

## 第4章 確率

### § 4.1 確率とは何か

さいころを投げて1の目が出ることや、宝くじを買って1等に当選することなどは、運に左右されることなので、「必ず1の目が出る」とか、「1等は絶対に当らない」などとはいいきれない。

どちらも、将来に何が起こるか分からないという点では共通である。しかし、「起こりやすさ」という点から見ると、さいころを投げて1の目が出ることの方が、宝くじを買って1等に当選することよりはるかに大きいと想像できる。

ここでは、この「起こりやすさ」を数値で表す方法である「確率」について学んでいく。

#### 4.1.1 試行と事象

##### ■試行・事象とは何か

1個のさいころを投げるとき、その出る目は



のうちのいずれかであるが、このうちの目が出るかは偶然に左右される。

このさいころ投げのように、同じ条件で何度も繰り返すことができ、その結果が偶然によってきまる実験や観測などを**試行(trial)**という。また、試行の結果起こる事柄を**事象(event)**という。

例えば、「1の目が出る」は、さいころ投げという試行における事象の1つである。

##### ■事象を集合で表す

試行や事象は、『集合』( $p.1$ )で表すことができる。例えば、さいころ投げの試行の結果起こる事象の全体は

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

などと表すことができる。また、この試行では

$A$  : 「1の目が出る」

$B$  : 「奇数の目が出る」

$C$  : 「3の目が出ない」

などの事象を考えることができるが、これらは  $U$  の部分集合を用いて

$$A = \{1\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

と表すことができる。

一般に、ある試行において、起こる事象全体を表す集合を  $U$  とするとき、この集合  $U$  のことを**標本空間(sample space)**という。また、試行によって起こる事象  $A$  を表す集合  $A$  は標本空間  $U$  をうまく作ることによって、 $U$  の部分集合 ( $A \subseteq U$ ) として表すことができる。

今後簡単のため、「事象  $A$  」と「事象  $A$  を表す集合  $A$  」は区別せず、どちらも単に事象  $A$  ということにする。標本空間は事象全体を表す集合なので、**全事象(sure event)**ともいう。

また、決して起こらない事象も考え、これを**空事象(null event)**という。

空事象は空集合  $\Phi$  で表される。

また、標本空間  $U$  の要素のただ1つからなる集合で表される事象を**根元事象(fundamental event)**という。上のさいころ投げの例では、根元事象は

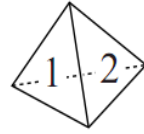
$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

の6つである。

### ■標本空間と事象の例1:さいころ投げの場合

ここでは、さいころ投げを例にとり、標本空間の作り方と事象の表し方をいくつかの視点から見てみよう。  
特に、同じ試行でも標本空間にはいくつかの作り方がある点に着目してもらいたい。  
試行として

「1から4の目が書かれた正四面体のさいころを2回振る」



を考えてみる。

この試行は、右表のように、1回目に出た目と2回目に出た目の順列で

$${}_4H_2 = 4^2 = 16 \text{ 通り}$$

にまとめることができる。

これをもとに、標本空間  $U$  を

$$U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

	1	2	3	4
1	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1
2	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2
3	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3
4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4

ととれば、例えば

事象  $A$  : 「1の目と2の目が出る」

は  $U$  の部分集合を用いて

$$A = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

と表すことができる。

また、この試行は、右表のように、1回目に出た目と2回目に出た目の重複組合せで

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = 10 \text{ 通り}$$

にまとめることもできる。

これをもとに、標本空間  $U'$  を

$$U' = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

ととれば

事象  $A$  : 「1の目と2の目が出る」

は  $U'$  の部分集合を用いて

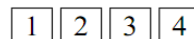
$$A = \{(1, 2)\}$$

と表すことができる。

### ■標本空間と事象の例2:カード引きの場合

今度は、カード引きを例にとり、標本空間の作り方と事象の表し方をいくつかの視点から見てみる。  
試行として

「1から4の数字が書かれた4枚のカードから続けて2回引く」



を考えてみる。

この試行は、右表のように、1回目に引いたカードと2回目に引いたカードの順列で

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12 \text{ 通り}$$

にまとめることができる。

これをもとに、標本空間  $U$  を

$$U = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

ととれば、例えば

事象  $A$  : 「1のカードと2カードを引く」

は  $U$  の部分集合を用いて

$$A = \{(1,2), (2,1)\}$$

と表すことができる。

また、この試行は、右表のように、1回目に引いたカードと2回目に引いたカードの組合せで

$${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \text{ 通り}$$

にまとめることもできる。

これをもとに、標本空間  $U'$  を

$$U' = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$$

ととれば

事象  $A$  : 「1のカードと2のカードを引く」

は  $U'$  の部分集合を用いて

$$A = \{(1,2)\}$$

と表すことができる。

以上、さいころ投げとカード引きの例で見てきたように、たとえ同じ試行でも、観測の仕方(標本空間のとり方)にはいろいろな方法がある。また、標本空間が違えば事象の表し方も違ってくる。

#### 4.1.2 確率の定義

##### ■ 確率の考え方

簡単な例として、さいころを1回投げるとする試行を考える。

この試行の標本空間  $U$  を

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

とする。

この試行において、「1の目が出る」という事象  $A$  は、 $U$  の部分集合として

$$A = \{1\}$$

	1	2	3	4
1		2,1	3,1	4,1
2	1,2		3,2	4,2
3	1,3	2,3		4,3
4	1,4	2,4	3,4	

	1	2	3	4
1				
2	1,2			
3	1,3	2,3		
4	1,4	2,4	3,4	



と表すことができる。

今、さいころがいくつではなく正確な立方体で作られているとすれば、 $U$  の根元事象の6通りのどれも同じ程度に実現すると期待できる。このとき、根元事象は同様に確からしい(equally likely)という。

そこで、標本空間  $U$  の要素の個数に対する事象  $A$  の要素の個数の比で、事象  $A$  の起こりやすさを  $P(A)$  で表すことにする。つまり

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{6}$$

とする。この  $P(A)$  を、事象  $A$  が起こる確率(probability)という。

また、奇数の目が出るという事象  $B$  は

$$B = \{1, 3, 5\}$$

3の目が出ないという事象  $C$  は

$$C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

と表すことができるから、それぞれの事象の起こる確率  $P(B)$ ,  $P(C)$  は

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{5}{6}$$

となる。

### ■ 確率の定義

#### 確率の定義

ある試行の標本空間を  $U$  とし、その部分集合で事象  $A$  を表せたとする。ここで、 $U$  の根元事象が同様に確からしいならば、事象  $A$  の起こる確率  $P(A)$  は

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

となる。

確率を正確に求めるには以下の3点に注意するとよい。

#### i) 「標本空間をしっかりと定める」

試行によって起こる事象を過不足なく表す標本空間を作る。

#### ii) 「根元事象が同様に確からしいことを確認する」

自分で作った標本空間の根元事象が本当に同様に確からしいといえるのか、考えてみる。

#### iii) 「事象が標本空間の部分集合として表されることを確認する」

たとえ、i), ii) をしっかりと定めていても、求めたい事象が標本空間の部分集合として表現できなければ確率を求めることはできない。

同じ確率を求めるとしても、標本空間のとり方次第で問題が難しくなったり簡単になったりする。

今後、確率を求める際には、標本空間のとり方について常に気を配りながら学習するとよい。

### 【例題: 同様に確からしい】

次は  $A$  君の解答である。この解答は正しいか、間違っているかを考え、間違っていれば正しい解答を示せ。

「2枚の硬貨を同時に投げるとき、表と裏の出る枚数について、(表, 裏) = (2, 0), (1, 1), (0, 2) の

3通りの場合があるので、表が2枚出る確率は  $\frac{1}{3}$  である。」

## 【解答】

この解答は間違っている。

2枚の硬貨をきちんと区別して、表と裏についてまとめると

	表	裏
表	(表, 表)	(裏, 表)
裏	(表, 裏)	(裏, 裏)

の4通りがあり、これらは同様に確からしい。

この表の(裏, 表)と(表, 裏)をまとめて  $(1, 1)$  と1通りで表している A 君の解答では、例えば  $(2, 0)$  と  $(1, 1)$  は同様に確からしいとはいえず、間違った確率を計算している。

正しい解答は

$$\frac{1}{4}$$

である。

## 【例題:さいころ型の確率】

1から4の目を書かれた正四面体のさいころを2回振るとき、1回目と2回目の目の積が3の倍数となる確率を求めよ。

## 【解答】

正四面体のさいころを2回振ったときの目の出方の重複順列

$$4^2 \text{ 通り}$$

は、同様に確からしい。

このうち、1回目と2回目の目の積が3の倍数となるのは

	1	2	3	4
1	1,1	2,1	3,1	4,1
2	1,2	2,2	3,2	4,2
3	1,3	2,3	3,3	4,3
4	1,4	2,4	3,4	4,4

上表の網掛け部分の7通り。

よって、求める確率は  $\frac{7}{4^2} = \frac{7}{16}$  となる。

## 【例題:くじ引き型の確率】

1から4の数字が書かれたカードから2枚引くとき、1枚目と2枚目の数字の積が3の倍数となる確率を求めよ。

## 【解答】

1から4の数字が書かれたカードから2枚引くときの組合せ  ${}_4C_2$  通りは、同様に確からしい。

このうち、1枚目と2枚目の数字の積が3の倍数となるのは右表の網掛け部分の3通り。

	1	2	3	4
1				
2	1,2			
3	1,3	2,3		
4	1,4	2,4	3,4	

よって、求める確率は  $\frac{3}{{}_4C_2} = \frac{1}{2}$  となる。

さいころ型では重複順列の数を分母に、くじ引き方では(基本的には)組合せの数を分母にとればよい。

**【例題:表や樹形図の利用】**

次の問に答えよ。

- (1) 1から4の目を書いてある正四面体のさいころを2回振る。2つの目の和が5となる確率を求めよ。
- (2) 1から4までの数字が書いてある4枚のカードから、連続して2枚のカードを引く。はじめに引いたカードの数のほうが、あとに引いたカードより小さくなる確率を求めよ。
- (3) 1から4までの数字が書いてある4枚のカードから、連続して2枚のカードを引く。カードの数の和が5以上となる確率を求めよ。

以下の解答では、表でまとめた場合の解答である。樹形図についてまとめた場合には、右の欄外を参照のこと。

**【解答】**

(1) 正四面体のさいころを2回振ったときの目の出方の

重複順列  $4^2$  通りは、同様に確からしい。

このうち、2つの目の和が5となるのは、下の表の網掛けの部分

数えて4通り。よって、求める確率は  $\frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$  となる。

	1	2	3	4
1	1,1	2,1	3,1	4,1
2	1,2	2,2	3,2	4,2
3	1,3	2,3	3,3	4,3
4	1,4	2,4	3,4	4,4

**【注意】**

組合せでまとめた下の表では、同様に確からしくないで、確率を求めることはできない。

	1	2	3	4
1	1,1			
2	1,2	2,2		
3	1,3	2,3	3,3	
4	1,4	2,4	3,4	4,4

(2) 4枚のカードの中から2枚引いたときの順列  $4P_2$  通りは、同様に確からしい。

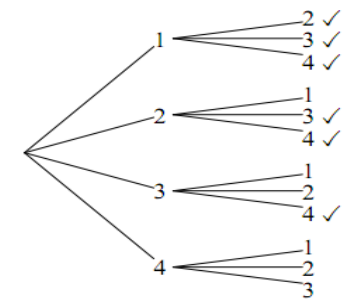
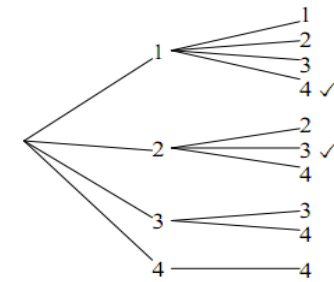
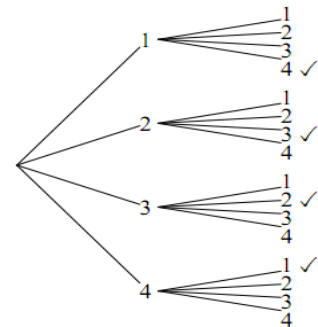
このうち、はじめに引いたカードの数のほうが、あとに引いたカードより小さくなるのは、下の表の網掛けの部分

数えて6通り。よって、求める確率は  $\frac{6}{4P_2} = \frac{1}{2}$  となる。

	1	2	3	4
1		2,1	3,1	4,1
2	1,2		3,2	4,2
3	1,3	2,3		4,3
4	1,4	2,4	3,4	

**《別解》**

4枚のカードの中から2枚引いたときの大小関係は  
 (1枚目のカード) > (2枚目のカード) または  
 (1枚目のカード) < (2枚目のカード)



のどちらかであり、これら2通りは同様に確からしい。

よって、求める確率は  $\frac{1}{2}$  となる。

(3) 4枚のカードの中から2枚引いたときの組合せ  ${}_4C_2$  通りは、同様に確からしい。

下の表でこのうち、カードの数の和が5以上となるのは、下の表の網掛けの部分数を数えて4通り。よって、求める確率は  $\frac{4}{C_2} = \frac{2}{3}$  となる。

	1	2	3	4
1				
2	1,2			
3	1,3	2,3		
4	1,4	2,4	3,4	

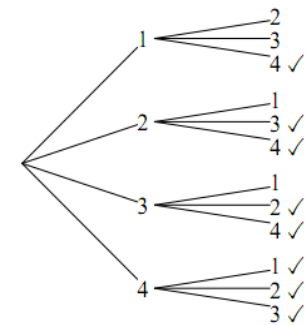
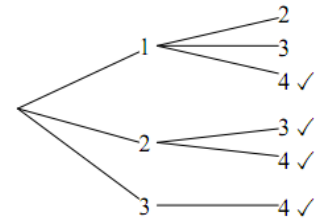
《別解: 順列で考える》

4枚のカードの中から2枚引いたときの順列  ${}_4P_2$  通りは、同様に確からしい。

下の表でこのうち、カードの数の和が5以上となるのは、下の表の網掛けの部分数を数えて8通り。

よって、求める確率は  $\frac{8}{P_2} = \frac{2}{3}$  となる。

	1	2	3	4
1		2,1	3,1	4,1
2	1,2		3,2	4,2
3	1,3	2,3		4,3
4	1,4	2,4	3,4	



### 4.1.3 確率の基本性質

#### ■ 確率の基本性質

ある試行における標本空間を  $U$  , 事象を  $A$  とする. このとき,  $U, A$  はそれぞれ,  $n(U), n(A)$  個の根元事象からなり

$$0 \leq n(A) \leq n(U)$$

が成り立つ. 根元事象が同様に確からしい場合,  $\frac{n(A)}{n(U)} = P(A)$  であるから, 上の式を  $n(U)$  で割ることにより

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \dots\dots ①$$

となる. 特に標本空間  $U$  に関しては

$$P(U) = 1 \quad \dots\dots ②$$

である.

また、事象  $A, B$  について  $A \cap B = \phi$  すなわち  $A$  と  $B$  が共通の根元事象をもたないとき、 $A \cup B$  の作る根元事象の個数は

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

であるから、両辺を  $n(U)$  で割ることにより

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)}$$

つまり

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

となる。

— 確率の基本性質 —

ある試行における標本空間を  $U$ 、事象を  $A, B$  とすると、根元事象が同様に確からしいとき

i)  $0 \leq P(A) \leq 1$

ii)  $P(U) = 1$

iii)  $A \cap B = \emptyset$  のとき、 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

が成り立つ。

$A \cap B = \phi$  のとき、事象  $A$  と  $B$  は排反(はいはん)であるという。



## § 4.2 加法定理と排反事象

さいころ投げにおいて、例えば「偶数の目が出る」という事象と「3以下の目が出る」という事象には共通している事象、つまり「2の目が出る」という事象がある。このように、2つの事象において、共通の事象がある場合や、無い場合について、ここでは整理してみる。

### 4.2.1 和事象と積事象

#### ■和事象と積事象

さいころを1回投げる試行を考えよう。この試行において、標本空間  $U$  を

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

とすると、「偶数の目が出る」という事象  $A$  , 「3以下の目が出る」という事象  $B$  は

$$A = \{2, 4, 6\} \quad , \quad B = \{1, 2, 3\}$$

と表すことができる。

いま、「偶数の目が出るか、または、2以下の目が出る」という事象は、 $A$  と  $B$  の和集合で

$$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

と表すことができる。

また、「偶数の目が出て、かつ、2以下の目が出る」という事象は、 $A$ と $B$ の共通部分で

$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3\} = \{2\}$$

と表すことができる。

和事象と積事象

標本空間  $U$  の部分集合で表される2つの事象  $A, B$  において

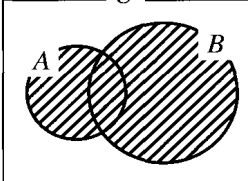
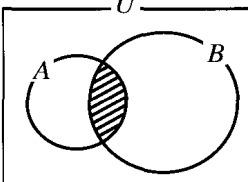
「 $A$  または  $B$ 」

を  $A$  と  $B$  の **和事象 (sum event)** という。和事象は和集合  $A \cup B$  で表される(右図参照)。

また

「 $A$  かつ  $B$ 」

を  $A$  と  $B$  の **積事象 (product event)** という。積事象は共通部分  $A \cap B$  で表される(右図参照)。

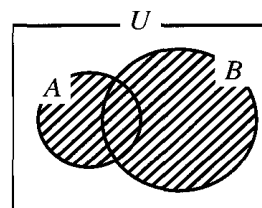
### 4.2.2 加法定理と排反事象

#### ■加法定理

ある試行の標本空間  $U$  と、事象  $A, B$  について考える。事象  $A, B$  に『包含と排除の原理』を用いると

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

が成り立つ。この両辺を標本空間  $U$  の根元事象の個数  $n(U)$  で割ると



$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$$

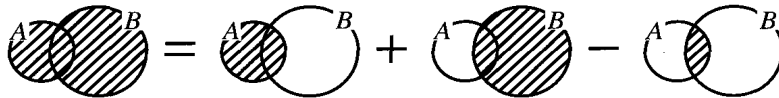
$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つ.

この①のことを, 確率の**加法定理(addition theorem)**という.

加法定理
<p>ある試行における事象 <math>A, B</math> について</p> $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ <p>が成り立つ.</p>

$P(A \cup B)$  を求めるのに,  $P(A)$  と  $P(B)$  を加えたのでは,  $P(A \cap B)$  を2回加えたことになる. そこで, 余分な1回分の  $P(A \cap B)$  を引くのだと考えると覚えやすい. イメージは下の図のようになる.



**【例題: 加法定理】**

2個のさいころ  $A, B$  を同時に投げるとする. さいころ  $A$  で3の目が出るか, またはさいころ  $B$  で3の目が出る確率を求めよ.

**【解答】**

$A$  : 「 $A$  のさいころで3の目が出る」

$B$  : 「 $B$  のさいころで3の目が出る」

とすると, 求める確率は  $P(A \cup B)$  である.

いま,  $P(A), P(B)$  は

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$$

である.

また, 2つのさいころの目の出方は  $6^2$  通りあり, このうちともに3の目となるのは1通りであるから,  $P(A \cap B)$  は

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

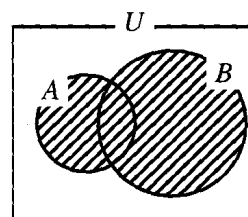
となる.

以上より

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{J 加法定理} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

### ■排反事象

さいころを1回投げる試行において、偶数の目が出る事象  $A = \{2, 4, 6\}$  と、奇数の目が出る事象  $B = \{1, 3, 5\}$  は同時に起こることがない。別のいいかたをすれば、同時に起こらない事象の積事象は、次のように空事象になる。



$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \phi$$

一般に、2つの事象  $A, B$  が同時に起こることがないとき、 $A$  と  $B$  は互いに排反(exclusive)である、または、排反事象(exclusive event)であるという。このとき、 $A$  と  $B$  の積事象は空事象である。

$$A \cap B = \phi$$

#### 排反事象の加法定理

事象  $A, B$  において、 $A$  と  $B$  が同時に起こらないとき、すなわち

$$A \cap B = \emptyset$$

が成り立つとき、 $A$  と  $B$  は互いに排反であるという。

また、このとき  $P(A \cap B) = 0$  であるから、加法定理より

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

が成り立つ。

#### 【例題: 排反事象～その1～】

ジョーカーを含まない52枚のトランプの中から1枚のカードを引く。事象  $A, B, C, D$  を

- $A$  : ♠ のカードを引く       $B$  : ♣ のカードを引く  
 $C$  : 3 のカードを引く       $D$  : 10 以上のカードを引く

とする。次のうち、排反事象となるものをすべて選べ。

- (1)  $A$  と  $B$       (2)  $B$  と  $C$       (3)  $C$  と  $D$       (4)  $D$  と  $A$

#### 【解答】

- (1) ♠ であり、♣ であるトランプ存在しない、つまり同時に起こりえないので、 $A$  と  $B$  は排反である。  
(2) ♣ であり、3 であるカードは存在する(♣ の3)、つまり同時に起こりえるので、 $B$  と  $C$  は排反ではない。  
(3) 3 であり、10 以上であるカードは存在しない、つまり同時に起こりえないので、 $C$  と  $D$  は排反である。  
(4) 10 以上であり、♠ であるカードは存在する(例えば♠の11)、つまり同時に起こりえるので、 $D$  と  $A$  は排反ではない。

以上より、排反事象となるのは(1)と(3)である。

#### 【例題: 排反事象～その2～】

10本のくじの中に当りくじが3本ある。この中から4本のくじを同時に引くとき、少なくとも2本の当りくじを引く確率を求めよ。

【解答】

少なくとも2本の当りくじを引くのは、2本の当りくじを引く場合と、3本の当りくじを引く場合があり、これらは排反な事象である。

まず、10本のくじの中から4本のくじを引く組合せの  ${}_{10}C_4=210$  通りは、どれも同様に確からしい。

このうち、2本の当りくじと2本のはずれくじを引く場合は

$${}_3C_2 \cdot {}_7C_2 = 63 \text{ 通り}$$

あり、3本の当りくじと1本のはずれくじを引く場合は

$${}_3C_3 \cdot {}_7C_1 = 7 \text{ 通り}$$

ある。

よって、求める確率は

$$\frac{63}{210} + \frac{7}{210} = \frac{1}{3}$$

4.2.3 余事象とその確率

■余事象

事象  $A$  に対して、“ $A$  が起こらない”という事象を  $A$  の余事象(complementary event) といい、 $\bar{A}$  で表す。余事象  $\bar{A}$  は、事象  $A$  を表す集合  $A$  の補集合  $\bar{A}$  で表される。

余事象  $\bar{A}$  のさらに余事象は、“ $A$  が起こる”という事象  $A$  にもどる。事象  $A$  と  $\bar{A}$  は互いに排反で、それらの和事象  $A \cup \bar{A}$  は標本空間  $U$  である。

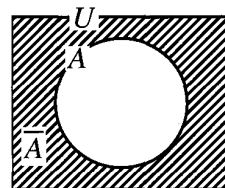
■余事象の確率

『補集合の要素の個数』より

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

が成り立つ。この両辺を、 $n(U)$  で割ると

$$\frac{n(A)}{n(U)} = 1 - \frac{n(A)}{n(U)} \quad \therefore P(A) = 1 - P(\bar{A})$$



が成り立つ。

余事象の確率

事象  $A$  と、その余事象  $\bar{A}$  において

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

が成り立つ。

このことは、ある事象  $A$  の確率を求めるのが大変な場合、むしろ  $A$  の余事象  $\bar{A}$  の要素の個数に着目すべきである、ということを教えてくれる。

【例題:余事象】

3つのさいころを同時に振るとき、少なくとも1つのさいころで3の倍数の目が出る確率を求めよ。

【解答】

事象  $A$  を

$A$  : 「3つのさいころで3の倍数の目が出ない」

とおくと、求める確率は  $P(A)$  である。

3つのさいころの目の重複順列  ${}_6P_3=6^3=216$  通りは、どれも同様に確からしい。

このうち、3の倍数の目がまったく出ないのは(3の倍数でない目が 1, 2, 4, 5 と4つあるので)

$${}_4P_3=4^3=64 \text{ 通り}$$

よって、3の倍数の目が出ない確率  $P(A)$  は

$$P(A)=\frac{64}{216}=\frac{8}{27}$$

求める確率は  $P(\bar{A})$  なので

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

となる。

§ 4.3 乗法定理と独立事象

さいころを1回振る試行において、6の目が出る確率は普通に考えれば  $\frac{1}{6}$  である。

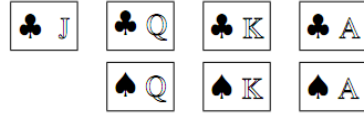
しかし、実はいかさまさいころで6の目が2つの面に書いてあると知らされれば、6の目が出る確率は  $\frac{2}{6}$

となる。このように、ある事象について何らかの情報が得られると、その事象の起こりやすさについての私達の知識は変わってくる。ここでは、ある情報の下での確率という考え方を学んでいく。

4.3.1 乗法定理と独立事象

■条件付確率

右図のように、クラブのジャックからエースまでの4枚とスペードのクイーンからエースまでの3枚、計7枚のカードの中から1枚のカードを引くという試行を考える。



事象 A :「スペードのカードを引く」

事象 B :「エースのカードを引く」

とおくと、それぞれの事象の起こる確率  $P(A)$ 、 $P(B)$  は

$$P(A) = \frac{3}{7}, \quad P(B) = \frac{2}{7}$$

となる。

さて、いまこの試行において「引いたカードはスペードであった」ということが知らされたとして、その状況の下で考えた場合に、そのカードが“スペードのエース”である確率はいくつになるだろうか。

これは次のように考えればよい。

まず、引いたカードがスペードであることは確定しているのだから、手持ちのカードの種類には3通りしかない。そして、そのうちエースであるのは1通りだから、求める確率は  $\frac{1}{3}$  となる。

これは、標本空間を新しく A として考えたときの、事象  $A \cap B$  の確率を考えていることに他ならない。

事象 A という条件の下、事象 B が起こる確率を、条件付確率(conditional probability) といい  $P_A(B)$  と表す。  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \dots\dots\dots ①$$

であると考えることができた。さらに、この右辺の分母・分子を標本空間の根元事象の個数  $n(U)$  で割ると、

$$\frac{n(A)}{n(U)} = P(A), \quad \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = P(A \cap B) \text{ であるから}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \dots\dots ②$$

となるので、この②を条件付確率  $P_A(B)$  の定義とする。

条件付確率の定義

ある試行における事象を A, B とする。事象 A という条件の下、事象 B の起こる確率  $P_A(B)$  を

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

と定義する。

## ■乗法定理

条件付確率の定義である2の分母を払うと

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$$

が成り立つ. これを確率の**乗法定理(multiplication theorem)**という.

### 乗法定理

ある試行における事象を  $A$ ,  $B$  とするとき

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$$

が成り立つ.

分母を払っただけで、「定理」というのはおかしい気がするかもしれないが、この式には、

「①の  $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$  で簡単に条件付確率  $P_A(B)$  が求まるときには、逆にこれを利用して  $P(A \cap B)$  が求められますよ」という意味が込められている.

先程の例でいうなら、スペードのエースを引く確率  $P(A \cap B)$  を求めるのに、まずスペードを引く確率  $P(A) = \frac{3}{7}$  に、スペードを引いた条件の下でそれがエースである確率  $P_A(B) = \frac{1}{3}$  をかけて

$$P(A \cap B) = \frac{\frac{3}{7} \times 1}{3} = \frac{1}{7}$$

とすればよいことをいっている.

### 【記憶例題: 条件付確率と乗法定理～その1～】

5本のうち2本が当りのくじがあり、そこから1本ずつくじを引く.

$A$  : 「1回目のくじ引きで当りが出る」

$B$  : 「2回目のくじ引きで当りが出る」

という事象  $A$ ,  $B$  を考える. このとき、積事象  $A \cap B$  つまり

$A \cap B$  : 「1回目と2回目のくじ引きで連続して当りが出る」

という事象の確率  $P(A \cap B)$  を以下の2通りで求めよ.

(1) 標本空間を連続して2回を引いたときのくじの組合せとして  $P(A \cap B)$  を求めよ.

(2) 乗法定理  $P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$  を利用して求めよ.

### 【解答】

(1) 5本のくじから連続して2本くじを引くときの組合せは  ${}_5C_2$  通りあり、これは同様に確からしい. このうち、2本とも当りであるのは1通りであるから

$$P(A \cap B) = \frac{1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10} \text{ となる.}$$

(2)  $P(A)$  つまり、1回目のくじ引きで当る確率は

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

$P_A(B)$  つまり、1回目のくじ引きで当たった条件の下、2回目のくじ引きで当る確率は

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{4}$$

よって、乗法定理より

$$P(A \cap B) = P(A) \Pr_{\text{sub } A}(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

となる。

### 【例題: 条件付確率と乗法定理～その2～】

4本の当りくじを含む10本のくじがある。甲、乙がこの順にこのくじを1本ずつ引く。ただし、引いたくじはもとに戻さない。このとき次の間に答えよ。

- (1) 甲が当たったという条件の下で、乙が当る確率を求めよ。
- (2) 甲が当り、乙も当る確率を求めよ。
- (3) 乙の当る確率を求めよ。

### 【解答】

事象  $A$ ,  $B$  を

$A$  : 「甲が当る」

$B$  : 「乙が当る」

とおく。

- (1) 甲が当たった状況では、くじは9本残っていて、その中に当りくじは3本あるから

$$P_A(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

- (2) 求める確率は  $P(A \cap B)$  である。

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

- (3) 甲が当り、乙が当るのは(2)より  $\frac{2}{15}$  である。また、甲がはずれて、乙が当るのは

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

よって、 $\frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{2}{5}$  となる。

《別解: 標本空間を乙の引くくじにとる》

乙の引きうるくじは10通りあり、これらは同様に確からしい。このうち当りくじは4本あるので、乙が当りくじを引く確率は

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

### ■独立事象

『条件付確率』で見たように、ある事象について何らかの新しい情報が得られると、その事象の起こりやすさについての私達の知識は変わることがあった。しかし、以下でみるように、情報によっては何の役にも立たない



ことがある。

例として、硬貨を投げ、さらにさいころを投げるという試行を考えよう。この試行の標本空間  $U$  を

$$U = \{(\text{表}, \odot), (\text{表}, \ominus), (\text{表}, \oplus), (\text{表}, \otimes), (\text{表}, \boxtimes), (\text{表}, \boxplus), (\text{裏}, \odot), (\text{裏}, \ominus), (\text{裏}, \oplus), (\text{裏}, \otimes), (\text{裏}, \boxtimes), (\text{裏}, \boxplus)\}$$

とする。このとき、この12個の根元事象はどれも同様に確からしい。

また、硬貨の表が出るという事象を  $A$ ，さいころの1の目が出るという事象を  $B$  とすると

$$A = \{(\text{表}, \odot), (\text{表}, \ominus), (\text{表}, \oplus), (\text{表}, \otimes), (\text{表}, \boxtimes), (\text{表}, \boxplus)\}$$

$$B = \{(\text{表}, \odot), (\text{裏}, \odot)\}$$

$$A \cap B = \{(\text{表}, \odot)\}$$

である。

今、 $P_A(B)$  つまり、硬貨の表が出たという条件の下、さいころの1の目が出る確率は

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{6}$$

であるが、 $P(B)$  つまり、さいころの1の目が出る確率が

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

であるから

$$P_A(B) = P(B) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

また、1が成り立つとき、一般に

$$\begin{aligned} P_A(B) = P(B) &\Leftrightarrow \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(B)}{n(U)} \\ \Leftrightarrow \frac{n(A \cap B)}{n(B)} &= \frac{n(A)}{n(U)} \\ \Leftrightarrow P_B(A) &= P(A) \end{aligned}$$

も成り立つ。

#### 独立の定義

2つの事象  $A$ ,  $B$  において

$$P_A(B) = P(B) \quad (\Leftrightarrow P_B(A) = P(A))$$

が成り立つとき、事象  $A$  と  $B$  は**独立 (independent)** である、または**独立事象 (independent event)** であるという。

この式は「ある事象  $A$  の条件の下、 $B$  の起こる確率」と「(ただ単に)  $B$  の起こる確率」が等しいことをいっている。つまり事象が独立であるということは一方の事象の起こることが他の事象の起こる

確率に何の影響も与えないことを意味している。

また、事象が独立であるとき、つまり  $P_A(B) = P(B)$  であるとき、乗法定理より

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B) = P(A) P(B)$$

が成り立つ。

独立事象の乗法定理

「事象  $A$  と  $B$  が独立である」 $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$

【例題:独立事象】

次の事象  $A$ ,  $B$  のうち、 $A$  と  $B$  が独立であるものはどれか選べ。

(1) 白球4個、赤球3個の入っている袋から2回球を取り出す試行について考える。

ただし、1回取り出した球は袋に戻さないものとする。

$A$  : 「1回目に白球を取り出す」       $B$  : 「2回目に白球を取り出す」

(2) 白球4個、赤球3個の入っている袋から2回球を取り出す試行について考える。

ただし、1回取り出すごとに球は袋に戻すものとする。

$A$  : 「1回目に白球を取り出す」       $B$  : 「2回目に白球を取り出す」

(3) ジョーカーを除いた1組のトランプ52枚の中から、1枚を引く試行について考える。

$A$  : 「ハートのカードを引く」       $B$  : 「エースのカードを引く」

(4) ジョーカーを含む1組のトランプ53枚の中から、1枚を引く試行について考える。

$A$  : 「ハートのカードを引く」       $B$  : 「エースのカードを引く」

【解答】

(1) 2回目に取り出す球だけに着目すると、その取り出し方には

$4+3=7$  通りあり、これらはどれも同様に確からしい。

よって、2回目に白球を取り出す確率

$P(B)$  は

$$P(B) = \frac{4}{7}$$

また、1回目に白球を取り出したという条件の下、2回目に白球を

取り出す確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

以上より、 $P_A(B) \neq P(B)$  なので、事象  $A$  と  $B$  は独立ではない。

《別解:独立事象の乗法定理を使う》

2回目に白球を取り出すには、次の2つの場合があり、これらは排反である。

i) 1回目に白球を取り出し、2回目に白球を取り出す

ii) 1回目に赤球を取り出し、2回目に白球を取り出す

まず、i) の場合の確率は

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

◀ 2回目に取り出す球のみで標本空間を作っていることに注意しよう

◀ 一度引いた球は元に戻さないことに注意

次に, **ii)** の場合の確率は

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$$

よって,  $P(B)$  は

$$P(B) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

また, **1** 回目に白球を取り出した条件の下, **2** 回目に白球を取り出す確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

以上より,  $P_A(B) \neq P(B)$  なので, 事象  $A$  と  $B$  は独立ではない.

**(2)** 2 回目に取り出す球だけに着目すると, その取り出し方には  $4 + 3 = 7$  通りあり, これらはどれも同様に確からしい.

よって, 2 回目に白球を取り出す確率  $P(B)$  は

$$P(B) = \frac{4}{7}$$

また, **1** 回目に白球を取り出した条件の下, **2** 回目に白球を取り出す確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{4}{7}$$

以上より,  $P_A(B) = P(B)$  なので, 事象  $A$  と  $B$  は独立である.

**(3)** エースのカードを引く確率  $P(B)$  は

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

また, ハートのカードを引いた条件の下, そのカードがエースである確率は

$$P_A(B) = \frac{1}{13}$$

以上より,  $P_A(B) = P(B)$  なので, 事象  $A$  と  $B$  は独立である.

**(4)** エースのカードを引く確率  $P(B)$  は

$$P(B) = \frac{4}{53}$$

また, ハートのカードを引いた条件の下, そのカードがエースである確率は

◀ 一度引いた球は元に戻さないことに注意

◀ 2 回目に取り出す球のみで標本空間を作っていることに注意しよう

◀ 一度引いた球は元に戻すことに注意

$$P_A(B) = \frac{1}{13}$$

以上より、 $P_A(B) \neq P(B)$  なので、事象  $A$  と  $B$  は独立ではない。

**【例題: 確率に関するいろいろな定理の利用】**

1 個のさいころを4回投げるときの1の目も6の目も出る確率を求めよ。

**【解答】**

事象  $A$ ,  $B$  を

$A$  : 「1の目が出る」

$B$  : 「6の目が出る」

とすると、求める確率は  $P(A \cap B)$  である。

まず、 $P(\bar{A})$ 、つまり1の目が出ない確率は、4回連続して1の目が出なければよいので

$$P(\bar{A}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

同じく  $P(\bar{B})$  も  $P(\bar{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$

である。

また、 $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ 、つまり1の目も6の目も出ない確率は、4回連続して1の目も6の目も出なければよいので

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{4}{6}\right)^4$$

以上を利用して、 $P(A \cap B)$  は以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(U) - P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) \\ &= 1 - P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{4}{6}\right)^4 \\ &= \frac{151}{648} \end{aligned}$$

### 4.3.2 重複試行

**■独立試行とは何か**

『独立事象』で見たように、硬貨投げの事象とさいころ投げの事象は互いに影響を及ぼさなかった。一般に、試行  $T_1$ ,  $T_2$  について、それぞれの結果の起こり方が互いに影響を与えないとき、この2つの試行は**独立(independent)**である、または**独立試行(independent trials)**であるという。

**■重複試行とその確率**

「1つのさいころを続けて5回投げる」のように、互いに影響を与えない同じ試行を繰り返すとき、この一連の独立な試行のことを**重複(ちょうふく)試行**または**反復(はんぷく)試行(repeated trials)**という。

**【記憶例題: 重複試行の確率】**

さいころを5回投げるとき、1の目が2回出る確率  $P_2$  を求めよ。

## 【解答】

さいころを5回投げて2回だけ1の目が出るのは、右の表のように

$${}_5C_2=10 \text{ 通り}$$

あり、これらの事象 $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ は互いに排反であるので、 $P_2$ を求めるには $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ の確率をそれぞれ計算してそれらの和を求めればよい。

今、 $A_1$ の起こる確率 $P(A_1)$ は、各回の試行が独立であるから

$$P(A_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

となる。

他の事象 $A_2, A_3, \dots, A_{10}$ の起こる確率もそれぞれ  $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3$

となるので、求める確率 $P_2$ は

$$P_2 = {}_5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888}$$

となる。

上の例題において、1の目の出る回数  $x$  は  $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$  のいずれかである。1の目が  $x$  回出る確率を $P_x$ で表すと、 $P_2$ 以外も $P_2$ と同様に考えて

$$P_0 = {}_5C_0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \quad P_1 = {}_5C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad P_2 = {}_5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$P_3 = {}_5C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \quad P_4 = {}_5C_4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^1 \quad P_5 = {}_5C_5 \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

となり、一般に次のことがいえるのがわかる。

## 重複試行の定理

ある試行において、事象 $A$ の起こる確率を $p$ 、その余事象 $\bar{A}$ の起こる確率を $q (= 1 - p)$ とすると、この試行を $n$ 回繰り返すとき、事象 $A$ が $x$ 回起こる確率は

$${}_n C_x p^x q^{n-x}$$

となる。

## 【例題: 重複試行の確率】

○か×をつけて答える6題の問題に、でたためにか×をつけるとき、次の間に答えよ。

- (1) 全部の解答が間違っている確率を求めよ。
- (2) 3題だけが正解である確率を求めよ。
- (3) 少なくとも2題が正解である確率を求めよ。

◀ 下表で○は1の目が出ることを表し、×は1以外の目が出ることをあらわしている。

事象 \ 回	1	2	3	4	5
$A_1$	○	○	×	×	×
$A_2$	○	×	○	×	×
$A_3$	○	×	×	○	×
$A_4$	○	×	×	×	○
$A_5$	×	○	○	×	×
$A_6$	×	○	×	○	×
$A_7$	×	○	×	×	○
$A_8$	×	×	○	○	×
$A_9$	×	×	○	×	○
$A_{10}$	×	×	×	○	○

【解答】

(1) 6題それぞれについて、間違ふ確率は  $\frac{1}{2}$  だから、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \text{ となる.}$$

(2) 6題のうち3題を何題目で間違ふかには  ${}_6C_3$  通りの場合があるから

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

(3) 「少なくとも2題が正解である」の余事象は「全部の解答が間違っているか、または1題だけが間違っている」である。全部の解答が間違っている確率は(1)で求めたので、1題だけが間違っている確率を以下で求める。

6題のうち1題を何題目で間違ふかには  ${}_6C_1$  通りの場合があるから

$${}_6C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{32}$$

よって、求める確率は

$$1 - \left(\frac{1}{64} + \frac{3}{32}\right) = \frac{7}{64}$$

#### § 4.4 確率分布と期待値

表も裏も  $\frac{1}{2}$  の確率で出る硬貨を投げ、表が出たら100円もらえ、裏がでたら何ももらえないというゲームをする。このゲームを何回も続けると、100円もらえるときもあれば何ももらえないときもあるが、1回のゲームにつき平均して50円はもらえると期待できる。以下では、偶然によって支配される出来事において期待できる値、「期待値」について考えてみる。

##### 4.4.1 確率変数と確率分布

###### ■ 確率変数とは何か

10本のくじがあり、そこから1本のくじを引くという試行を考える。  
A賞が当たると1000円、B賞が当たると500円、C賞が当たると100円もらえるものとする。

A賞、B賞、C賞の当たる確率は、それぞれ  $\frac{2}{10}$ 、 $\frac{3}{10}$ 、 $\frac{5}{10}$  であるから、賞金と確率の関係は右表のようにまとめることができる。  
ここで、1本のくじを引いた結果もらえる賞金を  $X$  円とすれば、 $X$  は1000、500、100のどれかの値をとる。このとき、 $X$  がどの値をとるかは試行の結果によって決まる。

また、 $X=1000$  となるときの確率を  $P(X=1000)$  のように書くとする、これは A賞に当たるという事象の確率であるから

$$P(X=1000) = \frac{2}{10}$$

と書くことができる。他のものも同様にして

$$P(X=500) = \frac{3}{10}, \quad P(X=100) = \frac{5}{10}$$

賞	A賞	B賞	C賞
賞金(円)	1000	500	100
本数(本)	2	3	5

賞金(円)	1000	500	100
確率	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$

と書ける.

一般に、いまの  $X$  のように、試行の結果によってその値が定まる変数を**確率変数(probability variable)**という. 確率変数を表すには、大文字のアルファベット  $X, Y, Z$  を使うことが多い.

### ■ 確率分布とは何か

先程まとめた表

賞金 (円)	1000	500	100
確率	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$

は、確率変数と、その値となるとき確率の対応を示したものであり、この対応のことを**確率分布(probability distribution)**という. 確率分布を上のように表にしてまとめたものを**確率分布表(probability distribution chart)**という.

確率変数  $X$  が、 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  という値をとる試行での確率分布が

$$P(X=x_i)=p_i(i=1,2,3,\dots,n)$$

とすると、確率分布表は

$X$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$	計
$P$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$	1

となる.

### 4.4.2 期待値

#### ■ 期待値とは何か

さて、先程のくじ引きにおいて、このくじを1回引くとき、平均していくら賞金が期待できるかについて考えてみよう.

このくじの賞金は総額で

$$1000 \text{ 円} \times 2 \text{ 本} + 500 \text{ 円} \times 3 \text{ 本} + 100 \text{ 円} \times 5 \text{ 本} = 4000 \text{ 円}$$

であるから、くじ1本あたりの賞金は、平均して  $4000 \text{ 円} \div 10 \text{ 本} = 400 \text{ 円}$  と考えられる.

この計算の見方を少し変えると

$$\begin{aligned} & \frac{\text{(総額)}}{\text{(くじの本数)}} \\ &= \frac{1000 \times 2 + 500 \times 3 + 100 \times 5}{10} \\ &= \underbrace{1000}_{\text{確率変数}} \times \underbrace{\frac{2}{10}}_{\text{確率}} + \underbrace{500}_{\text{確率変数}} \times \underbrace{\frac{3}{10}}_{\text{確率}} + \underbrace{100}_{\text{確率変数}} \times \underbrace{\frac{5}{10}}_{\text{確率}} \end{aligned}$$

$X$	1000	500	100
$P$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$

と表すこともできる.

一般に、確率変数  $X$  のとり得る値のすべてが

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

であり、その値をとるとき確率がそれぞれ

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1)$$

であるとする. つまり、確率分布が  $P(X=x_i)=p_i(i=1,2,3,\dots,n)$  のとき

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

の値を、確率変数  $X$  の期待値(expectation) または平均(mean) といひ  $E(X)$  と表す。  
先程のくじ引きの例では、くじ1本あたりの賞金の平均値が期待値である。

期待値  $E(X)$  の定義

確率分布が  $P(X = x_i) = p_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) のとき、期待値  $E(X)$  を

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

と定義する。

【例題:期待値の計算~その1~】

次の(1)と(2)ではどちらが有利と考えられるか。

- (1) さいころを1回振り、(出た目)×100円もらえる。  
(2) さいころを2回振り、1回でも6の目が出たら1200円もらえる。

(1), (2) それぞれの期待値を求めてから判断する。

【解答】

(1) もらえる金額を  $X$  円とすると、確率分布は右表となるから、期待値  $E(X)$  は

$X$	100	200	300	400	500	600	計
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = \frac{1}{6}(100 + 200 + 300 + 400 + 500 + 600) = 350$$

(2) 2回のさいころの結果、出る目の順列は  ${}_6P_2 = 36$ 通りあり、これらは同様に確からしい。  
このうち、1回でも6の目が出るのは、(数えて)11通りあるので、もらえる金額を  $Y$  円とすると、確率分布は右表となる。よって、期待値  $E(Y)$  は

$Y$	0	1200	計
$P$	$\frac{25}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

$$E(Y) = \frac{11}{36} \times 1200 = \frac{1100}{3} \approx 367$$

以上(1), (2)の期待値の結果から、(2)の方が有利と考えられる。

【例題:期待値の計算~その2~】

次の問いに答えよ。ただし、計算には期待値の定義を使うこと。

- (1) 1, 2, 3, 4と数字の書いてあるカードがそれぞれ1枚ずつ計4枚ある。カードを2枚引くとき、そのカードの番号の和を確率変数  $X$  として、期待値  $E(X)$  を求めよ。また、カードの番号の積を確率変数  $Y$  として、期待値  $E(Y)$  を求めよ。  
(2) 1, 2, 3の数字の書いてあるくじ(引いたら元に戻すものとする)を2回引き、その数字の和を確率変数  $X$  として、期待値  $E(X)$  を求めよ。また、数字の積を確率変数  $Y$  として、期待値  $E(Y)$  を求めよ。

【解答】

(1) 確率変数  $X$  の確率分布は右のようになる。

$$E(X) = \frac{1}{6}(3 + 4 + 5 + 2 + 6 + 7) = 5$$

$X$	3	4	5	6	7
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

また、確率変数  $Y$  の確率分布は右のようになる。

$$E(Y) = \frac{1}{6}(2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12) = \frac{35}{6}$$

$Y$	2	3	4	6	8	12
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



(2) 確率変数  $X$  の確率分布は右のようになる.

$$E(X) = \frac{1}{9}(2+3 \cdot 2+4 \cdot 3+5 \cdot 2+6) = 4$$

$X$	2	3	4	5	6
$P$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

また, 確率変数  $Y$  の確率分布は右のようになる.

$$E(Y) = \frac{1}{9}(1+2 \cdot 2+3 \cdot 2+4+6 \cdot 2+9) = 4$$

$Y$	1	2	3	4	6	9
$P$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

### ■ 確率変数の1次式の期待値

確率変数  $X$  のとる値が  $x_1, x_2, \dots, x_n$  のとき,  $X$  の1次式  $aX+b$  は

$$ax_1+b, \quad ax_2+b, \quad \dots, \quad ax_n+b$$

という値をとる, 別の新しい確率変数であると考え.

確率分布を  $P(X=x_i)=p_i (i=1, 2, \dots, n)$  とすると,  $a \neq 0$  ならば

$$P(aX+b=ax_i+b) = P(X=x_i) = p_i$$

が成り立つ.

よって, 確率変数  $aX+b$  の期待値  $E(aX+b)$  は

$$E(aX+b) = (ax_1+b)p_1 + (ax_2+b)p_2 + \dots + (ax_n+b)p_n$$

となる.

### 【例題: 確率変数の1次式の期待値】

さいころ投げを1回行い, 出た目を確率変数  $X$  とするとき,  $E(2X+1)$  を求めよ.

#### 【解答】

$2X+1$  の確率分布は次のようになる.

$2X+1$	3	5	7	9	11	13
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

これより

$$E(2X+1) = \frac{1}{6}(3+5+7+9+11+13) = 8$$

◀ (参考)  $X$  の確率分布

$X$	1	2	3	4	5	6
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$

いま, この例題において, 確率変数  $2X+1$  の計算の様子をわかりやすくするため

$2X+1$	$2 \cdot 1 + 1$	$2 \cdot 2 + 1$	$2 \cdot 3 + 1$	$2 \cdot 4 + 1$	$2 \cdot 5 + 1$	$2 \cdot 6 + 1$
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

となおしてから, 期待値  $E(2X+1)$  を計算してみると

$$\begin{aligned} E(2X+1) &= \frac{1}{6}(2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) + (2 \cdot 4 + 1) + (2 \cdot 5 + 1) + (2 \cdot 6 + 1) \\ &= \frac{1}{6}\{2(1+2+3+4+5+6)+6\} \leftarrow X \text{ の係数} 2 \text{ でくくれる部分をくくった} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) + 1 = 2E(X) + 1 \end{aligned}$$

つまり,  $E(2X+1) = 2E(X) + 1$  が成り立つ.

**【記憶例題: 確率変数の1次式の期待値】**

$X$  を確率変数,  $a, b$  を定数とするとき

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

が成り立つことを証明せよ.

**【解答】**

確率変数  $X$  の確率分布を

$$P(X = x_i) = p_i (i = 1, 2, \dots, n)$$

とする ( $n$  は自然数). このとき

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= (ax_1 + b)p_1 + (ax_2 + b)p_2 + \dots + (ax_n + b)p_n \\ &= (ax_1p_1 + bp_1) + (ax_2p_2 + bp_2) + \dots + (ax_np_n + bp_n) \\ &= a(x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n) + b(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

◀  $X$  の係数  $a$  でくくれる部分をくくった ( $b$  でもくくった)

確率変数の1次式の期待値の公式

$X$  を確率変数,  $a, b$  を定数とするとき

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

が成り立つ.

この公式は, 確率変数を  $a$  倍すれば, 期待値(平均)は  $a$  倍になり, 確率変数に  $b$  を加えれば, 期待値は  $b$  だけ大きくなることを主張している. 感覚的には明らかといえるだろう.

**■ 確率変数の和の期待値**

確率変数  $X$  の確率分布が  $P(X = x_i) = p_{xi} (i = 1, 2, \dots, n)$ , 確率変数  $Y$  の確率分布が  $P(Y = y_j) = p_{yj} (j = 1, 2, \dots, m)$ , とする試行を考える.

$X$  が値  $x$  をとり,  $Y$  が値  $y$  をとる確率を  $P(X = x, Y = y)$  と書くとし

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$

とする.

2つの確率変数  $X, Y$  はいろいろな値をとるが, それらを足した値をもまたいろいろな値をとる. この値を別の新たな確率変数と考えることもできる. この新しい確率変数  $Z$  を

$$Z = X + Y$$

と書くことにする.  $Z$  の確率分布表は右表のようになる.

このとき,  $Z$  の期待値  $E(Z)$  は,

$$\begin{aligned} E(Z) &= (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + \dots + (x_1 + y_m)p_{1m} \\ &\quad + (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22} + \dots + (x_2 + y_m)p_{2m} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (x_n + y_1)p_{n1} + (x_n + y_2)p_{n2} + \dots + (x_n + y_m)p_{nm} \end{aligned}$$

	$y_1$	$y_2$	...	$y_m$	
$x_1$	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$		$x_1 + y_m$	計
	$p_{11}$	$p_{12}$		$p_{1m}$	$p_{x_1}$
$x_2$	$x_2 + y_1$	$x_2 + y_2$		$x_2 + y_m$	計
	$p_{21}$	$p_{22}$		$p_{2m}$	$p_{x_2}$
⋮					計
$x_n$	$x_n + y_1$	$x_n + y_2$		$x_n + y_m$	計
	$p_{n1}$	$p_{n2}$		$p_{nm}$	$p_{x_n}$
	計	計		計	計
	$p_{y_1}$	$p_{y_2}$		$p_{y_m}$	1

**【例題: 確率変数の和の期待値】**

硬貨1枚とさいころ1個を投げる試行を考える. 硬貨に表が出たときは1, 裏が出たときは0を対応させる確率変数を  $X$  とする. また, さいころに出た目を確率変数  $Y$  とする.  $E(X+Y)$  を求めよ.

**【解答】**

$Z = X + Y$  とすると,  $Z$  のとる値は1から7までの整数となる.

例えば,  $Z=2$  となるのは  $X=1, Y=1$  のときか,  $X=0, Y=2$  のときであり, これらは排反であるから

$$P(Z=2) = P(X=1, Y=1) + P(X=0, Y=2) = \frac{2}{12}$$

である. 同様にして, 計算すると次のようにまとめられる.

$Z$	1	2	3	4	5	6	7
$P$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

これより,  $Z$  の期待値  $E(Z)$  は

$$E(Z) = \frac{1}{12}(1+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4+2\cdot 5+2\cdot 6+7) = 4 \text{ となる.}$$

いま, この例題において, 確率変数  $X+Y$  の計算の様子をわかりやすくするため

	1	2	3	4	5	6	
0	0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	計
	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	計
	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
	計	計	計	計	計	計	計
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

となおしてから, 期待値  $E(X+Y)$  を計算してみると

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \frac{1}{12}\{(0+1)+(0+2)+(0+3)+(0+4)+(0+5)+(0+6)\} \\ &+ \frac{1}{12}\{(1+1)+(1+2)+(1+3)+(1+4)+(1+5)+(1+6)\} \\ &= \left\{6\cdot\frac{1}{12}\cdot 0 + 6\cdot\frac{1}{12}\cdot 1\right\} + \left\{2\cdot\frac{1}{12}\cdot(1+2+3+4+5+6)\right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1\right) + \left\{\frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6)\right\} \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

つまり,  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$  が成り立つ.

**【記憶例題: 確率変数の和の期待値】**

$X, Y$  を確率変数とするとき

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

が成り立つことを証明せよ.

◀ (参考)  $X$  の確率分布

$X$	0	1
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

(参考)  $Y$  の確率分布

$Y$	1	2	3	4	5	6
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(Y) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$

## 【解答】

確率変数  $X$  の確率分布を  $P(X=x_i)=p_{xi}(i=1,2,\dots,n)$  , 確率変数  $Y$  の確率分布を  $P(Y=y_j)=p_{yj}(j=1,2,\dots,m)$  , とし

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$$

とする.

$X+Y$  の確率分布表は右表のようになる.

このとき,  $X+Y$  の期待値  $E(X+Y)$  は

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= (x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+\dots+(x_1+y_m)p_{1m} \\ &+ (x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22}+\dots+(x_2+y_m)p_{2m} \\ &+\dots \\ &+ (x_n+y_1)p_{n1}+(x_n+y_2)p_{n2}+\dots+(x_n+y_m)p_{nm} \\ &= x_1(p_{11}+p_{12}+\dots+p_{1m}) \\ &+ x_2(p_{21}+p_{22}+\dots+p_{2m}) \\ &+\dots \\ &+ x_n(p_{n1}+p_{n2}+\dots+p_{nm}) \\ &+ y_1(p_{11}+p_{21}+\dots+p_{n1}) \\ &+ y_2(p_{12}+p_{22}+\dots+p_{n2}) \\ &+\dots \\ &+ y_m(p_{1m}+p_{2m}+\dots+p_{nm}) \\ &= (x_1p_{x1}+x_2p_{x2}+\dots+x_np_{xn}) \\ &+ (y_1p_{y1}+y_2p_{y2}+\dots+y_np_{ym}) \\ &= E(X)+E(Y) \end{aligned}$$

	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_m$	
$x_1$	$x_1+y_1$	$x_1+y_2$		$x_1+y_m$	計
	$p_{11}$	$p_{12}$		$p_{1m}$	$p_{x_1}$
$x_2$	$x_2+y_1$	$x_2+y_2$		$x_2+y_m$	計
	$p_{21}$	$p_{22}$		$p_{2m}$	$p_{x_2}$
$\vdots$					計
$x_n$	$x_n+y_1$	$x_n+y_2$		$x_n+y_m$	計
	$p_{n1}$	$p_{n2}$		$p_{nm}$	$p_{x_n}$
	計	計		計	計
	$p_{y_1}$	$p_{y_2}$		$p_{y_m}$	1

## 確率変数の和の期待値の公式

$X, Y$  を確率変数とすると

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

が成り立つ.

## ■独立な確率変数の積の期待値

硬貨投げとさいころ投げのように、『独立試行』では確率変数  $X, Y$  のとる値すべての組  $x_i, y_j$  に対して

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)$$

が成り立つ.

一般に, 2つの確率変数  $X, Y$  があって,  $X$  のとるすべての値  $x$  と  $Y$  のとる値  $y$  に対して

$$P(X=x, Y=y)=P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

が成り立つとき, 確率変数  $X, Y$  は互いに独立(independent)であるという.

**【例題: 確率変数の積の期待値】**

硬貨1枚とさいころ1個を投げる試行を考える. 硬貨に表が出たときは1, 裏が出たときは0を対応させる確率変数をXとする. また, さいころに出た目を確率変数 Y とする.  
 $E(XY)$  を求めよ.

**【解答】**

$Z=XY$  とすると, Z のとる値は0から6までの整数となる.  
 例えば,  $Z=2$  となるのは  $X=1, Y=2$  のときであるから

$$P(Z=2) = P(X=1, Y=2) = \frac{1}{12}$$

である. 同様にして, 計算すると次のようにまとめられる.

Z	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

これより, Z の期待値  $E(Z)$  は

$$E(Z) = \frac{6}{12} \cdot 0 + \frac{1}{12} (1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{4} \text{ となる.}$$

いま, この例題において, 確率変数 XY の計算の様子をわかりやすくするため

	1	2	3	4	5	6	
0	0・1	0・2	0・3	0・4	0・5	0・6	計
	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
1	1・1	1・2	1・3	1・4	1・5	1・6	計
	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
	計	計	計	計	計	計	計
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

となおしてから, 期待値  $E(XY)$  を計算してみると

$$\begin{aligned} E(XY) &= \frac{1}{12} \{ (0 \cdot 1) + (0 \cdot 2) + (0 \cdot 3) + (0 \cdot 4) + (0 \cdot 5) + (0 \cdot 6) \} \\ &+ \frac{1}{12} \{ (1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + (1 \cdot 3) + (1 \cdot 4) + (1 \cdot 5) + (1 \cdot 6) \} \\ &= \frac{1}{12} \cdot 0 \cdot (1+2+3+4+5+6) + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot (1+2+3+4+5+6) \\ &= \frac{1}{12} (0+1)(1+2+3+4+5+6) \\ &= \frac{1}{2} (0+1) \cdot \frac{1}{6} (1+2+3+4+5+6) \\ &= E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

つまり,  $E(XY) = E(X)E(Y)$  が成り立つ.

**【記憶例題: 独立な確率変数の積の期待値】**

X, Y を独立な確率変数とするとき

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

が成り立つことを証明せよ.

◀ (参考) X の確率分布

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

(参考) Y の確率分布

Y	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(Y) = \frac{1}{6} (1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$

## 【解答】

確率変数  $X$  の確率分布を  $P(X=x_i)=p_{x_i}(i=1,2,\dots,n)$  , 確率変数  $Y$  の確率分布を  $P(Y=y_j)=p_{y_j}(j=1,2,\dots,m)$  , とすると,  $X$  と  $Y$  は独立なので

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)=p_{x_i} p_{y_j}$$

が成り立つ.

$XY$  の確率分布表は以下のようになる.

	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_m$	
$x_1$	$x_1 y_1$	$x_1 y_2$		$x_1 y_m$	計
	$p_{x_1} p_{y_1}$	$p_{x_1} p_{y_2}$		$p_{x_1} p_{y_m}$	$p_{x_1}$
$x_2$	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$		$x_2 y_m$	計
	$p_{x_2} p_{y_1}$	$p_{x_2} p_{y_2}$		$p_{x_2} p_{y_m}$	$p_{x_2}$
$\vdots$					計
$x_n$	$x_n y_1$	$x_n y_2$		$x_n y_m$	計
	$p_{x_n} p_{y_1}$	$p_{x_n} p_{y_2}$		$p_{x_n} p_{y_m}$	$p_{x_n}$
	計	計		計	計
	$p_{y_1}$	$p_{y_2}$		$p_{y_m}$	1

このとき,  $XY$  の期待値  $E(XY)$  は

$$\begin{aligned} E(XY) &= (x_1 y_1) p_{x_1} p_{y_1} + (x_1 y_2) p_{x_1} p_{y_2} + \dots + (x_1 y_m) p_{x_1} p_{y_m} \\ &+ (x_2 y_1) p_{x_2} p_{y_1} + (x_2 y_2) p_{x_2} p_{y_2} \\ &+ \dots + (x_2 y_m) p_{x_2} p_{y_m} \\ &+ \dots \\ &+ (x_n y_1) p_{x_n} p_{y_1} + (x_n y_2) p_{x_n} p_{y_2} + \dots + (x_n y_m) p_{x_n} p_{y_m} \\ &= x_1 p_{x_1} (y_1 p_{y_1} + y_2 p_{y_2} + \dots + y_m p_{y_m}) \\ &+ x_2 p_{x_2} (y_1 p_{y_1} + y_2 p_{y_2} + \dots + y_m p_{y_m}) \\ &+ \dots \\ &+ x_n p_{x_n} (y_1 p_{y_1} + y_2 p_{y_2} + \dots + y_m p_{y_m}) \\ &= (x_1 p_{x_1} + x_2 p_{x_2} + \dots + x_n p_{x_n}) \\ &\quad \times (y_1 p_{y_1} + y_2 p_{y_2} + \dots + y_m p_{y_m}) \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned}$$

独立な確率変数の積の期待値の公式

$X, Y$  を独立な確率変数とするとき

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

が成り立つ.

## 【例題: 公式を使った期待値の計算】

次の問題を, 今度は公式を上手にを使って解け.

- (1) 1, 2, 3, 4 と数字の書いてあるカードがそれぞれ1枚ずつ計4枚ある. カードを2枚引くとき, そのカードの番号の和を確率変数  $X$  として, 期待値  $E(X)$  を求めよ.  
また, カードの番号の積を確率変数  $Y$  として, 期待値  $E(Y)$  を求めよ.

(2) 1, 2, 3 の数字の書いてあるくじ(引いたら元に戻すものとする)を2回引き, その数字の和を確率変数  $X$  として, 期待値  $E(X)$  を求めよ. また, 数字の積を確率変数  $Y$  として, 期待値  $E(Y)$  を求めよ.

【解答】

(1) はじめに引いたカードの番号を確率変数  $A$ , 2枚目に引いたカードの番号を確率変数  $B$  とすると  $A, B$  の確率分布は次のようになる.

$A, B$	1	2	3	4	計
$P$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$E(A) = E(B) = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{5}{2}$$

$X = A + B$  であるから

$$\begin{aligned} E(X) &= E(A+B) \\ &= E(A) + E(B) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

また, 確率変数  $Y$  の確率分布は次のようになる.

$Y$	2	3	4	6	8	12
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(Y) = \frac{1}{6}(2+3+4+6+8+12) = \frac{35}{6}$$

(2) はじめに引くくじの番号を確率変数  $A$ , 2回目に引くくじの番号を確率変数  $B$  とすると,  $A, B$  の確率分布は次のようになる.

$A, B$	1	2	3	計
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$E(A) = E(B) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$X = A + B$  であるから

$$\begin{aligned} E(X) &= E(A+B) \\ &= E(A) + E(B) \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

また,  $Y = AB$  であり確率変数  $A$  と  $B$  は独立なので

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(AB) \\ &= E(A) \cdot E(B) \\ &= 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

## あとがき

コンピュータがネットワークで繋がれた現在、ソフトウェアの開発において、オープンソースという活動があります。オープンソースとは、ソフトウェアの設計図にあたるソースコードを、インターネットなどを通じて無償で公開し、誰でもそのソフトウェアの開発に参加できるというものです。

ソースコードさえあれば、そのソフトウェアで利用されている技術を容易に転用することが可能となるため、企業などでは自社の開発したソフトウェアのソースコードは極秘とするのが普通です。しかし、オープンソースの考え方は、ソースコードを公開して有用な技術を共有することで、世界中の誰もが自由にソフトウェアの開発に参加することができ、その方が素晴らしいソフトウェアが生まれるはずだという思想に基づいています。

私達 **FTEXT** は、このオープンソースという考え方を、ソースコードに限らず教材や一般のコンテンツ作成に応用する活動を進めています。この **FTEXT** 数学シリーズもそうして作られたものです。このような手法で教科書を作ることは、従来の教科書作りにはない特徴として、次のことが挙げられます。

まず**1**点目として、書く側と読む側とに完全に二分化されていた状況が崩れ、全ての人が書くことに参加できる、ということがあります。従来では、教師が生徒の視点を想像して文章を書いていた。しかし、この新しい教科書作りでは、教科書が作られるまさにその過程で、生徒からの質問や指摘が飛び込んできます。さらには、能力とやる気さえあれば生徒自らが教科書を書き進めていくこともできるのです。

次に**2**点目として、数学の教授法について、全国の先生方ももつコツを取り入れた教科書作りができる、ということがあります。食べ物に好き嫌いがあるように、教師といえども教える部分によって、説明の得意不得意があるものです。この新しい教科書作りでは、全国の先生方の得意な部分を集めていくことができるのです。これは、生徒のためになるだけでなく、他の先生方の教授法のスキルアップにもつながるでしょう。実際この **FTEXT** 数学でも、従来の教科書では見られない最新の教授法を取り入れた編集になっています。

最後に**3**点目として、この教科書はインターネットを通じて世界中の人に公開されるので、今まで教育業界とは直接関係なかった方々の意見やアイデアも取り入れられる、ということがあります。ある分野での専門家の方々に、教科書で学ぶ数学の応用例などを盛んに紹介していただければ、「数学なんて何の役に立つのかわからない」などという言説を払拭することができるかもしれません。

普通、教材というものは、ある技術を身に付ける必要のある人が利用するものであり、特化した知識を扱うものですが、“教科書”は日本中のほぼ全員が触れるという特殊な教材です。それゆえ、教科書の役割とは、次代を支える人たちにぜひ学んでおいて欲しい知識について、その時代のスタンダードを担うものであると考えます。

工学的技術の進歩により、世界の知識はより細分化の方向に進んでいます。しかし、そのような時代であるからこそ、知識の全体を広く見渡せる教科書の存在が必要なのではないでしょうか。

現在私達は、世界の知恵を集めるという手法を用いて、数学の教科書に限らず、他の分野の教科書についても執筆をはじめようとしています。さらに今後は、教科書を作るという枠組みを超えて、新しい教材作成のプラットフォームを開発していく予定です。しかし、これらを実行していくための力がまだまだ私達には足りません。

このような活動に興味をもたれた方やご支援いただける方は、ぜひホームページ(<http://www.ftext.org/>)の方までアクセスください。



## 索引

場合の数			47
排反			125
排反事象			125
背理法			38
パスカルの三角形			87
反例			
値	11	真偽値表	21
1対1の写像	12	真部分集合	5
一般順列	76	真理集合	28
上への1対1の写像	12	整数	2
上への写像	12	積事象	124
裏	26	積の法則	46
円順列	60	全事象	114
外延的定義	2	全射	12
階乗	55	全体集合	6
確率	117	全単射	12
確率分布	141	像	11
確率分布表	141	属する	3
確率変数	140	素数	3
かつ	21	対偶	26
仮定	23	対偶法	36
加法定理	124	第2種スターリング数	100
偽	20	単射	12
期待値	142	値域	11
逆	26	置換	12
既約分数	39	重複組合せ	90
共通部分	5	重複試行	137
空事象	114	重複順列	62
空集合	2	直積	9
組合せ	41, 71	定義域	10
結論	23	同値	24, 33
根元事象	114	独立	133, 137, 149
試行	113	独立試行	137
事象	113	独立事象	133
自然数	2	ド・モルガンの法則	9
実数	2	ド・モルガンの法則(命題の)	26
写像	10	ない	23
集合	1	内包的定義	1
十分条件	33	ならば	23
樹形図	43	2項係数	84
数珠順列	61	2項定理	84
順列	41, 54	ネックレス順列	61
条件	28		
条件付確率	129		
乗法定理	130		
真	20		
		場合の数	47
		排反	125
		排反事象	125
		背理法	38
		パスカルの三角形	87
		反例	
		必要十分条件	33
		必要条件	33
		否定	
		標本空間	
		等しい	4
		含む	4
		部分集合	4
		分割	111
		平均	142
		ベル数	104
		ベルヌーイ試行	137
		変数	
		変数	28
		包含と排除の原理	14
		補集合	6
		または	22
		無限集合	3
		矛盾	
		無理数	117
		命題	
		有限集合	3
		有理数	2, 39
		要素	1
		余事象	127
		和事象	124
		和集合	5
		和の法則	46