 + 2(2 + 2^2 + \cdots 2^{n-1}) - (2n-1)\cdot 2^n \\ &= 1 + 2\cdot\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - (2n-1)\cdot 2^n \end{aligned}$$

$$= 1 + 2 \cdot (2^n - 2) - (2n - 1) \cdot 2^n$$
$$= -3 - (2n - 3)2^n$$

よって，$\boldsymbol{S = 3 + (2n - 3) \cdot 2^n}$ である．

【例題：等差 × 等比型数列の和〜その２〜】

次の和 S を求めよ．

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

【解答】

$x = 1$，$x \neq 1$ で場合わけを行なう．

1) $x = 1$ のとき

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

2) $x \neq 1$ のとき

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$
$$xS = x + 2x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$$

より

$$(1 - x)S = 1 + (x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) - nx^n$$
$$= 1 + \frac{x(1 - x^{n-1})}{1 - x} - nx^n$$

◀ 初項 x，公比 x，項数 $n - 1$ の等比数列の和

よって

$$S = \frac{1 - nx^n}{1 - x} + \frac{x(1 - x^{n-1})}{(1 - x)^2}$$
$$= \frac{(1 - nx^n)(1 - x) + x(1 - x^{n-1})}{(1 - x)^2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}}$$

1.5.2 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

■分数列の和

一般項 a_n が

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で与えられる数列は，具体的に書くと

$$\overset{\boxed{1}}{\frac{1}{1\cdot 2}},\ \overset{\boxed{2}}{\frac{1}{2\cdot 3}},\ \overset{\boxed{3}}{\frac{1}{3\cdot 4}},\ \overset{\boxed{4}}{\frac{1}{4\cdot 5}},\ \overset{\boxed{5}}{\frac{1}{5\cdot 6}},\ \overset{\boxed{6}}{\frac{1}{6\cdot 7}},\ \cdots$$

となる[*7]．

この①のように，一般項 $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ で表される数列の，初項から第 n 項までの和は次のように求めることができる

STEP1

まず $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ を分解する．このとき，下のように自分で a とおく（a の値は後で求める）．

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} - \frac{a}{n+1} \qquad \leftarrow \text{分母の } n(n+1) \text{ を分解して } n \text{ と } n+1 \text{ にする}$$

このような式変形を，**部分分数分解** (resolve into partial fractions) という．

STEP2

右辺を通分し，$\dfrac{1}{n(n+1)}$ と等しくなるように a を決定する．

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{n} - \frac{a}{n+1}\\
=&\frac{a(n+1)}{n(n+1)} - \frac{an}{n(n+1)} \qquad \leftarrow \frac{1}{n(n+1)} \text{ で通分した}\\
=&\frac{a}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

これが，$\dfrac{1}{n(n+1)}$ と等しくなるのは，(分子を比較して)$a = 1$ のときである．これより

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \leftarrow \text{分解が完了した}$$

という等式を得る．

STEP3

右辺の式を利用して，初項から第 n 項までの和を，具体的に書き出してみる．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

STEP4

相殺して消える部分ができるので，下のように消していく．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

[*7] この数列は，各項の分母の左側の数字は初項 1，公差 1 の等差数列になっていて，各項の分母の右側の数字は初項 2，公差 1 の等比数列になっている．

$$
\begin{aligned}
&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\\
&=\frac{n}{n+1}
\end{aligned}
$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$$

を得る．

解法をまとめておこう．

$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ の数列の和の解法

STEP1：部分分数に分解する．

STEP2：部分分数の係数を決定する．

STEP3：具体的に和を書き出してみる．

STEP4：相殺して消える部分があるので消し，S_n を求める．

【例題：分数数列の和】

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ．

$$\frac{1}{1\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 5},\ \frac{1}{5\cdot 7},\cdots$$

【解答】

一般項を求めて部分分数に分解する．

一般項 $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}&=\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{n}{2n+1}$$

§ 1.6

階差数列

ここでは複雑な数列に対して，隣り合う 2 項間の差に注目して，与えられた数列の一般項を求めるやり方を学ぶ.

1.6.1　階差数列の定義

■階差数列とは何か

下の数列の第 n 項をいきなり求めるのは，少し難しい.

①　②　③　④　⑤　⑥
2，6，12，20，30，?，$\cdots$

このように一般項がすぐに把握できない場合は，隣り合った項の差をとって，新たな数列をつくってみるとうまくいくことがある．まず新しく作られる数列について確認しよう.

①　②　③　④　⑤
2 , 6 , 12 , 20 , 30 , $\cdots$
⤻　⤻　⤻　⤻　⤻
+4 , +6 , +8 , +10, $\boxed{X}$

隣り合った項の差に注目すると，たとえば X は 12 と予想できるので，第 6 項は $30 + 12 = 42$ と求めることができる.

階差数列の定義

数列 $\{a_n\}$ に対して

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

となる数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の**階差数列** (progression of differences) という.

この例では，階差数列 $\{b_n\}$ は，初項 4，公差 2 の等差数列になっているので

$$b_n = 4 + (n - 1) \times 2 = 2n + 2$$

と表せる.

【例題：階差数列の定義】

数列 1，2，6，13，23，36 の階差数列を書け.

【解答】

階差数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$b_2 = a_3 - a_2 = 6 - 2 = 4$$

$$b_3 = a_4 - a_3 = 13 - 6 = 7$$

$$b_4 = a_5 - a_4 = 23 - 13 = 10$$

$$b_5 = a_6 - a_5 = 36 - 23 = 13$$

よって，階差数列は {1，4，7，10，13} で与えられる．

1.6.2　階差数列から一般項を求める

■階差数列の一般項

次に，本題であった数列 $\{a_n\}$ を求めよう．

$$\overset{\text{①}}{2}\ ,\ \overset{\text{②}}{6}\ ,\ \overset{\text{③}}{12}\ ,\ \overset{\text{④}}{20}\ ,\ \overset{\text{⑤}}{30}\ ,\ \cdots\ ,\ a_n\ ,\ a_{n+1}\ ,\ \cdots\ \leftarrow \text{数列}\ \{a_n\}$$

$$\curvearrowright\quad \curvearrowright\quad \curvearrowright\quad \curvearrowright\quad \curvearrowright\quad \cdots\quad \curvearrowright$$

$$\underset{b_1}{4}\ ,\ \underset{b_2}{6}\ ,\ \underset{b_3}{8}\ ,\ \underset{b_4}{10}\ ,\ \underset{b_5}{12}\ ,\ \cdots\ ,\underset{b_n}{2n+2},\ \cdots\qquad \leftarrow \text{数列}\ \{b_n\}$$

階差数列の一般項 b_n がわかった場合，そこから a_n を以下のようにして求めることができる．

上の数列から

$$a_2 = \overset{\text{①}}{2} + \overset{b_1}{4}$$

$$a_3 = \overset{\text{①}}{2} + \overbrace{(4 + 6)}^{b_1+b_2}$$

$$a_4 = \overset{\text{①}}{2} + \overbrace{(4 + 6 + 8)}^{b_1+b_2+b_3}$$

$$a_5 = \overset{\text{①}}{2} + \overbrace{(4 + 6 + 8 + 10)}^{b_1+b_2+b_3+b_4}$$

$$\vdots$$

であるから，a_n は「a_1 に b_1 から b_{n-1} までの $n-1$ 項を加えたもの」とわかる．よって，$n \geqq 2$ [*8]のとき第 n 項は

$$\begin{aligned} a_n =& \overset{\text{①}}{2} + \overbrace{\left[4 + 6 + 8 + 10 + 12 + \cdots + \left\{2(n-1) + 2\right\}\right]}^{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}} \\ =& a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \end{aligned}$$

として求めることができる．

以上，まとめておこう．

[*8] a_1 に 1 個以上の階差を加えて a_n を求めているので，この a_n は $n = 1$ の場合である a_1 を表現することができない．

階差数列 $\{b_n\}$ から一般項 a_n を求める

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと，$n \geqq 2$ のとき一般項 a_n は

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

と求めることができる．

【例題：階差数列 $\{b_n\}$ から一般項 a_n を求める】

次の数列の一般項 a_n を求めよ．

$1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26, \cdots$

【解答】

階差数列 $\{b_n\} = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \cdots$ より

$$b_n = 2n - 1$$

よって $n \geqq 2$ において

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) \\ &= n^2 - 2n + 2 \end{aligned}$$

$n = 1$ を代入したとき $1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$ となり，a_1 と等しくなるので，$n \geqq 1$ において $\boldsymbol{a_n = n^2 - 2n + 2}$ と表せる．

§ 1.7

和から一般項へ

今までは，まず数列の一般項 a_n を求めてから，その初項から第 n 項までの和 S_n を求めるという手順を踏んできた．今度は逆に，和 S_n が先にわかっている場合に，和 S_n から一般項 a_n を求める方法について考えてみよう．

1.7.1　和から一般項へ

■和から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

ここでたとえば，$S_3 = 9$ であり，$S_4 = 16$ であるとき

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

であるから，上の式から下の式を引くと

$$S_4 - S_3 = a_4$$

を得る．よって，$a_4 = S_4 - S_3 = 16 - 9 = 7$ であることがわかる．

一般に，初項から第 n 項までの和 S_n から，初項から第 $n-1$ 項までの和 S_{n-1} を引くことにより，第 n 項 a_n を求めることができる．つまり

$$\begin{array}{rrcl} & S_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ -) & S_{n-1} & = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \\ \hline & S_n - S_{n-1} & = & a_n \end{array}$$

と求めることができる．

ただし，この式が意味をもつのは $n \geqq 2$ においてである．[9] a_1 は別に求めなければならないが，$a_1 = S_1$ からすぐに求めることができる．

和 S_n から一般項 a_n を求める式

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n - S_{n-1} = a_n \quad (n \geqq 2)$$
$$S_1 = a_1$$

として，一般項 a_n を求めることができる．

---

[9] $n = 1$ のとき，S_{n-1} は S_0 となり，これは S_n の定義上存在しないので，上記の式が意味を持たなくなってしまう．

【例題：数列の和から一般項を求める】

初項から第 n 項までの和が次の式で表される数列の第 n 項を求めよ

$$S_n = n^3$$

【解答】

$n \geqq 2$ において

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^3 - (n-1)^3 \\ &= 3n^2 - 3n + 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

ここで，$a_1 = S_1 = 1$ であり，①は $n = 1$ のときでも成立する．よって，$n = 1$ において $\boldsymbol{a_n = 3n^2 - 3n + 1}$ となる．

§ 1.8

群数列

ここでは数列として並んでいる数をグループ分けした数列，群数列について学ぶ．

1.8.1　群数列の定義

■群数列とは何か

下の数列のように，いくつかのまとまりで数列を考えたものを**群数列** () という．

$$(\overset{\text{①}}{1}),\ (\overset{\text{②}}{3},\ \overset{\text{③}}{5},\ \overset{\text{④}}{7}),\ (\overset{\text{⑤}}{9},\ \overset{\text{⑥}}{11},\ \overset{\text{⑦}}{13},\ \overset{\text{⑧}}{15},\ \overset{\text{⑨}}{17}),\ (\overset{\text{⑩}}{19},\ \cdots$$

群数列では，次のように各群に番号をつけ，「第〜群」と呼ぶことにしよう．

$$(\overbrace{\ \overset{\text{①}}{1}\ }^{\text{❶}}),\ (\overbrace{\overset{\text{②}}{3},\ \overset{\text{③}}{5},\ \overset{\text{④}}{7}}^{\text{❷}}),\ (\overbrace{\overset{\text{⑤}}{9},\ \overset{\text{⑥}}{11},\ \overset{\text{⑦}}{13},\ \overset{\text{⑧}}{15},\ \overset{\text{⑨}}{17}}^{\text{❸}}),\ (\overbrace{\overset{\text{⑩}}{19},\ \cdots\qquad\qquad}^{\text{❹}}$$

たとえば

第 3 群は (9, 11, 13, 15, 17) である．

第 4 群の一番初めの項は，19 である．

などのように用いる．

また

$$\overset{\text{①}}{\frac{1}{2}},\ \overset{\text{②}}{\frac{2}{3}},\ \overset{\text{③}}{\frac{1}{3}},\ \overset{\text{④}}{\frac{3}{4}},\ \overset{\text{⑤}}{\frac{2}{4}},\ \overset{\text{⑥}}{\frac{1}{4}},\ \overset{\text{⑦}}{\frac{4}{5}},\ \overset{\text{⑧}}{\frac{3}{5}},\ \overset{\text{⑨}}{\frac{2}{5}},\ \overset{\text{⑩}}{\frac{1}{5}},\ \overset{\text{⑪}}{\frac{5}{6}},\ \cdots$$

のように，群で区切られてなくても，数列に何らかのまとまりがある場合には，下のように仕切りを入れて，自分で群にまとめるとよい．そうすることで群内の規則に注目でき，解答を進めることができるようになる．

$$\overbrace{\left(\overset{\text{①}}{\frac{1}{2}}\right)}^{\text{❶}},\ \overbrace{\left(\overset{\text{②}}{\frac{2}{3}},\ \overset{\text{③}}{\frac{1}{3}}\right)}^{\text{❷}},\ \overbrace{\left(\overset{\text{④}}{\frac{3}{4}},\ \overset{\text{⑤}}{\frac{2}{4}},\ \overset{\text{⑥}}{\frac{1}{4}}\right)}^{\text{❸}},\ \overbrace{\left(\overset{\text{⑦}}{\frac{4}{5}},\ \overset{\text{⑧}}{\frac{3}{5}},\ \overset{\text{⑨}}{\frac{2}{5}},\ \overset{\text{⑩}}{\frac{1}{5}}\right)}^{\text{❹}},\ \overbrace{\left(\overset{\text{⑪}}{\frac{5}{6}},\ \cdots\qquad\qquad\right.}^{\text{❺}}$$

1.8.2　群数列の基本的な考え方

■群数列を考える際のポイント

群数列を見たら，問題を考える前に，まず次の 2 つの点について調べておくとよい．

(1) 第 n 項 a_n がわかるときは求めておく．

(2) 第 1 群から第 n 群までにいくつの項があるのか調べその数を l_n とおく．

前ページの例で調べてみよう．

$$\overbrace{(\ \overset{\text{①}}{1}\ )}^{\text{❶}},\ \overbrace{(\overset{\text{②}}{3},\ \overset{\text{③}}{5},\ \overset{\text{④}}{7})}^{\text{❷}},\ \overbrace{(\overset{\text{⑤}}{9},\ \overset{\text{⑥}}{11},\ \overset{\text{⑦}}{13},\ \overset{\text{⑧}}{15},\ \overset{\text{⑨}}{17})}^{\text{❸}},\ \overbrace{(\overset{\text{⑩}}{19},\ \cdots\qquad\qquad}^{\text{❹}}$$

この数列は，初項 1 公差 2 の等差数列であるから

$$a_n = 1 + (n - 1) \times 2 = 2n - 1$$

とわかる．

また，第 1 群には項が 1 個，第 2 群には項が 3 個，第 3 群には項が 5 個，$\cdots$，第 n 群には項が $2n - 1$ 個あるのがわかる．よって，第 1 群から第 n 群までに含まれる項の数 l_n は

$$l_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$$

と求まる．

もう 1 つの例でも試してみよう．

$$\overbrace{\left(\overset{\text{①}}{\frac{1}{2}}\right)}^{\text{❶}},\ \overbrace{\left(\overset{\text{②}}{\frac{2}{3}},\ \overset{\text{③}}{\frac{1}{3}}\right)}^{\text{❷}},\ \overbrace{\left(\overset{\text{④}}{\frac{3}{4}},\ \overset{\text{⑤}}{\frac{2}{4}},\ \overset{\text{⑥}}{\frac{1}{4}}\right)}^{\text{❸}},\ \overbrace{\left(\overset{\text{⑦}}{\frac{4}{5}},\ \overset{\text{⑧}}{\frac{3}{5}},\ \overset{\text{⑨}}{\frac{2}{5}},\ \overset{\text{⑩}}{\frac{1}{5}}\right)}^{\text{❹}},\ \overbrace{\left(\overset{\text{⑪}}{\frac{5}{6}},\ \cdots\qquad\qquad\right.}^{\text{❺}}$$

この例で第 n 項はすぐにわかりそうにない．

また，第 1 群には項が 1 個，第 2 群には項が 2 個，第 3 群には項が 3 個，$\cdots$，第 n 群には項が n 個あるのがわかる．よって，第 1 群から第 n 群までに含まれる項の数 l_n は

$$l_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n + 1)}{2}$$

これら 2 つのポイントを押さえると，群数列の問題が考えやすくなる．

【例題：群数列】

次の数列について各問題に答えよ

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{5}{6}$$

(1) $\dfrac{18}{25}$ ははじめから数えて第何項目にあるか.

(2) はじめから数えて第 666 項目にある分数は何か.

(3) 初項から第 666 項までの和を求めよ.

【解答】

(1) 次のように群分けをおこなう.

$$\overbrace{\left(\overset{\textcircled{1}}{\frac{1}{2}}\right)}^{\text{❶}},\ \overbrace{\left(\overset{\textcircled{2}}{\frac{2}{3}},\ \overset{\textcircled{3}}{\frac{1}{3}}\right)}^{\text{❷}},\ \overbrace{\left(\overset{\textcircled{4}}{\frac{3}{4}},\ \overset{\textcircled{5}}{\frac{2}{4}},\ \overset{\textcircled{6}}{\frac{1}{4}}\right)}^{\text{❸}},\ \overbrace{\left(\overset{\textcircled{7}}{\frac{4}{5}},\ \cdots\right.}^{\text{❹}}$$

規則より，$\dfrac{18}{25}$ は第 24 群に存在していることがわかる．第 n 群に含まれる項数が n であることを考えると，第 23 群までの項数は

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+23 &= \frac{1}{2}\cdot 23(1+23)\\ &= 276\end{aligned}$$

よって，第 24 群の第 1 項は，最初から数えて 277 番目になる．$\dfrac{18}{25}$ は第 24 群の第 7 項なので

$$277+7-1=283$$

以上より，$\dfrac{18}{25}$ は最初から数えて **283**番目 の項となる.

(2) 第 666 項が含まれる群を求める．666 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\begin{aligned}&(\text{第 } n-1 \text{ 群までの項数}) < 666\\ &\qquad < (\text{第 } n \text{ 群までの項数})\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}(n-1)n < 666 < \frac{1}{2}n(n+1)\end{aligned}$$

これを満たす n は $n=36$ である．$\dfrac{1}{2}(36-1)35=630$ より，第 36 群の第 1 項は，最初から数えて 631 番目である．$666-631+1=36$ なので，最初から数えて

第 666 項目の分数は，第 36 群の第 36 であり，**1**37

(3) 第 n 群に含まれる項の和 S_n は

$$\begin{aligned} S &= \frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1}\{n + (n+1) + \cdots + 1\} \\ &= \frac{1}{n+1}(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

よって，第 666 項までの和は第 36 群までの和で

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{36} \frac{k}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} 36 \cdot 37 \\ &= \mathbf{333} \end{aligned}$$

§ 1.9

数列の増加と減少

ここでは，数列の増加と減少を調べる方法を考えてみよう．

1.9.1　数列の増加と減少

■数列の増加と減少

たとえば，数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で与えられるとき，この数列の増加や減少の様子はどうなるだろうか.

試しに，①の n に $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \cdots$ を代入し，計算してみると

$$a_1 = 1\left(\frac{5}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \fallingdotseq \mathbf{0.167}$$

$$a_2 = 2\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{18} \fallingdotseq \mathbf{0.278}$$

$$a_3 = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{72} \fallingdotseq \mathbf{0.347}$$

$$a_4 = 4\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{125}{324} \fallingdotseq \mathbf{0.386}$$

$$a_5 = 5\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3125}{7776} \fallingdotseq \mathbf{0.402}$$

$$a_6 = 6\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3125}{7776} \fallingdotseq \mathbf{0.402}$$

$$a_7 = 7\left(\frac{5}{6}\right)^6\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{109375}{279936} \fallingdotseq \mathbf{0.391}$$

$$a_8 = 8\left(\frac{5}{6}\right)^7\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{78125}{209952} \fallingdotseq \mathbf{0.372}$$

$$\vdots$$

となるので，数列 $\{a_n\}$ は n が 1 から 5 までは増加し，6 から先では減少するのがわかる.

しかし，このような方法では，すべての自然数 n について調べるのは不可能である.

そこで，$a_{n+1} - a_n$ という漸化式をつくってみよう.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right) - n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right) - n\cdot\frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right)\{5(n+1)-6n\} \\
&= \underbrace{\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right)}_{\text{正}}\underbrace{(5-n)}_{A}
\end{aligned}
$$

この式の A の部分に着目すると

1) $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のときは，$a_{n+1} - a_n$ が正，つまり $a_n < a_{n+1}$ となるから

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$$

がわかる．

2) $n = 5$ のときは，$a_{n+1} - a_n$ が 0，つまり $a_n = a_{n+1}$ となるから

$$a_5 = a_6$$

がわかる．

3) $n = 6,\ 7,\ 8,\ \cdots$ のときは，$a_{n+1} - a_n$ が負，つまり $a_n > a_{n+1}$ となるから

$$a_6 > a_7 > a_8 > \cdots$$

がわかる．

以上，1)〜3) より

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_5 = a_6 > a_7 > a_8 > \cdots$$

となるのがわかる．

以上，まとめておこう．

数列の増加・減少を調べる方法

一般項 a_n に関する漸化式

$$a_{n+1} - a_n$$

をつくり，この値の正，負，0 を調べることにより，数列 $\{a_n\}$ の増減がわかる．

【例題：数列の増減】

$a_n = n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ の増減を調べよ

【解答】

一般項 a_n に関する漸化式をつくると

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= (n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{4} - n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4}\left\{\frac{3}{4}(n+1) - n\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}n + \frac{3}{4}\right)$$

よって

$a_{n+1} - a_n > 0$ を満たす n は，$n < 3$

$a_{n+1} - a_n = 0$ を満たす n は，$n = 3$

$a_{n+1} - a_n < 0$ を満たす n は，$n > 3$

すなわち，$\boldsymbol{a_1 < a_2 < a_3 = a_4 > a_5 > a_6 > a_7 > \cdots}$ となる．

§ 1.10

補足

ここでは補足として p.27 で示した自然数の累乗の和を別の方法で導いてみよう．

1.10.1　$a_n = n(n+1)$，$a_n = n^2$ タイプの数列の和

■ $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$ の求め方

一般項 a_n が

$$a_n = n(n+1)$$

で与えられる数列は，具体的に書くと

$$\overset{\boxed{1}}{1} \cdot 2,\ \overset{\boxed{2}}{2} \cdot 3,\ \overset{\boxed{3}}{3} \cdot 4,\ \overset{\boxed{4}}{4} \cdot 5,\ \overset{\boxed{5}}{5} \cdot 6,\ \overset{\boxed{6}}{6} \cdot 7,\ \cdots$$

となる[10]．このように，『2 つの連続した数の積』[11]で表される数列の，初項から第 n 項までの和は次のような手順で求めることができる．

STEP1

$a_n = n(n+1)$ の 2 連続数に着目して，n，$n+1$ の“続き”である $n+2$ を a_n に掛けたものから，n，$n+1$ の“1 つ前”である $n-1$ を a_n に掛けたものを引く

$$\underbrace{n(n+1)}_{a_n}(n+2) - (n-1)\underbrace{n(n+1)}_{a_n}$$

STEP2

共通因数 $n(n+1)$ のかたまりを崩さないようにまとめ，$n(n+1)$ について解く．

$$\begin{aligned}
&n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)\\
=&n(n+1)\{(n+2) - (n-1)\}\\
=&3n(n+1)
\end{aligned}$$

よって

$$n(n+1) = \frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)\}$$

STEP3

---

[10] この数列は，各項の左側の数字に着目すると，“初項 1，公差 1 の等差数列”になっていて，各項の右側の数字だけに着目すると，“初項 2，公差 1 の等差数列”になっている．

[11] 単に，『2 連続数の積』ともいう．

この関係式を利用して，初項から第 n 項までの和を，具体的に書き出してみる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\\
=&\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\right]\\
=&\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\\
=&\frac{1}{3}\Big[(1\cdot 2\cdot 3-0\cdot 1\cdot 2)+(2\cdot 3\cdot 4-1\cdot 2\cdot 3)+(3\cdot 4\cdot 5-2\cdot 3\cdot 4)+\cdots\\
&\cdots+\{(n-1)n(n+1)-(n-2)(n-1)n\}+\{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\}\Big]
\end{aligned}$$

STEP4

相殺して消える部分ができるので，下のように消していくと，和が求まる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\\
=&\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\right]\\
=&\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\\
=&\frac{1}{3}\Big[(\cancel{1\cdot 2\cdot 3}-0\cdot 1\cdot 2)+(\cancel{2\cdot 3\cdot 4}-\cancel{1\cdot 2\cdot 3})+(\cancel{3\cdot 4\cdot 5}-\cancel{2\cdot 3\cdot 4})+\cdots\\
&\cdots+\{\cancel{(n-1)n(n+1)}-\cancel{(n-2)(n-1)n}\}+\{n(n+1)(n+2)-\cancel{(n-1)n(n+1)}\}\Big]\\
=&\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

以上，まとめておこう．

2 連続数の積の数列の和

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

■ $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ の求め方

一般項 a_n が

$$a_n = n^2$$

で与えられる数列は，具体的に書くと

$$\overset{\boxed{1}}{1^2},\ \overset{\boxed{2}}{2^2},\ \overset{\boxed{3}}{3^2},\ \overset{\boxed{4}}{4^2},\ \overset{\boxed{5}}{5^2},\ \overset{\boxed{6}}{6^2},\ \cdots$$

となる[*12]．このように，『$a_n = n^2$』で表される数列の，初項から第 n 項までの和は次のような手順で求めることができる．

STEP1

2 連続数の積の数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

を思い出す．

STEP2

左辺の $\sum$ の中の式を展開すると，$k^2 + k$ になるから，k の項を右辺に移項する．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \sum_{k=1}^{n} k
\end{aligned}$$

STEP3

右辺の $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ を計算し，共通因数でまとめると和の公式が求まる．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \sum_{k=1}^{n} k\\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1)\\
&= \frac{1}{6}2n(n+1)(n+2) - \frac{1}{6}3n(n+1) \qquad \leftarrow \frac{1}{6}\text{ で通分}\\
&= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\}\\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

以上，まとめておこう．

[*12] この数列は，(初項 1，公差 1 の等差数列)^2 になっている．

一般項が $a_n = n^2$ の数列の和

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

1.10.2　$a_n = n(n+1)(n+2)$，$a_n = n^3$ タイプの数列の和

■ $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ の求め方

一般項 a_n が

$$a_n = n(n+1)(n+2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で与えられる数列は，具体的に書くと

$$1\cdot\overset{\boxed{1}}{2}\cdot 3,\ 2\cdot\overset{\boxed{2}}{3}\cdot 4,\ 3\cdot\overset{\boxed{3}}{4}\cdot 5,\ 4\cdot\overset{\boxed{4}}{5}\cdot 6,\ 5\cdot\overset{\boxed{5}}{6}\cdot 7,\ 6\cdot\overset{\boxed{6}}{7}\cdot 8,\ \cdots$$

となる．[*13]

この①のように，『3 つの連続した数の積』[*14]で表される数列の，初項から第 n 項までの和は次のように求めることができる．

STEP1

$a_n = n(n+1)(n+2)$ の 3 連続数に着目して，n，$n+1$，$n+2$ の“続き”である $n+3$ を a_n に掛けたものから，n，$n+1$，$n+2$ の“1 つ前”である $n-1$ を a_n に掛けたものを引く

$$\underbrace{n(n+1)(n+2)}_{a_n}(n+3)-(n-1)\underbrace{n(n+1)(n+2)}_{a_n}$$

STEP2

共通因数 $n(n+1)(n+2)$ のかたまりを崩さないようにまとめ，$n(n+1)(n+2)$ について解く．

$$\begin{aligned}&\ n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)\\ =&n(n+1)(n+2)\{(n+3)-(n-1)\}\\ =&4n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

よって

$$n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}\{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\}$$

STEP3

この関係式を利用して，初項から第 n 項までの和を，具体的に書き出してみる．

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\\ =&\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}\right]\end{aligned}$$

[*13] この数列は，各項の左側の数字に着目すると，“初項 1，公差 1 の等差数列”になっていて，各項の中央の数字だけに着目すると，“初項 2，公差 1 の等差数列”になっていて，各項の右側の数字だけに着目すると，“初項 3，公差 1 の等差数列”になっている．

[*14] 単に，『3 連続数の積』ともいう．

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

$$=\frac{1}{4}\Big[(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4-0\cdot 1\cdot 2\cdot 3)+(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)+(3\cdot 4\cdot 5\cdot 6-2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)+\cdots$$

$$\cdots+\{(n-1)n(n+1)(n+2)-(n-2)(n-1)n(n+1)\}+\{n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)\}\Big]$$

STEP4

相殺して消える部分ができるので，下のように消していくと，和が求まる．

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

$$=\frac{1}{4}\Big[(\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-0\cdot 1\cdot 2\cdot 3)+(\cancel{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4})+(\cancel{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}-\cancel{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5})+\cdots$$

$$\cdots+\{\cancel{(n-1)n(n+1)(n+2)}-\cancel{(n-2)(n-1)n(n+1)}\}+\{n(n+1)(n+2)(n+3)-\cancel{(n-1)n(n+1)(n+2)}\}\Big]$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

以上，まとめておこう．

3 連続数の積の数列の和

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

■ $\sum_{k=1}^{n} k^3$ の求め方

一般項 a_n が

$$a_n = n^3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

で与えられる数列は，具体的に書くと

$$\overset{\boxed{1}}{1^3},\ \overset{\boxed{2}}{2^3},\ \overset{\boxed{3}}{3^3},\ \overset{\boxed{4}}{4^3},\ \overset{\boxed{5}}{5^3},\ \overset{\boxed{6}}{6^3},\ \cdots$$

となる[*15]．

この②のように，『$a_n = n^3$』で表される数列の，初項から第 n 項までの和は次のように求めることができる．

STEP1

3 連続数の積の数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

を思い出す．

STEP2

左辺の $\sum$ の中の式を展開すると，$k^2 + 3k + 2k$ になるから，$3k^2 + 2k$ の項を右辺に移項する．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \left(k^3 + 3k^2 + 2k\right) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 2k) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 2k)\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k
\end{aligned}$$

STEP3

右辺の $\sum_{k=1}^{n} k^2$ と $\sum_{k=1}^{n} k$ を計算し，共通因数でまとめると和の公式が求まる．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) - n(n+1)\\
&= \frac{1}{8}2n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{8}4n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{8}8n(n+1) \qquad \leftarrow \frac{1}{8}\ \text{で通分}\\
&= \frac{1}{8}n(n+1)\left\{2(n+2)(n+3) - 4(2n+1) - 8\right\}
\end{aligned}$$

[*15] この数列は，(初項 1，公差 1 の等差数列)^3 になっている．

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{8}n(n+1)\left\{2(n^2+5n+6)-8n-4-8\right\}\\
&=\frac{1}{8}n(n+1)\left\{2n^2+10n+12-8n-4-8\right\}\\
&=\frac{1}{8}n(n+1)\left\{2n^2+2n\right\}\\
&=\frac{1}{8}n(n+1)\{2n(n+1)\}\\
&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2
\end{aligned}
$$

以上，まとめておこう．

一般項が $a_n = n^3$ の数列の和

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$ と覚えるとよい．

1.10.3　$a_n = \overbrace{n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))}^{m\text{個}}$ と $a_n = n^m$ タイプの数列の和

1.10.1 と 1.10.2 の発展形として，次のような数列を考えてみよう．

$$\overbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-1)\cdot m}^{1\text{ 番目}},\ \overbrace{2\cdot 3\cdot 4\cdots m\cdot(m+1)}^{2\text{ 番目}},\ \overbrace{3\cdot 4\cdot 5\cdots(m+1)\cdot(m+2)}^{3\text{ 番目}},\ \cdots$$

(1) の数列は，各項の 1 番左側に着目すると，“初項 1，公差 1 の等差数列” になっている．また，各項の左から 2 番目だけに着目すると，“初項 2，公差 1 の等差数列” になっている．$\cdots$．最後に，各項の一番右側だけに着目すると，“初項 m，公差 1 の等差数列” になっている．よって，一般項 a_n は

$$a_n = \overbrace{n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))}^{m\text{ 個の連続数の積}}$$

と表すことができる．

この (1) の数列のように，『m 個の連続数の積[16]』で表される数列の初項から第 n 項までの和は次のように求めることができる．

STEP1

$a_n = n(n+1)(n+2)$ の 3 連続数に着目して，n，$n+1$，$n+2$，$\cdots$，$n+(m-1)$ の “続き” である $n+m$ を掛けたものを下のように書く．

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))(n+m)$$

STEP2

同じく n，$n+1$，$n+2$，$\cdots$，$n+(m-1)$ の “1 つ前” である $n-1$ を掛けたものを引く．

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))(n+m)-(n-1)n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))$$

STEP3

共通因数 $n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))$ のかたまりを崩さないようにまとめる．

$$\begin{aligned}&n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))(n+m)-(n-1)n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))\\=&n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))\{(n+m)-(n-1)\}\\=&\overbrace{(m+1)}^{\text{係数}}n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))\end{aligned}$$

STEP4

---

[16] 単に，『m 連続数の積』ともいう．

式全体を $m+1$ で割ることによって，右辺の $n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))$ について解く．

$$\begin{aligned}&n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))\\ =&\frac{1}{m+1}\left\{n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))(n+m)-(n-1)n(n+1)(n+2)\cdots(n+(m-1))\right\}\end{aligned}$$

STEP5

右辺の式を利用して，初項から第 n 項までの和を，具体的に書き出してみる．

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))\\ =&\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{m+1}\left\{k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))(n+m)-(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))\right\}\right]\\ =&\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))(n+m)-(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))\right\}\\ =&\frac{1}{m+1}\{(1\cdot2\cdot3\cdots m-0\cdot1\cdot2\cdots(m-1))+(2\cdot3\cdot4\cdots(m+1)-1\cdot2\cdot3\cdots m)+\cdots\\ &\cdots+(n(n+1)(n+2)\cdots m-(n-1)n(n+1)\cdots(n+(m-1)))\}\end{aligned}$$

STEP6

相殺して消える部分ができるので，下のように消していくと，和が求まる．

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))\\ =&\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{m+1}\left\{k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))(n+m)-(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))\right\}\right]\\ =&\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))(n+m)-(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))\right\}\\ =&\frac{1}{m+1}\{(\cancel{1\cdot2\cdot3\cdots m}-0\cdot1\cdot2\cdots(m-1))+(\cancel{2\cdot3\cdot4\cdots(m+1)}-\cancel{1\cdot2\cdot3\cdots m})+\cdots\\ &\cdots+(n(n+1)(n+2)\cdots m-\cancel{(n-1)n(n+1)\cdots(n+(m-1))})\}\\ =&\frac{1}{m+1}n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)\end{aligned}$$

まとめておこう．

m 連続数の積の数列の和

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+(m-1))=\frac{1}{m+1}n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)$$

第 2 章

漸化式

§ 2.1

漸化式の基本

第 1 章では数列の一般項に注目して話をすすめてきた．しかし p.2 で述べたように，一般項以外にも，1 つの数列を表現するのには漸化式という方法があった．そこで第**??**章では，さまざまな形の漸化式をとりあげ，漸化式と一般項を結びつけるための方法(漸化式から一般項を求める方法)を学ぶ．

2.1.1　漸化式の基本

■漸化式の基本

初項 5，公比 3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は，第 1 章で学んだ通り，次のように表される．

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$$

この数列を漸化式で表現すると，次のようになる．

$$a_{n+1} = 3a_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$a_1 = 5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ここで逆に，条件①，②が与えられた数列を考えると，②より初項が定まり，あとは①に順に $n = 1$，2，3，$\cdots$ と代入することにより

$$a_2 = 3 \cdot a_1 = 15$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 45$$

$$a_4 = 3 \cdot a_3 = 135 \cdots$$

とただ一通りに数列 $\{a_n\}$ が定められる．

このように，数列のある項と別のある項との間に成り立つ関係式のことを，漸化式と定義していた．

【例題：漸化式から数列の項を求める（再掲）】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 5 項までを書き出せ.

(1) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + n^2$　(2) $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 3a_n + 2$

(3) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 5a_n + 2^n$　(4) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 5a_n + n$

(5) $a_1 = 2$，$a_2 = 5$，$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$　(6) $a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 2}{a_n + 3}$

【解答】

(1)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1 + 2^2 = 5$$
$$a_3 = 5 + 3^2 = 14$$
$$a_4 = 14 + 4^2 = 30$$
$$a_5 = 30 + 5^2 = 55$$

より，**1, 5, 14, 30, 55** である.

(2)
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$
$$a_3 = 3 \cdot 8 + 2 = 26$$
$$a_4 = 3 \cdot 26 + 2 = 80$$
$$a_5 = 3 \cdot 80 + 2 = 242$$

より，**2, 8, 26, 80, 242** である.

(3)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$$
$$a_3 = 5 \cdot 7 + 2^2 = 39$$
$$a_4 = 5 \cdot 39 + 2^3 = 203$$
$$a_5 = 5 \cdot 203 + 2^4 = 1031$$

より，**1, 7, 39, 203, 1031** である.

(4)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 5 \cdot 1 + 1 = 6$$
$$a_3 = 5 \cdot 6 + 2 = 32$$
$$a_4 = 5 \cdot \cdot 32 + 3 = 163$$
$$a_5 = 5 \cdot 163 + 4 = 819$$

より，**1, 6, 32, 163, 819** である.

(5)
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 5$$

$$a_3 = 5 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 13$$

$$a_4 = 5 \cdot 13 - 6 \cdot 5 = 35$$

$$a_5 = 5 \cdot 35 - 6 \cdot 13 = 97$$

より，**2, 5, 13, 35, 97** である．

(6)　$a_1 = 2$

$$a_2 = \frac{2 \cdot 2}{2+3} = \frac{6}{5}$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot \frac{6}{5} + 2}{\frac{6}{5} + 3} = \frac{\frac{22}{5}}{\frac{21}{5}} = \frac{22}{21}$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot \frac{22}{21} + 2}{\frac{22}{21} + 3} = \frac{\frac{86}{21}}{\frac{85}{21}} = \frac{86}{85}$$

$$a_5 = \frac{2 \cdot \frac{86}{85} + 2}{\frac{86}{85} + 3} = \frac{\frac{342}{85}}{\frac{341}{85}} = \frac{342}{341}$$

より，$\mathbf{2,\ \frac{6}{5},\ \frac{22}{21},\ \frac{86}{85},\ \frac{342}{341}}$ である．

実は上記の例題の問題は全て異なるタイプの漸化式となっている．以降では，それらをひとつひとつピックアップして学んでいく．その前に，それぞれの特徴を簡単に説明しておこう．

(1) 階差型漸化式

a_{n+1} と a_n の係数が同じであるタイプ．条件式から階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ の式を導くことができ，階差数列から一般項を求める．これについては『階差数列』(p.35) ですでに学んだ．

(2) 線形 2 項間漸化式

a_{n+1} と a_n の係数が異なっており，かつ定数が加えられるタイプ．特性方程式という特殊な方程式を活用し，一般項を求める．

(3) 変形階差型漸化式（r^n タイプ）

a_{n+1} と a_n の係数が異なっており，かつ r^n が加えられるタイプ．特性方程式か階差数列を利用して，一般項を求める．

(4) 変形階差型漸化式（n^k タイプ）

a_{n+1} と a_n の係数が異なっており，かつ n^k が加えられるタイプ．一般的には階差数列を利用して，一般項を求める．

(5) 線形 3 項間漸化式

a_{n+2} と a_{n+1} と a_n という 3 項による関係式が与えられるタイプ．3 項間漸化式の特性方程式を活用し，一般項を求める．

(6) 分数型漸化式

分数型となっているタイプ．一般的には分数型漸化式の特性方程式を活用し，一般項を求める．

なお漸化式の基本的な解き方として，等比数列の形に帰着させることを覚えておくと良い．以降では各タイプを具体的にみていくことにする．

§ 2.2

階差型漸化式：$a_{n+1} = a_n + f(n)$

p.58 の例題 (1) のように，a_{n+1} と a_n の係数が同じ漸化式のことを階差型漸化式と呼ぶ．ここでは階差型漸化式から一般項を求める方法を学ぶ．

2.2.1　階差型漸化式の解法

■階差型漸化式

次の問題について考えてみよう．

【例題：階差型漸化式〜その１〜】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n^2 \ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

このようなタイプの漸化式は，a_n を移項して

$$\begin{aligned} & a_{n+1} = a_n + n^2 \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} - a_n = n^2 \end{aligned}$$

と変形すると，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項[1] が $b_n = n^2$ として与えられているものだと考えられる．

よって，階差数列の公式 (p.36) を利用してやれば，$n \geqq 2$ で

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= 1 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \end{aligned}$$

となる．また，この式の右辺の n に 1 を代入すると，1 となり a_1 に一致するから，この式は $n = 1$ でも成立する．

以上から，$n \geqq 1$ で $a_n = 1 + \dfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ となる．

ポイントは「階差数列の一般項が与えられている」と気づくことである．

---

[1] 『階差数列の一般項』(p.37) を参照．

■階差型漸化式の解法

【例題：階差型漸化式〜その２〜】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3n^2 + n\ \ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答】

漸化式 $a_{n+1} = a_n + 3n^2 + n$ を変形すると

$$a_{n+1} = a_n + 3n^2 + n \iff a_{n+1} - a_n = 3n^2 + n$$

◀ 階差型漸化式の特徴は，a_{n+1} と a_n の係数が等しいことにある

となるので，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすれば

$$b_n = a_{n+1} - a_n = 3n^2 + n$$

であることがわかる.

ここで，$n \geqq 2$ のとき

◀ 階差数列の公式は，$n \geqq 2$ でないと使えない

◀『階差数列の一般項』(p.37)

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3k^2 + k \\ &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= 1 + \frac{1}{2}(n-1)n\{(2n-1)+1\} \\ &= 1 + (n-1)n^2 \end{aligned}$$

この式の右辺の n に 1 を代入すると，1 となり，これは a_1 に一致する.

◀ $n = 1$ でもあてはまるか代入してチェックする

したがって，求める一般項は

$$\boldsymbol{a_n = 1 + (n-1)n^2}$$

階差型漸化式の解法

STEP1

漸化式 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ を次のように変形する．

$$a_{n+1} - a_n = f(n)$$

STEP2

このとき，式 $f(n)$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項となっているので，階差数列の公式を用いて a_n を求める．

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

STEP3

$n = 1$ での成立を忘れずにチェックして完成.

§ 2.3

線形 2 項間漸化式 : $a_{n+1} = pa_n + q$

p.58 の例題 (2) のように，a_{n+1} と a_n の係数が異なっており，かつ定数が加えられる漸化式のことを線形 2 項間漸化式と呼ぶ．ここでは線形 2 項間漸化式から一般項を求める方法を学ぶ.

2.3.1　線形 2 項間漸化式の解法

■線形 2 項間漸化式

次の問題について考えてみよう.

【例題：線形 2 項間漸化式〜その１〜】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2\ \ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

まず，上の式の n に $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ n$ を代入し，具体的に数列を書き並べてみると

$$\begin{array}{rcccccccc} n: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ \{a_n\}: & 1 & 5 & 17 & 53 & 161 & 485 & \cdots & \boxed{?} \end{array}$$

となるが，数列 $\{a_n\}$ は等差数列でも等比数列でもないので，$\boxed{?}$ の部分はすぐにはわからない.

■等比数列の漸化式に帰着させる

漸化式

$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

において注目すべきは a_n の係数 (= 3) である．具体的に数列を書き並べていくと，数列 $\{a_n\}$ は約 3 倍ずつ増えていっていることがわかるだろう[*2].

しかしさきほど述べたように，純粋に 3 倍されているわけではないので等比数列ではない．原因は漸化式①で定数 (= 2) が加えられているためである．そこで，この定数をうまく消去して，最終的に等比数列の性質から一般項を求める方針で考えてみよう.

定数 (= 2) を消去するために，a_{n+1} と a_n を x に置きなおした等式[*3]を考える.

$$x = 3x + 2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

①と②の式を並べて引き算する.

[*2] 第 1 項から第 2 項は加えられている定数 2 の影響が大きいが，第 2 項以降については約 3 倍ずつ増えていることがみて取れる.

[*3] この等式を数列の**特性方程式** (characteristic equation) と呼ぶ

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & = & 3a_n + 2 \\ -) & x & = & 3x + 2 \\ \hline & a_{n+1} - x & = & 3(a_n - x) \end{array}$$

これで定数部分を消去することができた．

また，$a_n - x = b_n$ と置きなおすと，$b_{n+1} = 3b_n$ となることからもわかるように，等比数列の漸化式に帰着することができた．

■線形 2 項間漸化式の解法

【例題：線形 2 項間漸化式〜その２〜】

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 4a_n + 6$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

【解答】

漸化式

$$a_{n+1} = 4a_n + 6$$

から，式

$$x = 4x + 6 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を辺々ひくと

$$a_{n+1} - x = p(a_n - x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，①を解くと

$$\begin{aligned} & x = 4x + 6 \\ \Leftrightarrow\ & -3x = 6 \\ \therefore\ & x = -2 \end{aligned}$$

となるから，②の x にこの値を代入し

$$a_{n+1} - (-2) = 3\{a_n - (-2)\}$$

◀ $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$

$$\therefore\ a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$$

◀ $b_n = a_n + 2$ とおくと $b_{n+1} = 3b_n$ と表せ，等比数列であることがわかる

を得る．

これは，数列 $\{a_n + 2\}$ が，初項 $(a_1 + 2) = 3$，公比 4 の等比数列であることを表している．

◀ 数列 $\{a_n + 2\}$ の初項は a_1 ではなく，$a_1 + 2$ である

よって

$$a_n + 2 = (a_1 + 2) \cdot 4^{n-1}$$

◀ 『等比数列の一般項』(p.16)

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 2}$$

線形 2 項間漸化式の解法

STEP1

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ から方程式 $x = px + q$ をつくる.

STEP2

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ から方程式 $x = px + q$ を引き

$$a_{n+1} - x = p(a_n - x)$$

を得る.

STEP3

方程式の解 α を求め，STEP2 で得られた漸化式に代入する.

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

STEP4

等比数列の公式を用いて，漸化式を解き，a_n を求めれば完成.

$$\begin{aligned} & a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \\ \therefore\ & a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1} \qquad \leftarrow \text{等比数列の一般項の公式を用いた} \end{aligned}$$

よって，$a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$ となる.

§ 2.4

変形階差型漸化式：$a_{n+1} = pa_n + f(n)$

p.58 の例題 (3)(4) のように a_{n+1} と a_n の係数が異なっており，かつ変数が加えられる漸化式のことを変形階差型漸化式と呼ぶ．ここでは変形階差型漸化式から一般項を求める方法を学ぶ.

2.4.1　変形階差型漸化式の解法

■変形階差型漸化式

階差型漸化式 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ と似ているが，a_n の前に係数 p $(p \fallingdotseq 1)$ がかかった形，つまり

$$a_{n+1} = pa_n + f(n)$$

という形をしている漸化式の解法について考えてみよう.

このようなタイプの漸化式は $f(n)$ の形により，解法を分類しておくのがよい.

以下，次の 2 タイプに分けて考えてみよう.

$$\begin{cases} f(n) = r^n & (\text{指数タイプ}) \\ f(n) = n^k \ \ (k \in \mathbb{N}) & (k\ \text{次式タイプ}) \end{cases}$$

■$f(n) = r^n$ の場合の解法

【例題：変形階差型漸化式～その１～】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + 2^n$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答 1：線形 2 項間漸化式に帰着させる方法】

この解法では，漸化式 $a_{n+1} = pa_n + r^n$ の r の部分，つまりこの例題では 2 に着目して，漸化式を 2^{n+1} で割ることにより，線形 2 項間漸化式 (p.64) に帰着させる.

まず，漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + 2^n$ の両辺を 2^{n+1} で割る.

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5a_n}{2 \cdot 2^n} + \frac{\cancel{2^n}}{2 \cdot \cancel{2^n}}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$

ここで，$\dfrac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと，漸化式は

$$b_{n+1} = \frac{5}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

と変形される．この漸化式は線形 2 項間漸化式になっているので，以下その方法に準じて漸化式を解けばよい．

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

この解法では，漸化式 $a_{n+1} = pa_n + r^n$ の p の部分，つまりこの例題では 5 に着目して，漸化式を 5^{n+1} で割ることにより，階差型漸化式 (p.61) に帰着させる．

まず，漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + 2^n$ の両辺を 5^{n+1} で割る．

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{5a_n}{5^{n+1}} + \frac{2^n}{5^{n+1}} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{\cancel{5}a_n}{\cancel{5}\cdot 5^n} + \frac{2^n}{5\cdot 5^n} \\
\therefore\ &\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{a_n}{5^n} + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n
\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{a_n}{5^n} = b_n$ とおくと，漸化式は

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

と変形される．この漸化式は階差型漸化式になっているので，以下その方法に準じて漸化式を解けばよい．

【例題：変形階差型漸化式〜その１〜（再掲）】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + 2^n\ \ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

【解答 1：線形 2 項間漸化式に帰着させる方法】

漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + 2^n$ の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5a_n}{2\cdot 2^n} + \frac{2^{\cancel{n}}}{2\cdot 2^{\cancel{n}}} \\
\therefore\ &\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

◀ $2^{n+1} = 2\cdot 2^n$ である

◀ 線形 2 項間漸化式の形になっている

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}}_{b_{n+1}} = \frac{5}{2}\cdot\underbrace{\frac{a_n}{2^n}}_{b_n} + \frac{1}{2}$$

$\dfrac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は

$$b_{n+1} = \frac{5}{2}b_n + \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

を満たす．

ここで，方程式 $\alpha = \dfrac{5}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}$ を解くと

$$\begin{aligned}
&\alpha = \frac{5}{2}\alpha + \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ &2\alpha = 5\alpha + 1
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ 3\alpha = -1$$

$$\therefore\ \alpha = -\frac{1}{3}$$

となるので，これを利用して①は

$$b_{n+1} = \frac{5}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ b_{n+1} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2}\left\{b_n - \left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$\therefore\ b_{n+1} + \frac{1}{3} = \frac{5}{2}\left(b_n + \frac{1}{3}\right)$$

◀ $$\begin{array}{rcl} b_{n+1} & = & 3b_n + 2 \\ -)\quad \alpha & = & 3\alpha + 2 \\ \hline b_{n+1} - \alpha & = & 3(b_n - \alpha) \end{array}$$
に，$\alpha = -\frac{1}{3}$ を代入

と変形できる．

これより，数列 $\left\{b_n + \frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $\left(b_1 + \frac{1}{3}\right)$，公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列とわかるので

$$\begin{aligned} b_n + \frac{1}{3} &= \left(b_1 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{a_1}{2^1} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{5}{6}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{5^n}{3 \cdot 2^n} \end{aligned}$$

◀ 『等比数列の一般項』(p.16)

◀ $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおいたので，$b_1 = \frac{a_1}{2^1}$ となる

ここで，$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ であったから，もとに戻して

$$\frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{3} = \frac{5^n}{3 \cdot 2^n}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{a_n}{2^n} = \frac{5^n}{3 \cdot 2^n} - \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{5^n}{3} - \frac{2^n}{3}$$

◀ ここから a_n について解く

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + 2^n$ の両辺を 5^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{5a_n}{5^{n+1}} + \frac{2^n}{5^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{\cancel{5}a_n}{\cancel{5} \cdot 5^n} + \frac{2^n}{5 \cdot 5^n}$$

$$\therefore\ \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{a_n}{5^n} + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

◀ $5^{n+1} = 5 \cdot 5^n$ である

◀ 階差型漸化式の形になっている

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}}_{b_{n+1}} = \underbrace{\frac{a_n}{5^n}}_{b_n} + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$\dfrac{a_n}{5^n} = b_n$ とおくと

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow\ b_{n+1} - b_n = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

この漸化式より，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすれば，$c_n = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ となっていることがわかるので，$2 \leqq n$ では

$$\begin{aligned}
b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\
&= \frac{a_1}{5^1} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^k \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^k \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{5}} \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\} \\
&= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\} \\
&= \frac{1}{5} + \frac{2}{15} - \frac{2}{15}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{2}{15}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3\cdot 5^n}
\end{aligned}$$

◀『階差数列の一般項』(p.37)

◀『等比数列の和』(p.19)

この式の右辺の n に 1 を代入すると，1 となり，a_1 と一致するので，この式は $n = 1$ のときにも成立する．

◀ 階差数列の公式を使った場合は $n = 1$ を必ずチェックする

よって $n \geqq 1$ で

$$b_n = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3\cdot 5^n}$$

が成り立つ．ここで，$b_n = \dfrac{a_n}{5^n}$ であったから

$$\frac{a_n}{5^n} = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3\cdot 5^n}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{5^n}{3} - \frac{2^n}{3}$$

$f(n) = r^n$ タイプの変形階差型漸化式の解法

変形階差型漸化式 $a_{n+1} = pa_n + r^n$ について.

【解答 1：線形 2 項間漸化式に帰着させる方法】

STEP1

漸化式の両辺を，r^{n+1} で割ることにより

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}}_{b_{n+1}} = \frac{p}{r} \cdot \underbrace{\frac{a_n}{r^n}}_{b_n} + \frac{q}{r}$$

として，線形 2 項間漸化式を導く.

STEP2

(以下，線形 2 項間漸化式の解法 (p.**??**) に準じる)

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

STEP1

漸化式の両辺を，p^{n+1} で割ることにより

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}}_{b_{n+1}} = \underbrace{\frac{a_n}{p^n}}_{b_n} + \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{r}{p}\right)^n$$

として，階差型漸化式を導く.

STEP2

（以下，階差型漸化式の解法 (p.62) に準じる）

■$f(n) = n^k$ $(k \in \mathbb{N})$ の場合の解法

【例題：変形階差型漸化式〜その２〜】

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n + n$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

この解法では，漸化式 $a_{n+1} = pa_n + n^k$ の k の部分 (整式 $f(n)$ の次数)，つまりこの例題では 1 に着目して，適当な 1 次式を用いて漸化式を変形することにより，等比数列に帰着させる[*4].

具体的には次のようにする.

n の 1 次式 $g(n) = sn + t$ を用いて，漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + n$ が

$$a_{n+1} - \{\underbrace{s(n+1)+t}_{g(n+1)}\} = 5\{a_n - \underbrace{(sn+t)}_{g(n)}\} \qquad \cdots\cdots ①$$

と変形できたとすれば，$b_n = a_n - (sn + t)$ とおくことにより，漸化式は

$$b_{n+1} = 5b_n$$

[*4] もし k が 2 なら，適当な 2 次式を用いて漸化式を変形する.

と変形される．この漸化式は等比数列を表しているので，以下その方法に準じて漸化式を解けばよい．

このような s，t を求めるためには，①を展開・整理して

$$\begin{aligned}
& a_{n+1}-\{s(n+1)+t\}=5\{a_n-(sn+t)\} \\
\Leftrightarrow\ & a_{n+1}=5\{a_n-(sn+t)\}+\{s(n+1)+t\} \\
\Leftrightarrow\ & a_{n+1}=5a_n-5(sn+t)+s(n+1)+t \\
\Leftrightarrow\ & a_{n+1}=5a_n-5sn-5t+sn+s+t \\
\therefore\ & a_{n+1}=5a_n-4sn+(s-4t)
\end{aligned}$$

としておいて，これと漸化式 $a_{n+1}=5a_n+n$ を比較して

$$\begin{cases} -4s=1 \\ s-4t=0 \end{cases}$$

を解けばよい．

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

この解法では，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+n^k$ の p の部分，つまりこの例題では 5 に着目して，漸化式を 5^{n+1} で割ることにより，階差型漸化式 (p.61) に帰着させる．

具体的には次のようにする．

まず，漸化式 $a_{n+1}=5a_n+n$ の両辺を 5^{n+1} で割る．

$$\begin{aligned}
& \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{5a_n}{5^{n+1}}+\frac{n}{5^{n+1}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{\cancel{5}a_n}{\cancel{5}\cdot 5^n}+\frac{n}{5^{n+1}} \\
\therefore\ & \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{a_n}{5^n}+n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{a_n}{5^n}=b_n$ とおくと，漸化式は

$$b_{n+1}=b_n+n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

と変形される．この漸化式は階差型漸化式になっているので，以下その方法に準じて漸化式を解けばよい．

【例題：変形階差型漸化式～その２～（再掲）】

$a_1=1$, $a_{n+1}=5a_n+n$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

漸化式 $a_{n+1}=5a_n+n$ を変形して

$$\begin{aligned}
& a_{n+1}=5a_n+n \\
\Leftrightarrow\ & a_{n+1}-\{\underbrace{s(n+1)+t}_{g(n+1)}\}=5\{a_n-(\underbrace{sn+t}_{g(n)})\}
\end{aligned}$$

◀ $f(n)$ が 1 次式であることに着目して，同じ 1 次式 $sn+t$ を考える

となるような，$s,\ t \in \mathbb{R}$ を求める．

そのためには，まずこの式を展開・整理して

$$a_{n+1} - \{s(n+1) + t\} = 5\{a_n - (sn+t)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

◀ この式を整理して，$a_{n+1} = 5a_n +$ ○ $n+$△ という形に変形していく

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ a_{n+1} = 5\{a_n - (sn+t)\} + \{s(n+1) + t\}\\
&\Leftrightarrow\ a_{n+1} = 5a_n - 5(sn+t) + s(n+1) + t\\
&\Leftrightarrow\ a_{n+1} = 5a_n - 5sn - 5t + sn + s + t\\
&\therefore\ a_{n+1} = 5a_n - 4sn + (s-4t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ③
\end{aligned}$$

◀ $a_{n+1} = 5a_n +$ ○ $n+$△ という形になった

この③と，もとの漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + n$ を比べて

◀ $a_{n+1} = 5a_n - 4sn + (s-4t)$ と $a_{n+1} = 5a_n + n$ を比較する

$$\begin{cases} -4s = 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ④\\ s - 4t = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑤ \end{cases}$$

を解けばよい．

まず，④より $s = -\dfrac{1}{4}$ であり，これを⑤に代入して

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4} - 4q = 0\\
\Leftrightarrow\ &t = -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

を得る．この $s,\ t$ を②に代入して

$$a_{n+1} - \left\{-\frac{1}{4}(n+1) - \frac{1}{16}\right\} = 5\left\{a_n - \left(-\frac{1}{4}n - \frac{1}{16}\right)\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑥$$

◀ $a_n - \left(-\dfrac{1}{4}n - \dfrac{1}{16}\right) = b_n$ とおくと，この式は
$b_{n+1} = 5b_n$
の等比数列となっている．

を得る．

ここで，$b_n = a_n - \left(-\dfrac{1}{4}n - \dfrac{1}{16}\right)$ とおくと，⑥は

$$b_{n+1} = 5b_n$$

となり，数列 $\{b_n\}$ は初項

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1 - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right)\\
&= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\\
&= \frac{21}{16}
\end{aligned}$$

公比 5 の等比数列となるのがわかる．

よって

$$b_n = b_1 \cdot 5^{n-1}$$

◀ 『等比数列の一般項』(p.16)

$$= \frac{21}{16}\cdot 5^{n-1}$$

$b_n = a_n - \left(-\frac{1}{4}n - \frac{1}{16}\right)$ であったから

◀ 置き換えていたのでもとに戻す

$$a_n - \left(-\frac{1}{4}n - \frac{1}{16}\right) = \frac{21}{16}\cdot 5^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n = -\frac{1}{4}n - \frac{1}{16} + \frac{21}{16}\cdot 5^{n-1}$$

◀ a_n について解いて完成

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

漸化式 $a_{n+1} = 5a_n + n$ の両辺を 5^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{5a_n}{5^{n+1}} + \frac{n}{5^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{\cancel{5}a_n}{\cancel{5}\cdot 5^n} + n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

◀ $5^{n+1} = 5\cdot 5^n$ である

$$\therefore\ \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{a_n}{5^n} + n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

◀ 階差型漸化式の形になっている

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}}_{b_{n+1}} = \underbrace{\frac{a_n}{5^n}}_{b_n} + n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

$b_n = \frac{a_n}{5^n}$ とおくと

$$b_{n+1} = b_n + n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow\ b_{n+1} - b_n = n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

この漸化式より，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすれば，$c_n = n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$ となっていることがわかるので，$n \geqq 2$ では

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$$

◀ 『階差数列の一般項』(p.37)

$$= \frac{a_1}{5^1} + \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}$$

◀ $\sum$(等差) × (等比) の形をしている

$$= \frac{1}{5} + \overbrace{\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}}^{A\ \text{とおく}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで

$$\begin{array}{rl}
A = & \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots + (n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n \\
-)\ \frac{1}{5}A = & \qquad\qquad \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots + (n-2)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n + (n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \\
\hline
\frac{4}{5}A = & \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n - (n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}
\end{array}$$

より

$$\frac{4}{5}A$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n - (n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{5}} - (n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\\
&= \frac{1}{20}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\} - (n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\\
&= \frac{1}{20} - \frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - \frac{n-1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n\\
&= \frac{1}{20} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{n-1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n\\
&= \frac{1}{20} - \left(\frac{1}{4} + \frac{n-1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n\\
&= \frac{1}{20} - \frac{5+4n-4}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^n\\
&= \frac{1}{20} - \frac{4n+1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^n
\end{aligned}
$$

◀『等比数列の和』(p.19)

◀ ここからの計算は $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ でくくるためのものである

よって

$$A = \frac{1}{16} - \frac{4n+1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

であるから，①は

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{5} + \frac{1}{16} - \frac{4n+1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^n\\
&= \frac{21}{80} - \frac{4n+1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^n
\end{aligned}
$$

ここで，$b_n = \frac{a_n}{5^n}$ であったから

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_n}{5^n} = \frac{21}{80} - \frac{4n+1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^n\\
\Leftrightarrow\ & a_n = \frac{21}{80}\cdot 5^n - \frac{4n+1}{16}\\
\therefore\ & a_n = -\frac{1}{4}n - \frac{1}{16} + \frac{21}{16}5^{n-1}
\end{aligned}
$$

この式の右辺の n に 1 を代入すると，1 となり，a_1 と一致するので，この式は $n=1$ のときにも成立する．

◀ 階差数列の公式を使った場合は $n=1$ を必ずチェックする

$f(n) = n^k \ (k \in \mathbb{N})$ タイプの変形階差型漸化式の解法

変形階差型漸化式 $a_{n+1} = pa_n + n^k \ (k \in \mathbb{N})$ について.

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

STEP1

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + n^k$ を変形して

$$a_{n+1} - g(n+1) = p\{a_n - g(n)\}$$

となるような，k 次式 $g(n)$ を求める.

STEP2

(以下，等比数列の一般項の求め方 (p.15) に準じる)

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

STEP1

漸化式の両辺を，p^{n+1} で割ることにより

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}}_{b_{n+1}} = \underbrace{\frac{a_n}{p^n}}_{b_n} + n\left(\frac{1}{p}\right)^{n+1}$$

として，階差型漸化式を導く.

STEP2

(以下，階差型漸化式の解法 (p.62) に準じる)

---

§ 2.5

線形 3 項間漸化式：$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$

---

p.58 の例題 (5) のように，a_{n+2} と a_{n+1} と a_n の 3 項による関係式が与えられる漸化式のことを線形 3 項間漸化式と呼ぶ．ここでは線形 3 項間漸化式から一般項を求める方法を学ぶ．

2.5.1　線形 3 項間漸化式の解法

■線形 3 項間漸化式

次の問題について考えてみよう．

【例題】

$a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n\ \ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

まず，上の式の n に $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, n$ を代入し，具体的に数列を書き並べてみると

$$a_3 = 5a_2 - 6a_1 = 5 \times 5 - 6 \times 2 = 13$$

$$a_4 = 5a_3 - 6a_2 = 5 \times 13 - 6 \times 5 = 35$$

$$a_5 = 5a_4 - 6a_3 = 5 \times 25 - 6 \times 13 = 97$$

$$a_6 = 5a_5 - 6a_4 = 5 \times 97 - 6 \times 35 = 275$$

$$\vdots$$

より $\begin{array}{rccccccccc} n: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ \{a_n\}: & 2 & 5 & 13 & 35 & 97 & 275 & \cdots & \boxed{?} \end{array}$ となるが，数列 $\{a_n\}$ は等差数列でも等比数列でもないので，$\boxed{?}$ の部分はすぐにはわからない．

■等比数列の漸化式に帰着させる

線形 2 項間漸化式のときのように線形 3 項間漸化式でも等比数列に帰着させて，一般項を求める方針で考えてみよう．

$$pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

漸化式①を等比数列型漸化式[*5]②に変形することができれば，数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ の一般項を求めることができる．

[*5] $a_{n+1} - \alpha a_n = b_n$ と置き換えれば，②は $b_{n+1} = \beta b_n$ となっていることがわかる．

なお，α，β を 3 項間漸化式における特性方程式の解と呼ぶ．α，β は次の方程式から求める．

$$px^2 + qx + r = 0$$

実際の解法は例題を使って確認しよう．

■線形 3 項間漸化式の解法

【例題】

$a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n\ \ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答】

漸化式 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ は，方程式

$$x^2 = 5x - 6$$

を満たす x，つまり

$$\begin{aligned} & x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)(x-3) = 0 \\ \therefore\ & x = 2,\ 3 \end{aligned}$$

を用いて

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3\,(a_{n+1} - 2a_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2\,(a_{n+1} - 3a_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と 2 通りに変形できる．

1) ①について

$b_n = a_{n+1} - 2a_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は $b_{n+1} = 3b_n$ を満たすので

$$\begin{aligned} & b_n = b_1 \cdot 3^{n-1} \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1)3^{n-1} \\ \therefore\ & a_{n+1} - 2a_n = 3^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①' \end{aligned}$$

◀『等比数列の一般項』(p.16)

2) ②について

$c_n = a_{n+1} - 3a_n$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は $c_{n+1} = 2c_n$ を満たすので

$$\begin{aligned} & c_n = c_1 \cdot 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} - 3a_n = (a_2 - 3a_1)2^{n-1} \end{aligned}$$

◀『等比数列の一般項』(p.16)

$$\therefore \ a_{n+1} - 3a_n = -2^{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②'$$

①′ − ②′ より

$$a_n = 3^{n-1} + 2^{n-1}$$

解法をまとめておこう.

線形 3 項間漸化式の解法

STEP1

漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ から**特性方程式** $x^2 = px + q$ をつくる.

STEP2

特性方程式の解 $x = \alpha$，β を利用して，漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を

$$\begin{aligned} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} &= \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} &= \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{aligned}$$

と 2 通りに変形する.

STEP3

$b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$，$c_n = a_{n+1} - \beta a_n$ とおき，2 本の漸化式を書き換えて

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \beta b_n \\ c_{n+1} &= \alpha c_n \end{aligned}$$

等比数列の一般項の公式を使い，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を求める.

$$\begin{aligned} b_n &= b_1\beta^{n-1} \\ c_n &= c_1\alpha^{n-1} \end{aligned}$$

STEP4

置き換えた数列をもとに戻して

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha a_n &= (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} \\ a_{n+1} - \beta a_n &= (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} \end{aligned}$$

a_{n+1} を消すため，辺々引き算する.

$$\begin{aligned} &-\alpha a_n - (-\beta a_n) = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} - (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} \\ \Leftrightarrow \ &(\beta - \alpha)a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} - (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} \end{aligned}$$

STEP5

a_n について解けば完成.

$$a_n = \frac{a_2 - \alpha a_1}{\beta - \alpha}\beta^{n-1} - \frac{a_2 - \beta a_1}{\beta - \alpha}\alpha^{n-1}$$

線形3項間漸化式を解くのに，特性方程式 $x^2 = px + q$ を使うとよいのはわかったが，この特性方程式はいったいどのような考え方からくるのだろうか．ここでは，それを検証する．

線形3項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を解くために，「等比数列に帰着させる」ことを考えていた．等比数列に帰着させるためには，適当な数 α，β を用いて，線形3項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と変形したい．なぜなら，このように変形できれば，数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は等比数列になるからである．

では，このような α，β はどのように求めればよいのかというと，①を展開・整理した式

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$$

と，もともとの漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$$

の係数を比較して

$$\alpha + \beta = p$$
$$\alpha\beta = -q$$

を満たすような α，β であればよい．

このような α，β を求めるためには，解と係数の関係の逆より

$$x^2 - px - q = 0$$

という2次方程式を解けばよい．

ここで，この方程式を解くのではなく，変形すると

$$x^2 = px + q$$

となるが，これは線形3項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ の a_{n+2} を x^2，a_{n+1} を x，a_n を 1 に形式的に置き換えたものに他ならない．そして，この方程式を特性方程式と名付けるのである．

結局，線形3項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ は，特性方程式 $x^2 = px + q$ の解 α，β を用いて

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

と変形され，等比数列に帰着されるのである．

§ 2.6

分数漸化式：$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$

p.58 の例題 (6) のように分数型となっている漸化式のことを分数型漸化式と呼ぶ．ここでは分数型漸化式から一般項を求める方法を学ぶ.

■分数型漸化式の解法

分数型漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ について，$ps=qr$ のときには約分ができるので，約分が終えた形，つまり $ps \fallingdotseq qr$ のもとで考える.

■簡単な分数型漸化式（$q=0$ の場合）

分数型漸化式が $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{ra_n+s}$ のような形をしている場合は，両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{ra_n+s}{pa_n}$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{s}{p}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{r}{p}$$

と変形し，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくことにより

$$b_{n+1}=\frac{s}{p}\cdot b_n+\frac{r}{p}$$

となり線形 2 項間漸化式へ帰着される.

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

分数型漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の

t に関する

$$t=\frac{pt+q}{rt+s}$$

という方程式が異なる 2 つの実数解 $t=\alpha,\beta$ をもつとき

$$b_n=\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$$

とおくと，$\{b_n\}$ が等比数列となることを利用する.

【解答 2：簡単な分数型漸化式に帰着させる方法】

t に関する

$$t=\frac{pt+q}{rt+s}$$

という方程式が実数解 t をもつとき (2 解あるときはどちらでもよい)，この式より t は

$$\begin{aligned} & t = \frac{pt+q}{rt+s} \\ \Leftrightarrow\ & t(rt+s) = pt+q \\ \Leftrightarrow\ & (p-rt)t = st-q \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

となるのを利用して，$a_{n+1}-t$ を計算すると

$$\begin{aligned} a_{n+1}-t &= \frac{pa_n+q}{ra_n+s}-t \\ &= \frac{pa_n+q-t(ra_n+s)}{ra_n+s} \\ &= \frac{(p-rt)a_n-(st-q)}{ra_n+s} \\ &= \frac{(p-rt)a_n-(p-rt)t}{ra_n+s} \qquad \because ① \\ &= \frac{(p-rt)(a_n-t)}{ra_n+s} \end{aligned}$$

となる．ここで，$b_n = a_n - t$ とおくと

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{(p-rt)b_n}{r(b_n+t)+s} \\ &= \frac{(p-rt)b_n}{rb_n+(rt+s)} \end{aligned}$$

となり，簡単な分数型漸化式 ($q=0$ の場合) に帰着される．

■簡単な分数型漸化式の解法

【例題：分数漸化式〜その１〜】

$a_1 = \dfrac{1}{2}$，$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n+5}$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

【解答】

漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n+5}$ の逆数をとると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4a_n+5}{a_n} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{a_{n+1}} = 5\cdot\frac{1}{a_n}+4 \end{aligned}$$

となるので，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は

$$b_{n+1} = 5b_n + 4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

◀ 線形 2 項間漸化式に帰着された

を満たす．

ここで，$\alpha = 5\alpha + 4$ を満たす α つまり，$\alpha = -1$ を用いて ① は

$$b_{n+1} + \alpha = 5(b_n + 1)$$

と変形できる．$c_n = b_n + 1$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は

◀ $$\begin{array}{rcrcr} b_{n+1} & = & 5b_n & + & 4 \\ -)\quad \alpha & = & 5\alpha & + & 4 \\ \hline b_{n+1} - \alpha & = & \multicolumn{3}{l}{5(b_n - \alpha)} \end{array}$$
に，特性方程式の解 $\alpha = -1$ を代入

$$c_{n+1} = 5c_n$$

◀ 等比数列に帰着された

を満たすので，c_n は

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 5^{n-1} \\ &= (b_1 + 1)5^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{a_1} + 1\right)5^{n-1} \\ &= 3 \cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

$c_n = b_n + 1$ であったから

◀ c_n を b_n の式に戻す

$$b_n + 1 = 3 \cdot 5^{n-1}$$
$$\therefore\ b_n = 3 \cdot 5^{n-1} - 1$$

さらに，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ であったから

◀ b_n を a_n の式に戻す

$$\frac{1}{a_n} = 3 \cdot 5^{n-1} - 1$$
$$\therefore\ a_n = \frac{1}{3 \cdot 5^{n-1} - 1}$$

簡単な分数漸化式の解法

STEP1

漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{pa_n}{ra_n + s}$ の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{ra_n + s}{pa_n}$$
$$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{s}{p} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{r}{p}$$

と変形する．

STEP2

(以下，3 項間漸化式 (p.77) の解法に準じる)

■一般の分数型漸化式の解法

【例題：分数漸化式〜その２〜】

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 2}{a_n + 3}$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

まず，特性方程式 $t = \dfrac{2t+2}{t+3}$ を解く.

$$t = \frac{2t+2}{t+3} \iff t(t+3) = 2t+2$$
$$\iff t^2 + t - 2 = 0 \iff (t+2)(t-1) = 0$$
$$\therefore\ t = -2,\ 1$$

この異なる 2 解を利用して，$b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 2}$ とおくと

◀ 2 解 α，β を用いて $b_n = \dfrac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$ とおくと，b_n は必ず等比数列になる

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 2} \\ &= \frac{\dfrac{2a_n + 2}{a_n + 3} - 1}{\dfrac{2a_n + 2}{a_n + 3} + 2} \\ &= \frac{a_n - 1}{4a_n + 8} \\ &= \frac{a_n - 1}{4(a_n + 2)} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot b_n \end{aligned}$$

◀ ここから $b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 2}$ の塊をくくりだすのがポイント

◀ くくりだせた

◀ 数列 $\{b_n\}$ は等比数列になっている

となり，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{a_1 - 1}{a_1 + 2} = \dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列となるので

$$b_n = b_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ここで，$b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 2}$ であったから

$$b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$\iff \frac{a_n - 1}{a_n + 2} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$\iff (a_n - 1)4^n = a_n + 2 \iff (4^n - 1)a_n = 4^n + 2$$

◀ b_n を a_n の式に戻した

$$\therefore\ a_n = \frac{4^n + 2}{4^n - 1}$$

【解答 2：簡単な分数型漸化式に帰着させる方法】

まず，特性方程式 $t = \dfrac{2t+2}{t+3}$ を解く．

$$\begin{aligned} & t = \frac{2t+2}{t+3} \\ \Leftrightarrow\ & t(t+3) = 2t+2 \\ \Leftrightarrow\ & t^2 + t - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t+2)(t-1) = 0 \\ \therefore\ & t = -2,\ 1 \end{aligned}$$

この解の 1 つ $t = 1$ を利用して

◂ 解答 2 では，2 解のうち片方しか利用せず，どちらを利用してもかまわない

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 1 &= \frac{2a_n + 2}{a_n + 3} - 1 \\ &= \frac{2a_n + 2 - (a_n + 3)}{a_n + 3} \\ &= \frac{a_n - 1}{a_n + 3} \\ &= \frac{a_n - 1}{(a_n - 1) + 4} \end{aligned}$$

◂ 通分した

◂ $a_n - 1$ を塊とみて，簡単な分数漸化式 (p.81) に帰着させるのがポイント

◂ $a_n - 1 = c_n$ とおくと
$c_{n+1} = \dfrac{c_n}{c_n + 4}$
となり，簡単な分数漸化式に帰着されているのがよくわかる

と変形できる．この漸化式の逆数をとって

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1} - 1} &= \frac{(a_n - 1) + 4}{a_n - 1} \\ &= \frac{4}{a_n - 1} + 1 \end{aligned}$$

$b_n = \dfrac{1}{a_n - 1}$ とおくと

$$b_{n+1} = 4b_n + 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

◂ 線形 2 項間漸化式に帰着された

となる．

ここで，$\alpha = 4\alpha + 1$ を満たす α つまり，$\alpha = -\dfrac{1}{3}$ を用いて ① は

$$b_{n+1} + \frac{1}{3} = 4\left(b_n + \frac{1}{3}\right)$$

◂
$$\begin{array}{rcrcl} b_{n+1} & = & 4b_n & + & 1 \\ -)\quad \alpha & = & 4\alpha & + & 1 \\ \hline b_{n+1} - \alpha & = & \multicolumn{3}{l}{4(b_n - \alpha)} \end{array}$$
に，特性方程式の解 $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ を代入

と変形できる．さらに，$c_n = b_n + \dfrac{1}{3}$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は

$$c_{n+1} = 5c_n$$

◂ 等比数列に帰着された

を満たすので，c_n は

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 4^{n-1} \\ &= \left(b_1 + \frac{1}{3}\right)4^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{3}\right)4^{n-1} \\ &= \frac{4}{3} \cdot 4^{n-1} \\ &= \frac{1}{3}4^n \end{aligned}$$

$c_n = b_n + \dfrac{1}{3}$ であったから

$$\begin{aligned} & b_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}4^n \\ \Leftrightarrow\ & b_n = \frac{1}{3}4^n - \frac{1}{3} \\ \therefore\ & b_n = \frac{4^n - 1}{3} \end{aligned}$$

◀ c_n を b_n の式に戻した

さらに，$b_n = \dfrac{1}{a_n - 1}$ であったから

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_n - 1} = \frac{4^n - 1}{3} \\ \Leftrightarrow\ & a_n - 1 = \frac{3}{4^n - 1} \\ \Leftrightarrow\ & a_n = \frac{3}{4^n - 1} + 1 \\ \Leftrightarrow\ & a_n = \frac{3 + 4^n - 1}{4^n - 1} \\ \therefore\ & a_n = \frac{4^n + 2}{4^n - 1} \end{aligned}$$

◀ b_n を a_n の式に戻した

◀ 通分した

§ 2.7

連立漸化式$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$

これまで1つの漸化式から一般項を求める方法について勉強してきた．ここでは漸化式の数を増やして，2つの連立漸化式から一般項を求める方法を学ぶ.

2.7.1 連立漸化式の解法

■連立漸化式

まず連立漸化式の形について簡単に説明しよう.

これまでの漸化式は1つの数列$\{a_n\}$についての式であったが，ここで学ぶ連立漸化式では2つの数列が登場する.

連立漸化式では一般的に，a_{n+1}とb_{n+1}がそれぞれa_nとb_nから成り立つ式を与えられるので，そこから数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$の一般項を求めることになる.

一般項を求める方法としては,

(1) 連立方程式をうまく組み合わせて等比数列に帰着させる方法
(2) 3項間漸化式に帰着させる方法

が存在する.

下記ではそれぞれについて解説していく．なお，その前に連立漸化式の係数についての注意事項を先に述べておこう.

■連立漸化式の係数についての注意

連立漸化式$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ $(p,\ q,\ r,\ s \fallingdotseq 0)$

について，$ps = qr$のときには，$\dfrac{s}{q} = \dfrac{r}{p} = k$とおいて

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = pka_n + qkb_n \end{cases}$$

より，$a_{n+1} = kb_{n+1}$となるから，$a_n = kb_n$であり，これを上の式に用いて

$$kb_{n+1} = pkb_n + qb_n \quad \Leftrightarrow \quad b_{n+1} = \left(p + \frac{q}{k}\right)b_n$$

となり，等比数列の漸化式に帰着されるので，以下$ps \fallingdotseq qr$の場合について考える.

■連立漸化式の解法

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①} \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

x を後から決める定数として，① + ② × x より

$$a_{n+1} + xb_{n+1} = (p + rx)a_n + (q + sx)b_n$$

をつくり，$1 : x = (p + rx) : (q + sx)$ となるように x を定め，その値が異なる α, β ならば

$$\begin{cases} a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = (p + r\alpha)(a_n + \alpha b_n) \\ a_{n+1} + \beta b_{n+1} = (p + r\beta)(a_n + \beta b_n) \end{cases}$$

となり，等比数列の漸化式に帰着されることを利用する．

【解答 2：3 項間漸化式に帰着させる方法】

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③} \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④} \end{cases}$$

③ より

$$b_n = \frac{1}{q}a_{n+1} - \frac{p}{q}a_n$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{q}a_{n+2} - \frac{p}{q}a_{n+1}$$

となるので，この 2 式を ④ に用いて 3 項間漸化式に帰着されることを利用する．

【例題：連立漸化式】

$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n + 5b_n \end{cases}$ $(n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ および数列 $\{b_n\}$ の一般項 a_n および b_n を n の式で表せ．

【解答 1：等比数列に帰着させる方法】

漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤} \\ b_{n+1} = -2a_n + 5b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑥} \end{cases}$$

において，⑤ + x × ⑥ より

$$a_{n+1} + xb_{n+1} = 2a_n + b_n + x(-2a_n + 5b_n)$$

$$\Leftrightarrow\ a_{n+1} + xb_{n+1} = (2 - 2x)a_n + (1 + 5x)b_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑦}$$

ここで

$$1 : x = 2 - 2x : 1 + 5x$$

となる x を求める，つまり方程式 $x(2-2x) = 1 + 5x$ を解くと

$$\begin{aligned} & x(2-2x) = 1+5x \\ \Leftrightarrow\ & 2x - 2x^2 = 1 + 5x \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 + 3x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)(2x+1) = 0 \\ \therefore\ & x = -1,\ -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので，これらの値のとき数列 $\{a_n + xb_n\}$ は等比数列となる．

i) $x = -1$ のとき
⑦は

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 4(a_n - b_n)$$

となるので，$c_n = a_n - b_n$ とおくと

$$c_{n+1} = 4c_n$$

◀ 等比数列に帰着された

より，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $c_1 = a_1 - b_1 = -3$，公比 4 の等比数列となっている．よって

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 4^{n-1} \\ &= -3 \cdot 4^{n-1} \end{aligned}$$

ここで，$c_n = a_n - b_n$ であったから

$$c_n = -3 \cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n - b_n = -3 \cdot 4^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

ii) $x = -\frac{1}{2}$ のとき
⑦は

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}b_{n+1} = 3\left(a_n - \frac{1}{2}b_n\right)$$

となるので，$d_n = a_n - \frac{1}{2}b_n$ とおくと

$$d_{n+1} = 3d_n$$

◀ 等比数列に帰着された

より，数列 $\{d_n\}$ は，初項 $d_1 = a_1 - \frac{1}{2}b_1 = -1$，公比 3 の等比数列となっている．よって

$$\begin{aligned} d_n &= d_1 3^{n-1} \\ &= -3^{n-1} \end{aligned}$$

ここで，$d_n = a_n - \frac{1}{2}b_n$ であったから

$$d_n = -1 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n - \frac{1}{2}b_n = -3^{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

⑨ − ⑧ より

$$a_n - \frac{1}{2}b_n - (a_n - b_n) = -3^{n-1} - \left(-3 \cdot 4^{n-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}b_n = -3^{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore\ b_n = -2 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 4^{n-1}$$

また，これを⑧に代入して

$$a_n - \left(-2 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 4^{n-1}\right) = -3 \cdot 4^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow\ a_n = -3 \cdot 4^{n-1} + \left(-2 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 4^{n-1}\right)$$

$$\therefore\ a_n = -2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1}$$

【解答 2：線形 3 項間漸化式に帰着させる方法】

漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ b_{n+1} = -2a_n + 5b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

において，①より

$$b_n = a_{n+1} - 2a_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

また，この式で n のかわりに $n+1$ とおくと

$$b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

③と④を，それぞれ②に代入すると

$$b_{n+1} = -2a_n + 5b_n$$

$$\Leftrightarrow\ a_{n+2} - 2a_{n+1} = -2a_n + 5(a_{n+1} - 2a_n)$$

$$\therefore\ a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$$

◀ 3 項間漸化式に帰着された

また，①より

$$a_2 = 4a_1 - 2b_1 = 4 - 2(-1) = 6$$

である．

◀ 3 項間漸化式を解く際に，第 2 項も必要となるのでここで求めておく

ここで，漸化式 $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$ は

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

を満たす t，つまり

$$\begin{aligned} & t^2 - 7t + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-3)(t-4) = 0 \\ \therefore\ & t = 3,\ 4 \end{aligned}$$

を用いて

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 4(a_{n+1} - 3a_n) \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 4a_n) \qquad \cdots\cdots ⑥$$

と 2 通りに変形できる．

i) ⑤について

$c_n = a_{n+1} - 3a_n$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は $c_{n+1} = 4c_n$ を満たすので

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 4^{n-1} \\ &= (a_2 - 3a_1)4^{n-1} \\ &= 3 \cdot 4^{n-1} \end{aligned}$$

ここで，$c_n = a_{n+1} - 3a_n$ であるから

$$a_{n+1} - 3a_n = 3 \cdot 4^{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑤'$$

ii) ⑥について

$d_n = a_{n+1} - 4a_n$ とおくと，数列 $\{d_n\}$ は $d_{n+1} = 4d_n$ を満たすので

$$\begin{aligned} d_n &= d_1 3^{n-1} \\ &= (a_2 - 4a_1)3^{n-1} \\ &= 2 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

ここで，$c_n = a_{n+1} - 4a_n$ であるから

$$a_{n+1} - 4a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑥'$$

⑤$'$ − ⑥$'$ より

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

また，この式で n のかわりに $n+1$ とおくと

$$a_{n+1} = 3 \cdot 4^n - 2 \cdot 3^n \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑦と⑧を③に代入して

$$\begin{aligned} & b_n = 3 \cdot 4^n - 2 \cdot 3^n - 2(3 \cdot 4^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}) \\ \Leftrightarrow\ & b_n = 12 \cdot 4^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-1} - 2(3 \cdot 4^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}) \\ \therefore\ & b_n = -2 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 4^{n-1} \end{aligned}$$

第 3 章

数学的帰納法

§ 3.1

数学的帰納法の原理

この章では，数学的帰納法という新しい証明手法について学ぶ．実際に数式を扱う前に，まずはドミノ倒しの例からイメージをつかんでほしい．

3.1.1　数学的帰納法の原理

■ドミノ倒し

数学的帰納法を理解するために，ドミノ倒しの例を考える．

ドミノ倒しという遊びがある．ドミノを床に立ち並べ，並べ終えたら最初の 1 枚を倒す．すると，その勢いで後に続くドミノが次々と倒れていき，最終的には全てのドミノを倒すことができる．逆に，ドミノがうまく倒れず途中で止まってしまうこともある．

ドミノ倒しを成功させる要領はなんだろうか．それは

(1) 最初の 1 枚をしっかりと立てる
(2) 2 枚目以降のドミノを，直前の 1 枚が倒れた勢いで倒れるように立てる

ことである．この 2 点さえ確実に守れば，ドミノ倒しの規模をどんどん大きくすることができる．1 個，2 個，3 個，$\cdots$ とドミノの数を増やしていけば，理論的には無限個のドミノ倒し（もちろん現実には不可能だが）も成功するはずである．

これから学ぶ数学的帰納法では，このドミノ倒しと同じ要領で数学の証明をおこなう．すなわち，数学的帰納法は

(1) まず出発点となる命題を証明する
(2) 直前の命題が正しければ次の命題も正しいことを証明する

ことで，全ての場合において正しさを証明しまおう，という手法である．

以下では，数式の例を用いて数学的帰納法を説明していく．

■数学的帰納法の例

次の問題を考えてみよう．

『すべての自然数 n において

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を証明せよ』

本当にこの①が成立するかどうか，試しに $n = 1$ を代入してみると

$$（左辺）= \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$（右辺）= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2$$

となり成立している．

次に，$n = 2$ の場合も

$$（左辺）= \sum_{k=1}^{2} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$$

$$（右辺）= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 8$$

で成立している．

また，$n = 3$ の場合も

$$（左辺）= \sum_{k=1}^{3} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20$$

$$（右辺）= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 20$$

で確かに成立している．

しかし，n が 1，2，3 の場合に成立したからといって，①が全ての自然数で成立するかはまだわからない．なぜなら，$n = 4$ 以上の場合の成立についてはまだ確かめていないからである．

かといって，4 以上の n について 1 つずつ調べていったとしても，無限にある自然数を調べ尽くすことはできない．

ここで威力を発揮するのが**数学的帰納法** (mathematical induction) である．

> ある自然数 m の場合に①が成り立つと仮定したとき，その次の自然数 $m+1$ の場合にも①が成り立つ．

ことを証明しよう．

これさえ証明してしまえば，$n = 1$ の場合には①が成り立つことがすでに証明されているので，その次の $n = 2$ の場合も成り立つ．○は成立が示されたもの．●は成立がまだ示されていないものとして並べると，次のようになる．

	1	2	3	4	5	
（前）	○	●	●	●	●	$\cdots$
	1	2	3	4	5	
（後）	○	○	●	●	●	$\cdots$

また，$n = 2$ の場合が成り立つならば，同様にしてその次の $n = 3$ の場合も成り立つ．

	1	2	3	4	5	
（前）	○	○	●	●	●	$\cdots$
	1	2	3	4	5	
（後）	○	○	○	●	●	$\cdots$

以降，冒頭のドミノ倒しの例のように，次々と①が成り立つことが示される．この論法に終わりはないので，すべての自然数 n に対して①が成り立つと結論付けてよい．

§ 3.2

基本的な数学的帰納法

以降では，数学的帰納法のさまざまなパターンを紹介していく．特にこの章では，基本的な等式と不等式の数学的帰納法について学ぶ．

3.2.1　等式の数学的帰納法

■等式の数学的帰納法

ここでは，数学的帰納法を利用して等式を証明する．

【例題：基本的な数学的帰納法〜その１〜】

すべての自然数 n において

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を証明せよ．

【解答】

1) $n=1$ のとき

$$（左辺）= \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1\cdot 2 = 2$$

$$（右辺）= \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 2$$

となるので，確かに①は成り立つ．

2) $n=m$ のとき（m はある自然数とする）①が成り立つと仮定する，つまり

$$\sum_{k=1}^{m} k(k+1) = \frac{1}{3}m(m+1)(m+2) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

を仮定する．

このとき，①で $n=m+1$ とおいた等式

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(m+1)(m+2)(m+3) \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つのを以下に示す．

（③の左辺）

$$= \sum_{k=1}^{m+1} k(k+1)$$

$$= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + m(m+1) + (m+1)(m+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} k(k+1) + (m+1)(m+2)$$

◀ 仮定②を使えるような形にするため $\sum_{k=1}^{m} k(k+1)$ をくくり出した

$$= \frac{1}{3}m(m+1)(m+2) + (m+1)(m+2) \quad \because ②$$

$$= (m+1)(m+2)\left(\frac{1}{3}m + 1\right)$$

◀ 共通因数 $(m+1)(m+2)$ でくくった

$$= (m+1)(m+2)\frac{m+3}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(m+1)(m+2)(m+3)$$

$= ③$の右辺

よって，$n = m$ のとき①が成り立つと仮定すれば，$n = m + 1$ の場合も①が成り立つことがいえた．

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，①は成り立つ． ■

3.2.2　不等式の数学的帰納法

■不等式の数学的帰納法

ここでは，数学的帰納法を利用して不等式を証明する．

【例題：基本的な数学的帰納法〜その２〜】

すべての自然数 n において

$$3^n > n + 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つことを証明せよ．

【解答】

1) $n = 1$ のとき

（左辺）$= 3^1 = 3$

（右辺）$= 1 + 1 = 2$

となるので，確かに①は成り立つ．

2) $n = m$ のとき（m はある自然数とする）①が成り立つと仮定する，つまり

$$3^m > m + 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を仮定する．

このとき，①で $n = m + 1$ とおいた不等式

$$3^{m+1} > m + 2 \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つのを以下に示す．

$$\begin{aligned} &(③\text{の左辺}) \\ &= 3^{m+1} \\ &= 3 \cdot 3^m \\ &> 3 \cdot (m + 1) && \because ② \\ &= 3m + 3 \\ &= m + 2 + (2m + 1) \\ &> m + 2 && \because 2m + 1 > 0 \\ &= (③\text{の右辺}) \end{aligned}$$

◀ 仮定②を使えるような形にするため 3^m をくくりだした

◀ 正の数 ($2m + 1$) をなくせば，全体として小さくなる

よって，$n = m$ のとき①が成り立つと仮定すれば，$n = m + 1$ の場合も①が成り立つことがいえた．

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，①は成り立つ． ■

3.2.3　一般の命題の数学的帰納法

■一般の命題の数学的帰納法

一般の命題の場合でも，その命題を等式で表してやれば，等式の数学的帰納法 (p.96) と同様になる．

【例題：基本的な数学的帰納法〜その３〜】

2 以上の自然数 n において

p の整式 $p^n + (1 - p)n - 1$ は $(1 - p)^2$ で割りきれる　$\cdots\cdots$ ①

ことを証明せよ．

【解答】

1) $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} &p^2 + (1 - p) \cdot 2 - 1 \\ &= p^2 - 2p + 1 \\ &= (1 - p)^2 \end{aligned}$$

となるので，確かに①は成り立つ．

2) $n = m$ のとき（m はある自然数とする）①が成り立つと仮定する，つまり

$$p^m + (1-p)m - 1 = (1-p)^2 Q(p) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

を満たす p の整式 $Q(p)$ が存在すると仮定する．

◀ 一般に，「整式 $f(x)$ が $(1-p)^2$ で割りきれる」とは
$f(x) = (1-p)^2 Q(x)$
となるような整式 $Q(x)$ が存在することである

このとき，①で $n = m + 1$ とおいた場合の成立，つまり

$$p^{m+1} + (1-p)(m+1) - 1 = (1-p)^2 R(p) \quad \cdots\cdots ③$$

を満たす p の整式 $R(p)$ が存在することを以下に示す．

$$\begin{aligned}
&（③の左辺）\\
&= p \cdot p^m + m + 1 - pm - p - 1\\
&= p \cdot p^m + m - pm - p\\
&= p\underbrace{\{p^m + (1-p)m - 1\}}_{\text{②の左辺を強引につくる}} \underbrace{-p\{(1-p)m - 1\}}_{\text{ずれた分のつじつま合わせ}} + m - pm - p\\
&= p(1-p)^2 Q(p) - mp(1-p) + \cancel{p} + m - pm - \cancel{p} \quad \because ②\\
&= p(1-p)^2 Q(p) + m(p^2 - 2p + 1)\\
&= p(1-p)^2 Q(p) + m(1-p)^2\\
&= (1-p)^2 \left(pQ(p) + m\right)
\end{aligned}$$

◀ 仮定②が使えるような形をうまくつくる

◀ 共通因数 $(1-p)^2$ でくくった

$Q(p)$ は整式だから $pQ(p) + m$ も整式となり，これを $R(p)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&= (1-p)^2 R(p)\\
&= （③の右辺）
\end{aligned}$$

よって，$n = m$ のとき①が成り立つと仮定すれば，$n = m + 1$ の場合も①が成り立つことがいえた．

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，①は成り立つ．　■

§ 3.3

いろいろな数学的帰納法

以降では，より複雑な数学的帰納法の利用について学ぶ.

3.3.1　答えを推定してから数学的帰納法で証明する

■答えを推定してから数学的帰納法で証明する

「証明せよ」という問題でなくても，答えを予想できれば，それを証明することによって解答になる.

【例題：いろいろな数学的帰納法〜その１〜】

漸化式

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で定められる数列の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答】

漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n}$ に $n = 1$ を代入すると

$$a_2 = \frac{2a_1}{1+a_1} = \frac{2\cdot 2}{1+2} = \frac{4}{3}$$

また，$n = 2$ を代入すると

$$a_3 = \frac{2a_2}{1+a_2} = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}} = \frac{8}{7}$$

また，$n = 3$ を代入すると

$$a_4 = \frac{2a_3}{1+a_3} = \frac{2\cdot\frac{8}{7}}{1+\frac{8}{7}} = \frac{16}{15}$$

となるので

$$a_n = \frac{2^n}{2^n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と推定できる．

　以下，この推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明する．

1) $n=1$ のとき

$$a_1 = \frac{2^1}{2^1-1} = 2$$

となるので，確かに②は成り立つ．

2) $n=m$ のとき (m はある自然数とする)②が成り立つと仮定する，つまり

$$a_m = \frac{2^m}{2^m-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つと仮定する．

このとき，②で $n=m+1$ とおいた場合の成立，つまり

$$a_{m+1} = \frac{2^{m+1}}{2^{m+1}-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

か成り立つことを以下示す．

$$\begin{aligned}
&\text{（④の左辺）}\\
&= a_{m+1}\\
&= \frac{2a_m}{1+a_m} && \because ①\\
&= \frac{2\cdot\dfrac{2^m}{2^m-1}}{1+\dfrac{2^m}{2^m-1}} && \because ③\\
&= \frac{2\cdot 2^m}{2^m-1+2^m}\\
&= \frac{2^{m+1}}{2^{m+1}-1}\\
&= \text{（④の右辺）}
\end{aligned}$$

◀ ①の漸化式はすべての自然数で成り立つ

よって，$n=m$ のとき③が成り立つと仮定すれば，$n=m+1$ の場合も③が成り立つことがいえた．

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，②は成り立つ． ■

3.3.2　$n=m,\ m+1$ を仮定して $n=m+2$ を示す

■$n=m,\ m+1$ を仮定して $n=m+2$ を示す

$n=m$ の場合を仮定しただけでは，$n=m+1$ の場合を証明できないときもある．このようなときは，さらに $n=m$ に加えて $n=m+1$ の場合も仮定した上で，$n=m+2$ の場合を証明してやるとよい．

【例題：いろいろな数学的帰納法〜その２〜】

$x+\dfrac{1}{x}=t$ とするとき，すべての自然数 n において

式 $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ は t の n 次多項式で表される　…………………… ①

ことを証明せよ．

【解答】

1) $n=1$ のとき

$$x^1+\frac{1}{x^1}=t$$

となり，確かに①は成り立つ．

$n=2$ のとき

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$$

となり，こちらも確かに①は成り立つ．

◀ $n=2$ の場合の成立を示すのは，2) の証明で必要となるからである

2) $n=m,\ m+1$ のとき (m はある自然数とする)①が成り立つと仮定する，つまり

$$x^m+\frac{1}{x^m}=P_m(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}=P_{m+1}(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つと仮定する．ただし，式 $P_i(t)$ は t の i 次多項式を意味するものとする．

このとき，①で $n=m+2$ とおいた場合の成立，つまり

$$x^{m+2}+\frac{1}{x^{m+2}}=P_{m+2}(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

か成り立つことを以下示す．

（④の左辺）

$$
\begin{aligned}
&= x^{m+2} + \frac{1}{x^{m+2}} \\
&= \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m+1}}_{\text{仮定③}} \left(x + \frac{1}{x}\right) - \underbrace{\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)}_{\text{仮定②}} \\
&= t \cdot P_{m+1}(t) - P_m(t) \qquad \because ②,\ ③
\end{aligned}
$$

◀ 仮定③を強引にくくり出し，つじつまあわせの部分で仮定②が欲しくなる

$t \cdot P_{m+1}(t) - P_m(t)$ は t の $m+2$ 次多項式となるから，これを $P_{m+2}(t)$ とおくと

◀ $t {\cdot} P_{m+1}(t)$ は $m{+}2$ 次多項式，$P_m(t)$ は m 次多項式であり，その差 $t \cdot P_{m+1}(t) - P_m(t)$ は，必ず $m+2$ 次多項式となる
たとえば，2 次多項式 $2t^2 - 3t + 4$ から 1 次多項式 $3t + 2$ を引くと
$2t^2 - 3t + 4 - (3t + 2) = 2t^2 + 6t + 2$
となり，2 次多項式が得られる

$$= (\text{④の右辺})$$

よって，$n = m$，$m + 1$ のときⒸ①が成り立つと仮定すれば，$n = m+2$ の場合も①が成り立つことがいえた．

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，①は成り立つ．■

実際に問題を解く場面は，いきなり上記のようにきれいに書き始められるようなことはないと言ってよい．実際には $n = 1$ 成立を確認して，$n = m$ 成立を仮定し $n = m + 1$ 成立を示そうとするのだが，$n = m + 1$ 成立を示そうとしたときに，前提条件が足りないことに気が付く．そこで $n = m$ に加えて $n = m + 1$ の場合も仮定した上で，$n = m + 2$ の場合を証明するという発想に行き着くのである．

m　$m + 1$　$m + 2$
○　○　●

3.3.3　$n = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ を仮定して $n = m + 1$ を示す

■$n = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ を仮定して $n = m + 1$ を示す

【例題：いろいろな数学的帰納法〜その３〜】

次の式を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^3,\ \ a_n > 0\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

この問題は「証明せよ」ではないので，まず実験から答えを予想するところからはじめる．予想が立てば，それを証明してやるのだが，$n = m + 1$ の場合の成立をいうのに，$n = 1,\ 2,\ \cdots,\ m - 1,\ m$ の場合の成立を仮定する必要がある．

【解答】

①に $n=1$ を代入すると

$$\left(\sum_{k=1}^{1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{1} {a_k}^3$$

$$\Leftrightarrow\ {a_1}^2 = {a_1}^3$$

$$\therefore\ a_1 = 1$$

また，$n=2$ を代入すると

$$\left(\sum_{k=1}^{2} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{2} {a_k}^3$$

$$\Leftrightarrow\ (a_1+a_2)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3$$

$$\Leftrightarrow\ (1+a_2)^2 = 1^3 + {a_2}^3$$

$$\Leftrightarrow\ {a_2}^3 - {a_2}^2 - 2a_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ a_2(a_2+1)(a_2-2) = 0$$

$$\therefore\ a_2 = 2$$

また，$n=3$ を代入すると

$$\left(\sum_{k=1}^{3} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{3} {a_k}^3$$

$$\Leftrightarrow\ (a_1+a_2+a_3)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + {a_3}^3$$

$$\Leftrightarrow\ (1+2+a_3)^2 = 1^3 + 2^3 + {a_3}^3$$

$$\Leftrightarrow\ {a_3}^3 - {a_3}^2 - 6a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ a_3(a_3+2)(a_3-3) = 0$$

$$\therefore\ a_3 = 3$$

となるので

$$a_n = n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

と推定できる．

以下，この推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明する．

1) $n=1$ のとき．

$$a_1 = 1$$

となるので，確かに②は成り立つ．

2) $n \leqq m$(m はある自然数とする) を満たすすべての n

で，②が成り立つと仮定する，つまり

$$a_l = l \ (1 \leqq l \leqq m) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

が成り立つと仮定する．

このとき，②で $n = m + 1$ とおいた場合の成立，つまり

$$a_{m+1} = m + 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

が成り立つことを以下示す．

①より

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=1}^{m+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{m+1} {a_k}^3 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} {a_k}^3 + {a_{m+1}}^3 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sum_{k=1}^{m} k + a_{m+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} k^3 + {a_{m+1}}^3 \qquad \because \text{③} \\
\Leftrightarrow\ & \left\{\frac{m(m+1)}{2} + a_{m+1}\right\}^2 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} + {a_{m+1}}^3 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{m^2(m+1)^2}{4} + m(m+1)a_{m+1} + {a_{m+1}}^2 \\
& \qquad = \frac{m^2(m+1)^2}{4} + a_{m+1}^3 \\
\Leftrightarrow\ & {a_{m+1}}^3 - {a_{m+1}}^2 - m(m+1)a_{m+1} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & a_{m+1}(a_{m+1} + m)\{a_{m+1} - (m+1))\} = 0 \\
\therefore\ & a_{m+1} = m + 1 \qquad (\text{④がいえた})
\end{aligned}$$

◀ 仮定③を組み込むための準備

◀ l が $1 \leqq l \leqq m$ のとき，$a_l = l$ となることを③で仮定しているので $\sum_{k=1}^{m} a_k$ は

$\sum_{k=1}^{m} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1 + 2 + \cdots + m = \sum_{k=1}^{m} k$

となる

よって，$n = m$ のとき②が成り立つと仮定すれば，$n = m + 1$ の場合も②が成り立つことがいえた．

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，②は成り立つ．■