第3章
場合の数

§ 3.1 数え上げの基本

ものの数を正しく数えるには

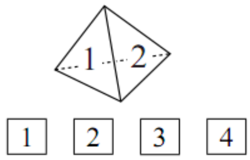
「数えもらしをしない」
「同じものを繰り返して数えない」

ことが大切である. 数える個数が少ないときには, 適当に数えても間違いは出にくいが, 数える個数が多いときには, 何らかの方針をもって数え上げないとミスを犯しやすくなる. ここでは, 数を数え上げるときに, 私達が普段何気なく使っている基本的な方法について確認していこう.

3.1.1 整理して考えるということ

ここでは, 例として

I) **1, 2, 3, 4** の目が書いてある正四面体のさいころを**2** 回投げた場合の目の出方
II) **1, 2, 3, 4** の数字が書いてある**4** 枚のカードから順に**2** 枚引く場合のカードの数字の出方



を整理して表す方法についてみてみよう. ただし

i) **1** 回目(枚目), **2** 回目(枚目)の順番を考慮したもの(**順列(permutation)** という)
ii) 順番を考慮しないで, 目(数字)の種類だけ考えたもの(**組合せ(combination)** という)

では, まとめ方が異なることに注意しよう.

■表でまとめる

まずは, 表でまとめてみる.

I) 正四面体のさいころを振った場合
i) 順列でまとめた場合

	1	2	3	4
1	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1
2	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2
3	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3
4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4

← 各マスの左側の数字が**1** 回目に出た目, 右側の数字が**2** 回目に出た目を表す.

ii) 組合せでまとめた場合

	1	2	3	4
1	1, 1			
2	1, 2	2, 2		
3	1, 3	2, 3	3, 3	
4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4

← **1** 回目と**2** 回目に出た目の順番は区別しないので, 上の表で, 例えば「**2,1**」と「**1,2**」は同じものとなり, この表には片側の「**1,2**」のみ記される.

II) カードを引く場合

i)　順列でまとめた場合

	1	2	3	4
1		2, 1	3, 1	4, 1
2	1, 2		3, 2	4, 2
3	1, 3	2, 3		4, 3
4	1, 4	2, 4	3, 4	

← 各マスの左側の数字が**1** 回目に引いたカード，右側の数字が**2** 回目に引いたカードを表す．同じカードは**2** 度引けないので，例えば「**1,1**」などはない．表中では斜線で除いてある．

ii)　組合せでまとめた場合

	1	2	3	4
1				
2	1, 2			
3	1, 3	2, 3		
4	1, 4	2, 4	3, 4	

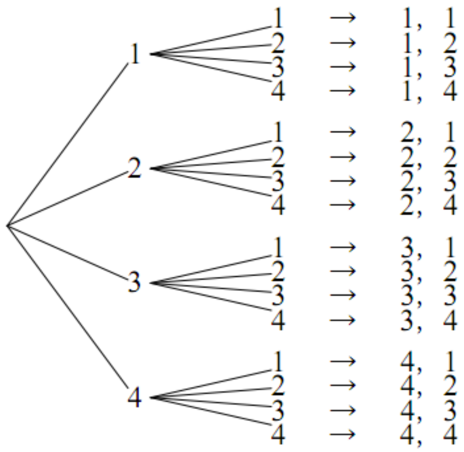
← **1** 回目と**2** 回目に引いたカードの順番は区別しないので，上の表で，例えば「**2,1**」と「**1,2**」は同じものとなり，この表には片側の「**1,2**」のみ記される．

■樹形図でまとめる

今度は，同じ内容を枝分かれした木のような形の**樹形図(tree diagram)** でまとめてみる．

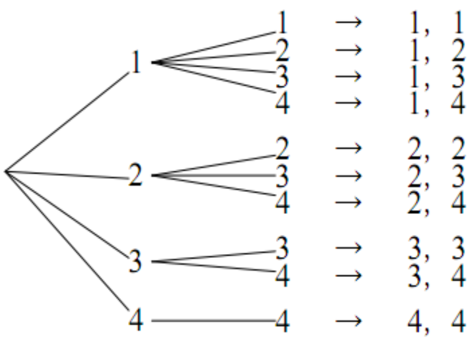
I)　正四面体のさいころを振った場合

i) 順列でまとめた場合



← 左側の数字が**1** 回目に出た目，右側の数字が**2** 回目に出た目を表す．

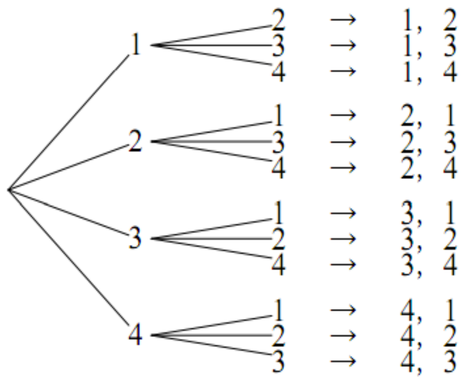
ii) 組合せでまとめた場合



← **1** 回目と**2** 回目に出た目の順番は区別しないので，上の図で、例えば「**2,1**」と「**1,2**」は同じものとなるので，この図には片側の「**1,2**」のみ記される．

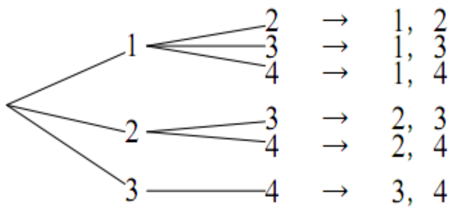
II) カードを引く場合

i) 順列でまとめた場合



左側の数字が**1** 回目に引いたカード，
右側の数字が**2** 回目に引いたカードを表す．
同じカードは**2** 度引けないので
（例えば「**1,1**」などはない），除外してある．

ii) 組合せでまとめた場合



1 回目と**2** 回目に引いたカードの順番は
区別しないので，上の図で，例えば「**2,1**」と
「**1,2**」は同じものとなるので，この図には片側

【例題：表や樹形図の利用】

次の問に答えよ．

(1) **1** から**4** の目が書いてある正四面体のさいころを**2** 回振り，出る目の順列を考える．**2** つの目の和が**5** となるのは何通りか．

(2) **1** から**4** の目が書いてある正四面体のさいころを**2** 回振り，出る目の組合せを考える．**2** つの目の和が**5** となるのは何通りか．

(3) **1** から**4** までの数字が書いてある**4** 枚のカードから，連続して**2** 枚のカードを引く．はじめに引いたカードの数字が，あとに引いたカードの数字より小さくなるのは何通りか．

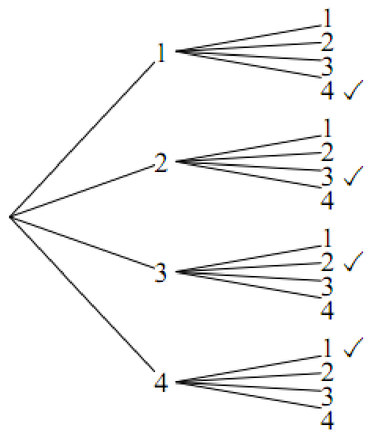
(4) **1** から**4** までの数字が書いてある**4** 枚のカードから，連続して**2** 枚のカードを引く．**2** 枚のカードの数字の和が**5** 以上となる組合せは何通りあるか．

順列か組合せなのかを考えて，表や樹形図でまとめてから数える．以下の解答では，表でまとめた場合の解答である．樹形図についてまとめた場合には，右の欄外を参照のこと．
数える樹形図の枝にはチェックマーク（ レ）が入れてある．

【解答】

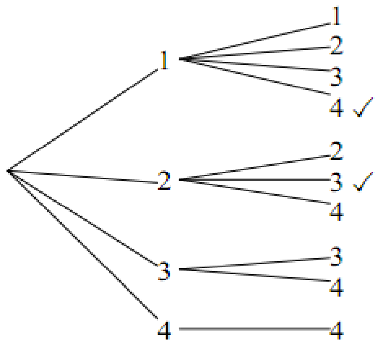
(1) 下の表で，和が**5** になるものを数えればよい．網掛けの部分を数えて，**4** 通り．

	1	2	3	4
1	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1
2	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2
3	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3
4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4



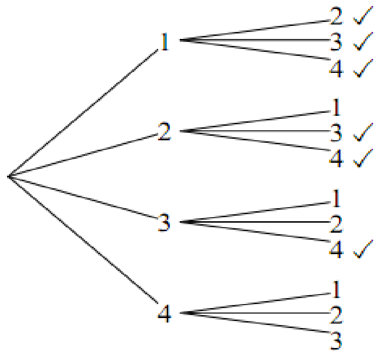
(2) 下の表で，和が**5** になるものを数えればよい．網掛けの部分を数えて，**2** 通り．

	1	2	3	4
1	1, 1			
2	1, 2	2, 2		
3	1, 3	2, 3	3, 3	
4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4



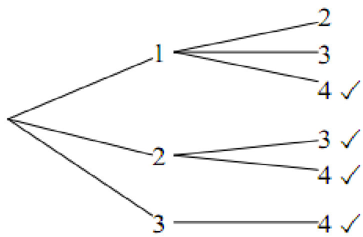
(3) 下の表で，はじめに引いたカードの数字が，あとに引いたカードの数字より小さくなるものを数えればよい．網掛けの部分を数えて，**6** 通り．

	1	2	3	4
1		2, 1	3, 1	4, 1
2	1, 2		3, 2	4, 2
3	1, 3	2, 3		4, 3
4	1, 4	2, 4	3, 4	



(4) 下の表で，**2** 枚のカードの数字の和が**5** 以上となるものを数えればよい．網掛けの部分を数えて，**4** 通り．

	1	2	3	4
1				
2	1, 2			
3	1, 3	2, 3		
4	1, 4	2, 4	3, 4	



3.1.2　積の法則・和の法則

■ものを数えるときに使う考え方

先程の『整理して考えるということ』では，表や樹形図などを使って，情報を整理することを学んだ．このように整理してしまえば，理論的にはすべてのものの数を数えることができる．

しかし，表や樹形図を作成するにはあまりに数が大きすぎる場合があるので，表や樹形図を書かずとも，数を数えられるようにならなければいけない．

以下では，数を数えるときに使う，もっとも基本的な考え方である，積の法則と和の法則について確認する．これを応用すれば，表や樹形図を書かなくても，ものの数を数えることができるようになる．

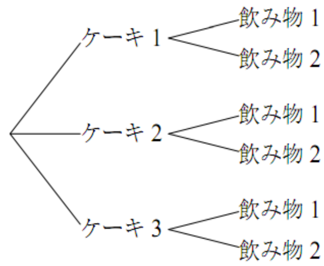
ただし，これらの法則の背景に表や樹形図があるのだということは，忘れてはいけない．ただ闇雲に法則だけつかっても，何を数え上げているのかわからなければ本末転倒である．

■積の法則

「**3** 種類のケーキから**1** つ，**2** 種類の飲み物から**1** つ選んで頼むケーキセットの決め方は何通りか」という問題は，次のように考えることができる．

まず，事柄A，B を

A : ケーキを選ぶ
B : 飲み物を選ぶ



とおくと，　*A*　の方法3 通りのそれぞれに対して　*B*　の方法2 通りが決まるから，ケーキセットの決め方は

$$3\times2=6 \quad \text{通り}$$

と掛け算を使って計算できる．一般的には，次のようにまとめられる．

積の法則

2 つの事柄 A，B について，A の起こり方が a 通り，そのそれぞれに対してB の起こり方が b 通りあるとする．このとき

A と B がともに起こる場合は $a\times b$ 通り

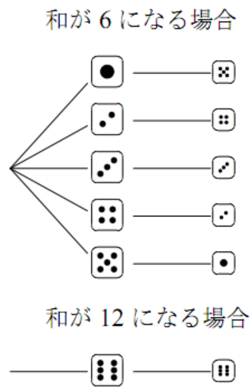
あり，これを**積の法則** (multiplication law) という．

■和の法則

「区別する大小2 個のさいころを投げる場合，出た目の数の和が6 の倍数となるのは何通りか」という問題は，次のように考えることができる．

まず，事柄　*A*，*B*　を

A : 出た目の数の和が6 である
B : 出た目の数の和が12 である



とおくと，この2 つの事柄が両方同時に起こることはないので，それぞれの事柄の起こる数を足せばよく

$$5+1=6 \quad \text{通り}$$

と計算できる．

和の法則

2 つの事柄 A，B について，A の起こり方が a 通り，B の起こり方が b 通りあるとする．このとき，「A であり，かつ，B である」場合がないならば

A または B が起こる場合は $a+b$ 通り

あり，これを**和の法則** (sum law) という．

3.1.3　集合の要素の個数と場合の数

■“場合”を集合の要素に対応させる

　ある事柄の起こり方が全部で a 通りあるとき，その事柄の起こる**場合の数(number of cases)** は a 通りであるという．

　この事柄の起こり方は，集合の要素に対応させることができる．

　例えば，① の球が**3** 個，② の球が**2** 個，計**5** 個の球があるとする．

　この中から**3** 個選んで，順に**1** 列に並べるという事柄を A とすると事柄 A には，右図のように**7** 通りの場合がある．

これを順に a_1 ，a_2 ，・・・，a_7 と対応させ集合 A を作る．

このとき，場合の数は $n(A)$ と表せる．

　このように，事柄における“場合”は，集合の要素に簡単に対応させることができる．このように対応させることにより，場合の数を求める際，『集合の要素の個数』で学んだことが利用できる．

　以下，特に断りのない限り，事柄 X と集合 X は互いに対応しているものとし，どちらも斜体のアルファベット X で表すことにする．

①①①　→　a_1
①①②　→　a_2
①②①　→　a_3
②①①　→　a_4
①②②　→　a_5
②①②　→　a_6
②②①　→　a_7

$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7\}$

$n(A)=7$

■積の法則･和の法則（集合版）

【例題：積の法則･和の法則の利用】

　1，**2**，**3**，**4**，**5**，**6** の数字が書いてあるさいころを**1** 回振り，さらに**1**，**2**，**3**，**4** の数字が書いてある**4** 枚のカードから**1** 枚引くとする．

(1) **2** つの数字の出方には全部で何通りの場合があるか．

(2) **2** つの数字の和が**4** の倍数となるのは何通りか．

【解答】

(1) さいころの数字**6** 通りのそれぞれに対して，カードの数字は**4** 通りに定まるから，積の法則より

$$6\times4=24 \text{　通り}$$

《補足》

　このことを，集合で表現すると以下のようになる．

　　A ：「さいころを**1** 回振る」
　　B ：「カードを**1** 枚引く」

とおくと，求める場合の数は $n(A\times B)$ となり

$$n(A\times B)=n(A)\times n(B)$$
$$=\ 6\times4=24 \text{　通り}$$

(2) 2 つの数字の和が**4** の倍数となるのは

　　i) 2 つの数字の和が**4** の場合
　　ii) 2 つの数字の和が**8** の場合

に分けることができ，**i)** の場合は**(**さいころ**,** カード**)**の順で**(1, 3)**，**(2, 2)**，**(3, 1)** の**3** 通りあり，**ii)** の場合も**(4, 4)**，**(5, 3)**，**(6, 2)** の**3** 通りある．

　また，これらは同時に起こることはないから，和の法則より

$$3+3=6 \text{　通り}$$

《補足》

　このことを，集合で表現すると以下のようになる．

　　P：「**2** つの数字の和が**4** である」
　　Q：「**2** つの数字の和が**8** である」

とおくと，求める場合の数は $n(P\cup Q)$ となり，$P\cap Q=\phi$ であるから

$$n(P\cup Q)=n(P)+n(Q)=3+3=6 \text{　通り．}$$

■補集合での考え方

【例題:補集合の利用】

1, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** の数字が書いてあるさいころを**1** 回振り, さらに**1**, **2**, **3**, **4** の数字が書いてある**4** 枚のカードから**1** 枚引くとする.

(3) 2 つの数字の和が**4** の倍数とはならないのは何通りか.

【解答】

(3) 前例題**(1)** で求めた全体**24** 通りのうち,「**2** つの数字の和が**4** の倍数となる」のは**(2)** より, **6** 通りである.
よって,「**2** つの数字の和が**4** の倍数とはならない」のは

$$\mathbf{24-6=18}\quad \text{通り.}$$

《補足》

このことを, 集合で表現すると以下のようになる.

全体集合 $\boldsymbol{U}$ を $\boldsymbol{U=A\times B}$ とおくと, 求める場合の数は $\boldsymbol{n(P\cup Q)}$ であるから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n(P\cup Q)}&\boldsymbol{=n(U)-n(P\cup Q)}\\ &= \mathbf{24-6=18}\quad \text{通り}\end{aligned}$$

この問題は, 補集合の考え方を使わなくても, 例えば和の法則で次のように解くこともできる.

A_1 :「カードの数字が**1** の場合で**2** つの数字の和が**4** の倍数になる」
A_2 :「カードの数字が**2** の場合で**2** つの数字の和が**4** の倍数になる」
A_3 :「カードの数字が**3** の場合で**2** つの数字の和が**4** の倍数になる」
A_4 :「カードの数字が**4** の場合で**2** つの数字の和が**4** の倍数になる」

とおくと, どの**2** つの事柄も同時におこることがないので

$$\mathbf{5+4+4+5=18}\quad \text{通り}$$

となるが, 補集合を考えたときに比べてかなり面倒である.
そこで, 次のような原則を引き出すことができるだろう.

補集合で考えるときのポイント

全体集合 U に対して, $n(X)$ を数えるよりも $n(\overline{X})$ を数えるほうが数えやすいとき

$$n(X)=n(U)-n(\overline{X})$$

として, $n(X)$ を計算するとよい.

■ド・モルガンの法則

【例題:ド・モルガンの法則】

1, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** の数字が書いてあるさいころを**1** 回振り, さらに**1**, **2**, **3**, **4** の数字が書いてある**4** 枚のカードから**1** 枚引くとする.

(4) 2 つの数字の積が偶数となるのは何通りか.

【解答】

(4) 2 つの数字の偶奇とその積の偶奇の関係は右の表のようになる.
これより, 積が偶数になる場合より, 奇数になる場合の方が数えやすそうだとわかるので, 補集合を考えてみることにする.

さいころ		カード		積
奇数	×	奇数	=	奇数
奇数	×	偶数	=	偶数
偶数	×	奇数	=	偶数
偶数	×	偶数	=	偶数

C:「さいころの数字が偶数である」
D:「カードの数字が偶数である」

とおくと, 求める場合の数は $n(C \cup D)$ であり, その補集合の要素の個数は $n(\overline{C \cup D})$ であるから,
全体集合を U とすると

$$n(C \cup D) = n(U) - n(\overline{C \cup D})$$

ここで,『ド・モルガンの法則』より

$$n(\overline{C \cup D}) = n(\overline{C} \cap \overline{D})$$

であり, 集合 $\overline{C} \cap \overline{D}$ に対応する事柄は,「さいころの数字が偶数でなく, かつ, カードの数字が偶数でない」つまり

「さいころ, カードの数字がともに奇数である」

となるので, 積の法則から

$$n(C \cap D) = 3 \times 2 = 6$$

よって

$$\begin{aligned} n(C \cup D) &= n(U) - n(C \cup D) \\ &= n(U) - n(C \cap D) \\ &= 24 - 6 = 18 \quad \text{通り} \end{aligned}$$

ド・モルガンの法則を使うときには
i) 形式的な面　　**ii)** 意味的な面
の両方から, 考える癖をつけるのがよい.
つまり, 上の問題の例でいうならば, **i)** では

集合 $\overline{C \cup D}$ は, 補集合のバー $\overline{(\bigcirc)}$ が“切れて” $\cup$ が“ひっくりかえった”集合 $C \cap D$ と常に等しかったな. そして, この $C \cap D$ は,「数字がともに奇数である」という事柄と対応するな.

と考えることであり, **ii)** では

「(さいころの数字が偶数であるか, または, カードの数字が偶数である)ということはない」, とはつまり,「さいころ, カードの数字がともに奇数であること」と同じだな. だから, それぞれに対応する集合 $C \cup D$ と $C \cap D$ は等しくなるな.

と考えることである. 上の解答では, **i)** を強調した書き方になっている.

■包含と排除の原理

【例題:2 集合の包含と排除の原理】

1, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** の数字が書いてあるさいころを**1** 回振り, さらに**1**, **2**, **3**, **4** の数字が書いてある**4** 枚のカードから **1** 枚引くとする.
(5) 2 つの数字の積が偶数となるのは何通りか.『包含と排除の原理』を用いて求めよ.

【解答】
(5) (4) の場合と同じように
C:「さいころの数字が偶数である」
D:「カードの数字が偶数である」

とおくと, 求める場合の数は $n(C\cup D)$ である. 和集合の要素の個数に関して

$$n(C\cup D)=n(C)+n(D)-n(C\cap D)$$

が成り立つ. また, 集合 $C\cap D$ に対応する事柄は

「さいころ, カードの数字が共に偶数」

となる.

ここで, $n(C)$, $n(D)$, $n(C\cap D)$ はそれぞれ

$n(C)=3\times 4=12$

$n(D)=6\times 2=12$

$n(C\cap D)=3\times 2=6$

となるので

$$\begin{aligned} n(C\cup D)&=n(C)+n(D)-n(C\cap D)\\ &= 12+12-6=18 \text{ 通り} \end{aligned}$$

【例題:集合を利用した数え上げのまとめ】

1 から**100** までの自然数のうち, 次のような数は全部でいくつあるか.

(1) **3** で割りきれ, かつ, **7** で割りきれる数.

(2) **3** で割りきれるか, または, **7** で割りきれる数.

(3) **3** で割りきれなく, かつ, **7** で割りきれない数.

(4) **3** で割りきれないか, または, **7** で割りきれない数.

【解答】

事柄**A**, **B** をそれぞれ

A:「**3** で割りきれる」

B:「**7** で割りきれる」

とする. まず, $n(A)$ と $n(B)$ について

$100\div 3=33$ あまり1

$100\div 7=14$ あまり2

であるから

$n(A)=33,\ n(B)=14$

である.

(1)「**3** で割りきれ, かつ, **7** で割りきれる数」は集合で $A\cap B$ と表すことができ, これは結局

「**21** で割りきれる数」のことである.

$100\div 21=4$ あまり16 であるから

$n(A\cap B)=4$

(2)「**3** で割りきれるか, または, **7** で割りきれる数」は集合で $A\cup B$ と表すことができる.

$$\begin{aligned} &n(A\cup B)\\ =\ &n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\ =\ &33+14-4\\ =\ &43 \end{aligned}$$

(3) 求める場合の数は $n(\overline{A}\cap\overline{B})$ である. 全体集合を**U** とすると

$$\begin{aligned} & n(\overline{A}\cap\overline{B}) \\ = \ & n(\overline{A\cup B}) \\ = \ & n(U)-n(A\cup B) \\ = \ & 100-43=57 \end{aligned}$$

◀『ド･モルガンの法則』
◀『補集合の要素の個数』

(4) 求める場合の数は $n(\overline{A}\cup\overline{B})$ である.

$$\begin{aligned} & n(\overline{A}\cup\overline{B}) \\ = \ & n(\overline{A\cap B}) \\ = \ & n(U)-n(A\cap B) \\ = \ & 100-4=96 \end{aligned}$$

◀『ド･モルガンの法則』
◀『補集合の要素の個数』

§ 3.2 順列

　この§3.2 から§3.9 までの8 つのセクションでは，数え上げに関する応用的な手法をみていく．各セクションは，「ボールと箱のモデル」で体系的にまとめることができる．縦の欄にはボールと箱の区別の有無を，横の欄にはボールを箱にしまう際に，それが『写像』でいうところの何と対応するのかを示している．

ボール・箱	単射	写像全て	全射
あり・あり	順列	重複順列	部屋割り
なし・あり	組合せ	重複組合せ	資源配分
あり・なし		（右枠の和）	部屋割（区別なし）
なし・あり		（右枠の和）	資源配分（区別なし）

3.2.1　順列

■順列 $_nP_r$ の定義

　4 枚のカード A，B，C，D から2 枚のカードを引いて，これらを1 列に並べる場合の数は次のように求めることができる．

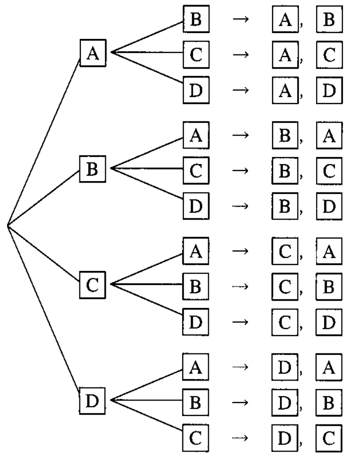
　まず，1 枚目のカードの取り方は，4 枚のカードのどれを取っても

よいから4 通りある．

　そして，1 枚目のカードが決まれば，2 枚目のカードの取り方は，残りの3 枚のカードの中から1 枚取るから3 通りある．

　つまり，1 枚目のカードの取り方4 通りに対して，2 枚目のカードの取り方が3 通りに定まるから，2 枚のカードの並べ方は『積の法則』より

$$4 \times 3 = 12 \text{ 通り}$$



となる．

右の図は，2 枚のカードの並べ方12 通りを樹形図と平図を用いて表したものである．

ここで， n 個のものから r 個とって並べる順列を定義しておこう．

順列 $_n\mathrm{P}_r$ の定義

「区別する n 個のものから r 個取り出して 1 列に並べた列」のことを n-r 順列 (permutation) といい，その並べ方の総数を $_n\mathrm{P}_r$ と表す

上の例では， $_4P_2=4\times3=12$ である．

■順列 $_nP_r$ の計算

　区別する n 個のものから r 個取り出して1 列に並べる順列の数 $_nP_r$ は，上の例と同じように考えることができる．

1 番目のものの取り方は n 通りあり，

2 番目のものの取り方はそのそれぞれに対して $n-1$ 通りあり，

3 番目のものの取り方はそのそれぞれに対して $n-2$ 通りあり，

...

r 番目のものの取り方はそのそれぞれに対して $n-(r-1)$ 通りある．

したがって，『積の法則』より

$$_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}} \qquad \cdots\cdots①$$

と計算できることがわかる.
特に, r が n に等しいとき, つまり $r=n$ のときには,

$$ {}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 $$

となる. 右辺は1 から n までのすべての自然数の積であり, これを n の**階乗(factorial)**といい,
記号 $n!$ で表す. つまり

$$ n! = {}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 $$

である.
また, $r<n$ のとき, ${}_nP_r$ の分母・分子に $(n-r)!$ をかけることにより

$$ {}_nP_r = {}_nP_r \times \frac{(n-r)!}{(n-r)!} \quad = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} $$

と変形できるので, 分子は $n!$ で表すことができ

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \cdots\cdots ② $$

となる.
$r=n$ のとき, ② は形式的に ${}_nP_n = \dfrac{n!}{0!}$
と表せるが, ${}_nP_n = n!$ となって欲しいので, $0!=1$ と定めることにする. こうすれば, ②は $r=n$ のときにも成り立つ.
以上, ①, ②をまとめると

順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ の計算

順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ は

$$ \begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_r &= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned} $$

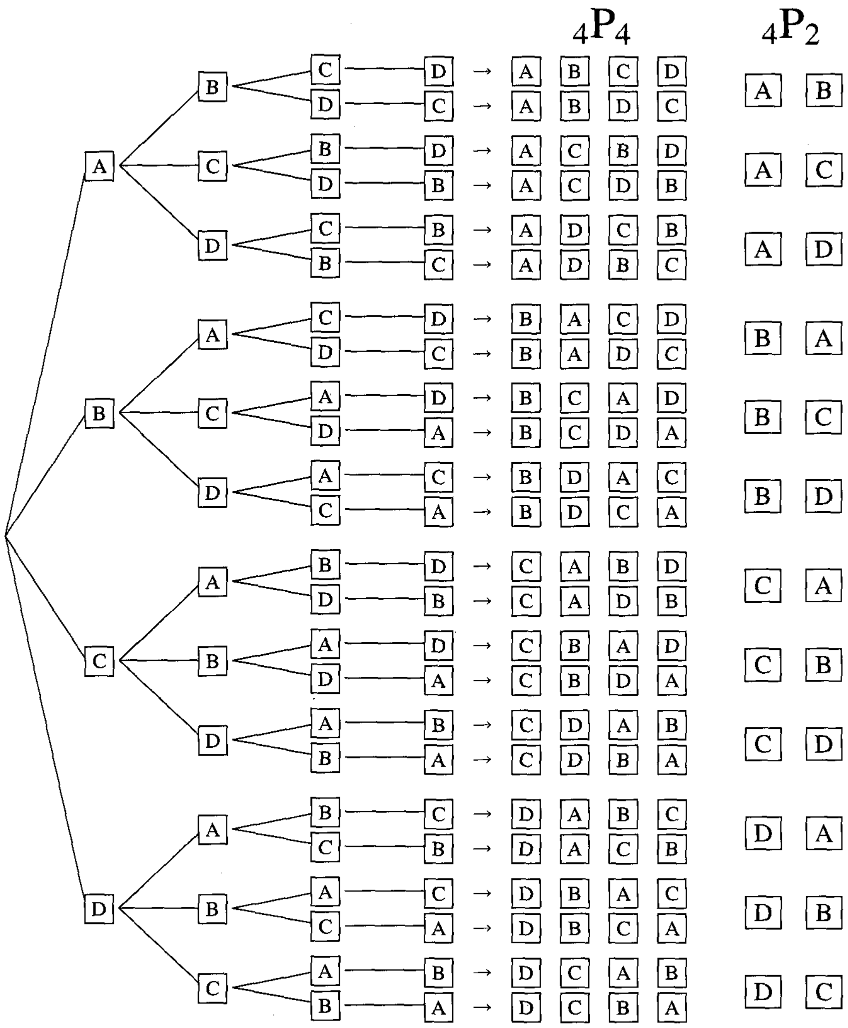
と計算できる. ただし, n, r は 0 以上の整数とし, $n \geqq r$ とする.

よくあるまちがいとして, ${}_nP_0 = 0$ としてしまうというのがある. 上の式によれば, ${}_nP_0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = 1$
である. このことは, ${}_nP_0$ すなわち「区別する n 個のものから 0 個取り出して1 列に並べる場合の数」は, 「1 個も並べない」という1 通りである, とこじつけてで覚えてしまうとよい.

また, ② の ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ は, ただ計算上で成り立つだけでなく

とりあえず, n 個の区別するものをすべて並べて $n!$ 通りの樹形図を作ってから, (左から r 個のものにしか着目しないので) 関係のない右から $n-r$ 個の並べ方の違いについては無視するため, $(n-r)!$ 通りで1 束にして数えたもの

と考えることもできる. このことの具体例を示すため, 以下には ${}_4P_4 (=4!)$ と ${}_4P_2$ の対応を樹形図で表した. ${}_4P_2$ 通りは, ${}_4P_4$ 通りの順列において $(4-2)!$ 通りで割って1 束にしたものであることを確認しよう.



【例題：順列の計算練習】

次の値を求めよ．

(1) $_5P_2$　　**(2)** $_7P_4$

(3) $_6P_3$　　**(4)** $_{10}P_8$

【解答】

(1) $_5P_2=5\cdot 4=20$

(2) $_7P_4=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=840$

(3) $_6P_3=6\cdot 5\cdot 4=120$

(4) $_{10}P_8=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=1814400$

【例題：順列～その1～】

(1) **1, 2, 3, 4, 5, 6** の**6** 個の数字を使って**3** 桁の整数を作るとき何通りの方法があるか．ただし，同じ文字は二度使えないものとする．

(2) 30 人のクラスがある．このクラスで，委員長，副委員長，書記をそれぞれ一名ずつ決めるとき，何通りの決め方があるか．

【解答】

(1) 3 桁の整数は，異なる**6** 個の数字から**3** つ選んで並べることにより作ることができるから

$_6P_3=6\cdot 5\cdot 4=120$ 通り

(2) 委員長，副委員長，書記をそれぞれ一名ずつ決めるには，**30** 人の中から**3** 人を選んで横**1** 列並べ，左から順に委員長，副委員長，書記とすればよいので

$${}_{30}P_3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360 \quad \text{通り}$$

【例題：順列～その2～】
5 個の整数　$0, 1, 2, 3, 4$　があり，この中から異なる数字を用いて整数を作る．
(1) **3** 桁の整数は何通り作れるか．
(2) **3** 桁の整数で，かつ百の位と十の位が奇数のものは何通り作れるか．

【解答】
(1) 百の位にあるのは　$0, 1, 2, 3, 4$　のうち　0　を除いた　4　種類，このそれぞれに対して十の位にあるのは百の位で選んだ以外の数字で**4** 種類，さらにこのそれぞれに対して一の位にあるのは百の位と十の位にない**3** 種類がある．よって

◀最高位の数字は**0** にならないことに注意

$$4 \cdot 4 \cdot 3 = 48 \quad \text{通り}$$

《別解：補集合を考える》
5 種類の文字から**3** つ選んで並べたときの順列　${}_5P_3$　通りから，百の位の数が　0　であるときの順列　${}_4P_2$　通りを引くことによって

$${}_5P_3 - {}_4P_2 = 48 \quad \text{通り}$$

(2) 奇数は**1** と**3** の**2** 種類がある．百の位と十の位に関しての順列は　${}_2P_2$　通り．このそれぞれに対して，一の位には残りの　$0,\ 2,\ 4$　の**3** 種類の数字が入るので

$${}_2P_2 \cdot 3 = 6 \quad \text{通り}$$

【例題：順列～その3～】
7 つの整数　$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$　を**1** 列に並べる．
(1) **6** と**7** が隣り合うものは何通りあるか．
(2) **5** と**6** と**7** が隣り合うものは何通りあるか．
(3) 両端が**1** と**2** になるものは何通りあるか．

【解答】
(1) 隣り合う**6** と**7** の**2** つを合わせて**1** つのものとして考え，全体で**6** つのものの順列を考え

◀ ①1，②2，③3，④4，⑤5，⑥$\boxed{67}$

$$6!\text{通り}$$

このそれぞれに対して，**6** と**7** の並び方は，　67　と　76　の**2** 通りあるので

$$6! \times 2 = 1440 \quad \text{通り}$$

(2) 隣り合う**5** と**6** と**7** の**3** つを合わせて**1** つのものとして考え，全体で**5** つのものの順列を考え

$5!$ 通り

このそれぞれに対して，**5** と**6** と**7** の並び方は， $3!$ 通りあるので

$5! \times 3! = 720$ 通り

◀ ① ② ③ ④ ⑤ ： 1，2，3，4，$\boxed{567}$

(3) 両端には**1** と**2** の順列を考え**2** 通り．このそれぞれに対して，両端でない文字は $5!$ 通りの並び方があるので

$5! \times 2 = 240$ 通り

◀ 1○○○○○2 と 2○○○○○1

ものを並べる問題で，“隣り合う”ものを考える場合には，その隣り合うものをひとまとめにして考えるとよい．

■ボールと箱のモデル

$_5P_3$ の定義は

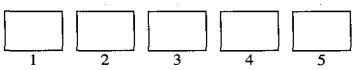
「区別する**5** 個のものから**3** 個とりだして**1** 列に並べるときの並べ方の総数」

であったが，これは以下に示すボールと箱のモデルを使って

「区別する**3** 個のボールを，区別する**5** 個の箱に多くても**1** 個配る場合の総数」

といいかえることができる．

準備として，ボールは区別するので番号をつけ，それを① , ② , ③ とし，箱も区別するので番号をつけ，それを



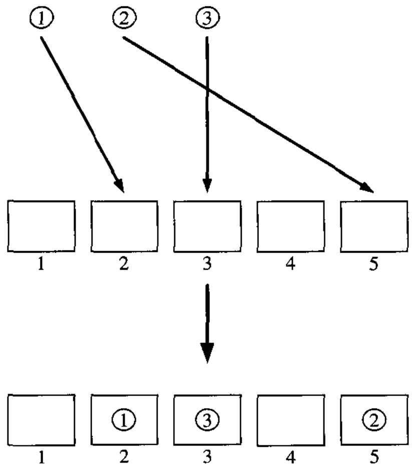
としておく．

まず，ボール**1** を箱に配ることを考えると，箱は**5** つあるので**5** 通りの場合がある．

次に，ボール**2** を箱に配ることを考えると，すでにボール**1** は箱に配られていて残りの箱は**4** つあるので，**4** 通りの場合がある．

さらに，ボール**3** を箱に配ることを考えると，すでにボール**1** と**2** は箱に配られていて残りの箱は**3** つあるので，**3** 通りの場合がある．

以上から，ボールの箱への配り方は**5** × **4** × **3** 通りあり，これは $_5P_3$ と一致する．



一般に，次のようにまとめることができる．

順列 $_nP_r$ のボールと箱のモデル

順列 $_nP_r$ はボールと箱のモデルを用いて

「区別する r 個のボールを，区別する n 個の箱に高々 1 個配る場合の総数」

と考えることができる．

3.2.2 円順列

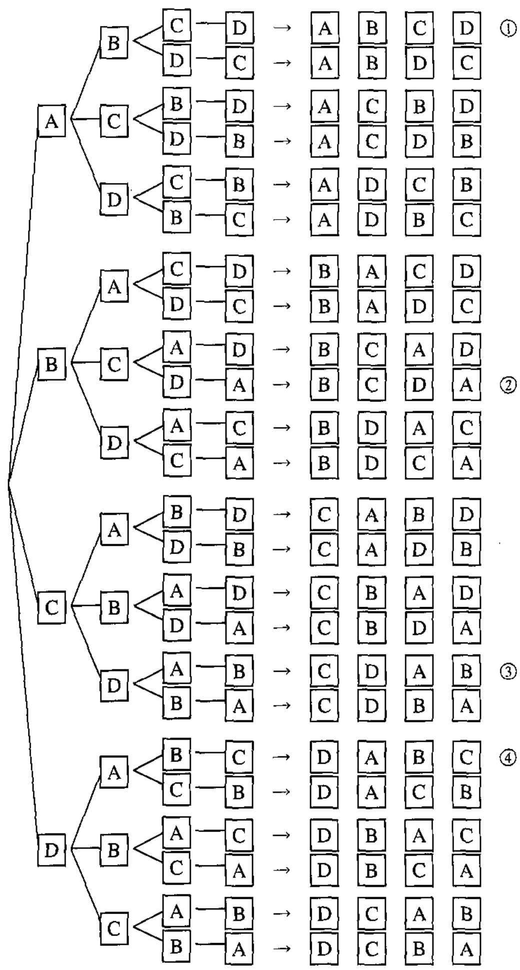
■円順列cir(n) の定義

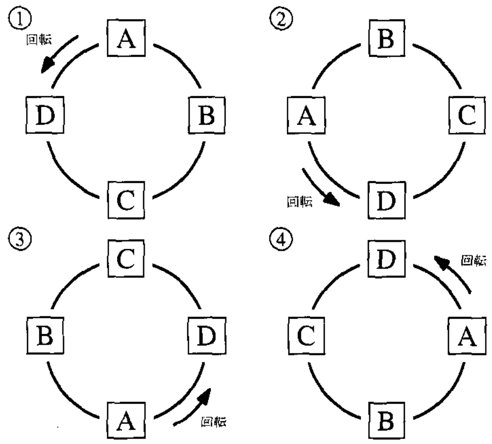
先程の『順列』では，区別するものを1列に並べる場合を考えたが，ここでは円形に並べる場合について考えてみる.

例えば，　A，B，C，D　の**4** 人が手をつないで**1** つの輪をつくるとき，輪のでき方には何通りあるか考えてみよう.

まず，この**4** 人を**1** 列に並べると右図のようになり，その並べ方は　$4!$　通りである.

ここで，例えば右図の　**1**，**2**，**3**，**4**　は，輪になった場合に下の図のようになると考えることができる.





これら**4** つの並び方は，回転させることによって重なるので，どれも同じ**1** つの並び方だと考えられる.

つまり，右図の①,②,③,④のように，“順送り”に並ぶ**4** つの順列は，円形に並べた場合には同一視するのである.

よって，この**4** 人の作る輪は　$\dfrac{4!}{4}=3!=6$　通りある.

ここで，円順列を定義しておこう.

円順列 cir(n) の定義

「区別する n 個のものを，円形に並べた列」のことを n **個の円順列** (circular permutation) という．FTEXTでは，その並べ方の総数を **cir(*n*)** と表すことにする.

この例では，　$cir(4)=\dfrac{4!}{4}=3!=6$　である.

■円順列cir(n) の計算

一般に，区別する　n　個のものを円形に並べた場合の総数も，先程の例と同じように考えることができ，次のようにまとめられる.

円順列 cir(n) の計算

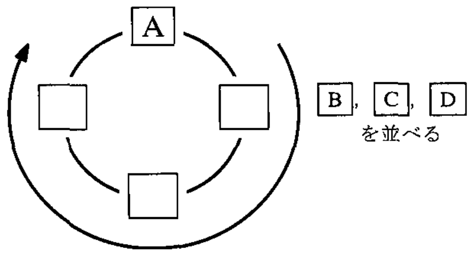
n 個の円順列の総数 cir(n) は

$$\mathrm{cir}(n)=\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

と計算できる.

また，円順列が $(n-1)!$ と計算される理由は，次のように説明することもできる.
簡単のため，先程の $cir(4)$ が $3!$ で計算できることについて考えてみよう.

右図のように，まず**A**を固定して，そこから円をつくるように残りの**B**，**C**，**D**を並べると考えて，$3!$ 通りとなり，これは $cir(4)$ と一致する.
一般の $cir(n)$ の場合も，**1**つを固定して，その周りに残りの $n-1$ 個のものを並べると考えて

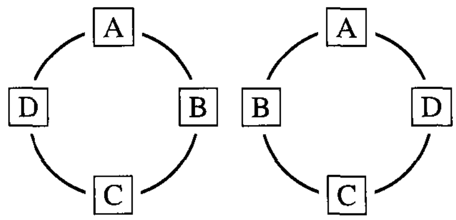


$$cir(n)=(n-1)!$$

と考えることができる.

■ネックレス順列 $neck(n)$ の定義・計算

右図のように，円順列としては区別される**2**つの順列も，表裏をひっくり返すことができる場合には同一視して**1**通りと数える.



このように表裏をひっくり返すことができる場合の円順列を，**ネックレス順列(nacklace permutation)**または数珠順列**(beads permutation)**といい，その総数を**FTEXT**では $neck(n)$ と表す.

$$neck(n)=cir\frac{(n)}{2}=\frac{(n-1)!}{2}$$

である.

【例題：円順列とネックレス順列】
(1) 7個の異なる玉を円形に並べるとき，その並べ方は何通りあるか.
(2) 7個の異なる玉を円形に並べてネックレスを作るとき，その作り方は何通りあるか.

【解答】
(1) $cir(7)=(7-1)!=720$ 通り
(2) $neck(7)=\dfrac{(7-1)!}{2}=360$ 通り

§ 3.3　重複順列

カード引きでは，**1** 回目に引く場合と**2** 回目に引く場合では状況が異なるが，さいころ投げでは**1** 回目に出る目と**2** 回目に出る目に全体として変化が無い．さいころ投げで順序を考慮する場合には，下でみるように重複順列を考えることになる．

ボール・箱	単射	写像全て	全射
あり・あり	順列	重複順列	部屋割り
なし・あり	組合せ	重複組合せ	資源配分
あり・なし		(右枠の和)	部屋割(区別なし)
なし・あり		(右枠の和)	資源配分(区別なし)

3.3.1　重複順列

■重複順列の $_n\Pi_r$　定義

例えば，△1，△2，△3，△4 の目が描いてある正四面体のさいころを**2** 回振って，出た目を順に**1** 列に並べる場合の数は次のように求めることができる．

まず，**1** 回目のさいころの目の出方は**4** 通りある．

そして，**2** 回目のさいころの目の出方も**4** 通りある．

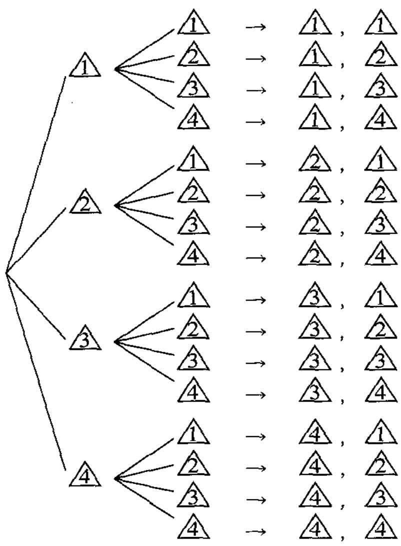
つまり，**1** 回目の目の出方**4** 通りに対して，**2**回目の目の出方も**4** 通りに定まるから，さいころを**2** 回振ったときの目の出方は積の法則より

$$4\times4=16 \quad \text{通り}$$

となる．

右の図は，さいころを**2** 回振ったときの目の出方**16** 通りを樹形図を用いて表したものである．

ここで，n 個のものから，繰り返し用いることを許して，r 個とって並べる場合の順列を定義しておこう．



重複順列 $_n\Pi_r$ の定義

「区別する n 個のものから，繰り返し用いることを許して，r 個取り出して 1 列に並べた列」のことを ***n*-*r* 重複（ちょうふく）順列** (permutation with repetitions) といい，その並べ方の総数を $_n\Pi_r$ と表す[a]．

[a] 順列 (permutation) は $_nP_r$ を用いたが，重複順列はアルファベットの P に対応するギリシア文字 Π を用いてこのように表す(ギリシア文字に関しては p.x 参照)．

この例では，$_4\Pi_2=4\times4=16$ である．

■重複順列 $_n\Pi_r$ の計算

区別する n 個のものから，繰り返し用いることを許して，r 個取り出して**1** 列に並べる順列の数 $_n\Pi_r$ も，先程の例と同じように考えることができる．

まず，**1** 番目のものの取り方は n 通りあり，**2** 番目のものの取り方もそのそれぞれに対して n 通りあり，**3** 番目のものの取り方もそのそれぞれに対して n 通りあり，・・・，r 番目のものの取り方もそのそれぞれに対して n 通りある．

したがって，積の法則より

$$_n\Pi_r=n\times n\times\cdots\times n=n^r \quad \cdots\cdots①$$

と計算できることがわかる．

重複順列 $_n\Pi_r$ の計算

重複順列 $_n\Pi_r$ は

$$_n\Pi_r = n^r$$

と計算できる．

【例題：重複順列の計算練習】

次の値を求めよ．

(1) $_4\Pi_2$ **(2)** $_5\Pi_2$ **(3)** $_6\Pi_3$ **(4)** $_8\Pi_4$

【解答】

(1) $_4\Pi_2=4^2=16$

(2) $_5\Pi_2=5^2=25$

(3) $_6\Pi_3=6^3=216$

(4) $_8\Pi_4=8^4=4096$

【例題：重複順列～その1～】

7 色の絵の具で**3** つの場所を塗る場合について次の問に答えよ．

(1) 同じ色を使わないで塗る方法は何通りあるか．

(2) 同じ色を使って塗る方法は何通りあるか．

【解答】

(1) 最初の場所を塗るには**7** 通りの色が選べ，そのそれぞれに対して，次の場所を塗るには最初に使った絵の具以外の**6** 通りの色が選べ，さらにそのそれぞれに対して，最後の場所を塗るには**5** 通りの色が選べる．つまり，**7** つのものから**3** つを選んで並べる順列となり

$$_7P_3=210 \quad \text{通り}$$

(2) **3** つの場所それぞれ，**7** 通りの色が選べる．つまり，**7** つのものから繰り返しを許して**3** つ並べる重複順列となり

$$_7\Pi_3=7^3=343 \quad \text{通り}$$

■ボールと箱のモデル

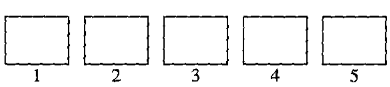
例えば，$_5\Pi_3$ の定義は

「区別する**5** 個のものから，繰り返し用いることを許して，
3 個とりだして**1** 列に並べるときの並べ方の総数」

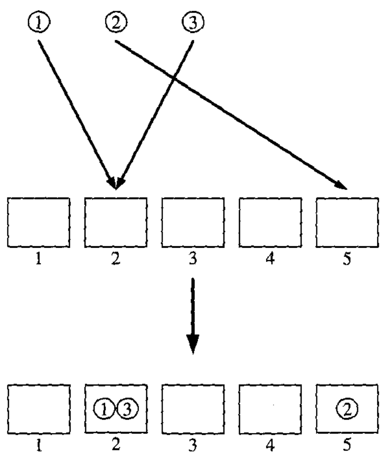
であったが，これはボールと箱のモデルを使って

「区別する**3** 個のボールを，区別する**5** 個の箱に配る
（何個でもよい）場合の総数」

といいかえることができる．それには，次のように考えるとよい．
準備として，ボールは区別するので番号をつけ，
それを①，②，③ とし，箱も区別
するので番号をつけ，それを



としておく．



まず, ボール① を箱に配ることを考えると, 箱は5 つあるので5 通りの場合がある.
次に, ボール② を箱に配ることを考えると, 箱には何個でもボールを入れてよいので, このときも5 通りの場合がある.
さらに, ボール③ を箱に配ることを考えると, 同じように5 通りの場合がある.
以上から, ボールの箱への配り方は $5\times5\times5$ 通りあり, これは ${}_5\Pi_3$ と一致する.
一般に, 次のようにまとめることができる.

重複順列 ${}_n\Pi_r$ のボールと箱のモデル

重複順列 ${}_n\Pi_r$ はボールと箱のモデルを用いて

「区別する r 個のボールを, 区別する n 個の箱に配る(何個でもよい)場合の総数」

と考えることができる.

【例題:重複順列〜その2〜】

4 桁の電話番号は0000 から9999 まで10000 通りある. このうち, 0007 や3556 のように同じ数字が連続しているものは何通りあるか. また, 数字の1 と6 の両方を含むものは何通りあるか.

【解答】

10000 通りの電話番号を全体集合 U として, X を

X :同じ数字が連続しているもの

とおく. まず $\overline{X}$, すなわち同じ数字が連続していないものについて考える.
左から順に数字を並べたとき, はじめの数字はなんでもよいので10 通りあり, 左から2 番目の数字は今並べた数字とは同じにならないようにするため9 通りある. 左から3 番目, 4 番目も同様に9 通りあるので

$$n(\overline{X})=10\times9^3=7290$$

よって

$$n(X)=n(U)-n(\overline{X})=10000-7290=2710 \text{ 通り}$$

また

A :数字の1 を含む
B :数字の6 を含む

とおくと, $\overline{A}$, すなわち数字の1 を含まないものは 9^4 通りあり,
$\overline{B}$, すなわち数字の6 を含まないものも同様に 9^4 通りあり, $\overline{A}\cap\overline{B}$, すなわち数字の1 と6 を含まないものは 8^4 通りあるので

$$\begin{aligned} n(A\cap B) &= n(U)-n(\overline{A\cap B}) \\ &= n(U)-n(\overline{A}\cup\overline{B}) \\ &= n(U)-\{n(\overline{A})+n(\overline{B})-n(\overline{A}\cap\overline{B})\} \\ &= 10000-(9^4+9^4-8^4) \\ &= 974 \text{ 通り} \end{aligned}$$

§ 3.4 部屋割り

例えば，5 人の人が鶴の間，亀の間，松の間の3 つの部屋に泊まる場合，部屋を割り当てる方法(空部屋はでないようにする)には何通りの方法があるだろうか．このような問題は，人を「区別するボール」，部屋を「区別する箱」として，ボールと箱のモデルで考えることができる．

ボール・箱	単射	写像全て	全射
あり・あり	順列	重複順列	部屋割り
なし・あり	組合せ	重複組合せ	資源配分
あり・なし		(右枠の和)	部屋割(区別なし)
なし・あり		(右枠の和)	資源配分(区別なし)

3.4.1 部屋割りの数

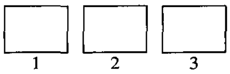
■ボールと箱のモデル

ボールと箱のモデルを使って

「区別する5 個のボールを，区別する3 個の箱に最低1 個は配る場合の数」

を考えてみよう．

準備として，ボールは区別するので番号をつけ，それを①，②，③，④，⑤ とし，箱も区別するので番号をつけ，それを



としておく．

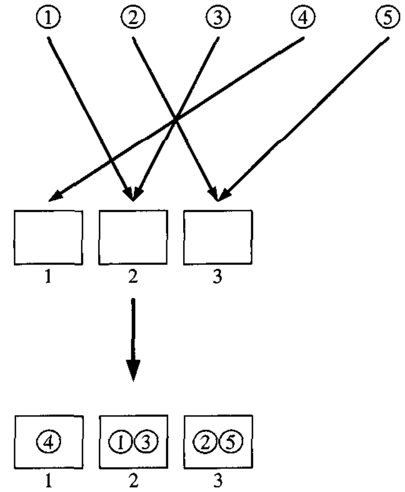
集合 A，B，C，U をそれぞれ

A : $\underset{1}{\boxed{}}$ が空になる

B : $\underset{2}{\boxed{}}$ が空になる

C : $\underset{3}{\boxed{}}$ が空になる

U :ボールを適当に箱にしまう場合(空・重複有り)



とおくと，求めるものは $n(U)-n(A\cup B\cup C)$ である．

$n(U)=3^5$ ← 重複順列 ${}_3\Pi_5$

$n(A)=n(B)=n(C)=2^5$ ← 1 つ以上の箱が空になる場合

$n(A\cap B)=n(B\cap C)=n(C\cap A)=1$ ← 2 つ(以上)の箱が空になる場合

$n(A\cap B\cap C)=0$ ←全部の箱が空になる場合

であるから，『包含と排除の原理』を使って

$$
\begin{aligned}
&n(U)-n(A\cup B\cup C)\\
=\ &n(U)-n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\\
=\ &n(U)-n(A)-n(B)-n(C)+n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-n(A\cap B\cap C)\\
=\ &3^5-3\cdot 25+3-0\\
=\ &150 \text{ 通り}
\end{aligned}
$$

となる． ここで，ボールを箱へこのように配る方法を定義しておく．

部屋割りの数 room(n, r) の定義

「区別する n 個のボールを，区別する r 個の箱に(空の箱がないように)最低 1 個は配る場合の数」を，FTEXTでは room(n, r) と表す．

この例では，　$room(5,3)=150$　である．

$room(n,r)$ は n 個の要素をもつ集合 A から，r 個の要素をもつ集合 B への全射のパターンの総数と等しい．

3.4.2　★包含と排除の原理の一般形

この**3.4.2**は，高度な内容が含まれており，しかもこの後に習う『組合せ』の知識も必要とする．初読の際には読み飛ばしてよいし，再読の際も読む必要はない．もし興味が湧くようなことがあれば読めばよい．

■包含と排除の原理（一般の場合）

1 から r までの r 個の自然数の集合 $\{1,2,\cdots,r\}$ から k 個の要素をとってきて，小さいものから順に並び換えた組 $\underbrace{(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots,\ i_k)}_{k\text{ 個}}$ を作るとする．このとき，この組の作り方は全部で ${}_rC_k$ 通りあるが，そのすべてに関して次の例のような和を考え $\displaystyle\sum_{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k}^{r,\ k}$ と表すことにする．

例えば，$k=1$ の例 $\displaystyle\sum_{i_1}^{r,\ 1} 2^{i_1}$ は

$$\sum_{i_1}^{r,\ 1} 2^{i_1} = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{(r-1)} + 2^r$$

を意味し，$r=4$，$k=2$ の例 $\displaystyle\sum_{i_1,\ i_2}^{4,\ 2} a_{i_1}a_{i_2}$ は

$$\sum_{i_1,\ i_2}^{4,\ 2} a_{i_1}a_{i_2} = a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4$$

を意味している．

この記号を用いると，r 個の集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_r$ の和集合 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_r$ の要素の個数に関して，次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_r \\
&= \sum_{i_1}^{r,\ 1} n(A_{i_1}) - \sum_{i_1,\ i_2}^{r,\ 2} n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{i_1, i_2, i_3}^{r,\ 3} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \cdots \\
&\qquad \cdots + (-1)^{r-1} \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_r}^{r,\ r} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r})
\end{aligned}$$

この式が包含と排除の原理の一般形である．

■部屋割り数room(m, r) の計算

一般の部屋割りの数 $room(m, r)$ は，包含と排除の原理の一般形を用いて，次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{room}(m,\ r)\\
&= n(U) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_r)\\
&= n(U) - \Big\{\sum_{i_1}^{r,\,1} n(A_{i_1}) - \sum_{i_1,\,i_2}^{r,\,2} n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{i_1,i_2,i_3}^{r,\,3} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \cdots\\
&\qquad\qquad + (-1)^{r-1} \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_r}^{r,\,r} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r})\Big\}\\
&= n(U) - \sum_{i_1}^{r,\,1} n(A_{i_1}) + \sum_{i_1,\,i_2}^{r,\,2} n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) - \sum_{i_1,i_2,i_3}^{r,\,3} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \cdots\\
&\qquad\qquad - (-1)^{r-1} \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_r}^{r,\,r} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r})\\
&= r^m - {}_rC_1(r-1)^m + {}_rC_2(r-2)^m - {}_rC_3(r-3)^m + \cdots + (-1)^r {}_rC_r(r-r)^m\\
&= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k {}_rC_k (r-k)^m
\end{aligned}
$$

まとめておこう。

部屋割りの数 room(n, r) の計算

部屋割りの数 room(n, r) は

$$\mathrm{room}(n,\ r) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k {}_rC_k (r-k)^n = r! \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k (r-k)^n}{(r-k)!k!}$$

と計算できる．

この計算式は理論的にはこう表せるということを示したものであり，記憶する必要は全くない．

■ 攪乱順列

『部屋割り』とは異なるが，『包含と排除の原理』の応用として次の問題を考えてみよう．

【例題：攪乱順列】

4 人の友達 ***A*，*B*，*C*，*D*** がクリスマスパーティーでプレゼントを交換する．自分自身の持ってきたプレゼントに誰も当たらないには何通りの分け方があるか求めよ．

【解答**1**：包含と排除の原理】

U ：プレゼントの分け方のすべて

A ：**A** 君が自分自身のプレゼントをもらう

B ：**B** 君が自分自身のプレゼントをもらう

C ：**C** 君が自分自身のプレゼントをもらう

D ：**D** 君が自分自身のプレゼントをもらう

と集合をおくと

$$
\begin{aligned}
&n(U) - n(A \cup B \cup C \cup D)\\
&= n(U) - \{n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B)\\
&\quad - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D)\\
&\quad - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D)\\
&\quad + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)\}\\
&= 4! - \{{}_4C_1(4-1)! + {}_4C_2(4-2)!\\
&\quad - {}_4C_3(4-3)! + {}_4C_4(4-4)!\}\\
&= 4! - 4 \cdot 3! + 6 \cdot 2! - 4 \cdot 1! + 1\\
&= \mathbf{9}\text{通り}
\end{aligned}
$$

【解答2:漸化式を使う】

n 人のプレゼント交換において, 自分自身の持ってきたプレゼントに誰も当らない場合の数を $D(n)$ とする. いま, $D(4)$ は次の3 つに場合分けできる.

i) A 君がB 君のプレゼントに当る
ii) A 君がC 君のプレゼントに当る
iii) A 君がD 君のプレゼントに当る
i)〜iii) は対称的なので, 以下i) についてだけ考える(のち $4-1=3$ 倍すればよい).

プレゼントを小文字のアルファベットで表すとして, "A君のプレゼント a を b と考えて"、残り3人へプレゼントの配り方を考えると

① B 君に b (本当は a)を配り, 残り C, D 君に自分自身のプレゼントが当らないように配る

② B, C, D 君に自分自身のプレゼントが当らないように配る(見かけの上ではあるが, B 君に b が配られない場合を考える)

の2 通りに場合分けできる. ここで① は $D(2)$, ②は $D(3)$ に他ならない. つまり $D(4)$ は

$$D(4)=(4-1)\{D(3)+D(2)\}$$

で計算できる. この関係は n が自然数で一般的に成り立つから

$$\begin{aligned}D(4)&=(4-1)\{D(3)+D(2)\}\\&=3D(3)+3D(2)\\&=3[2D(2)+D(1)]+3D(2)\\&=9D(2)+D(1)\\&=9D(2)+0\\&=9\cdot 1\\&=9\ \text{通り}\end{aligned}$$

§ 3.5 組合せ

ボール・箱	単射	写像全て	全射
あり・あり	順列	重複順列	部屋割り
なし・あり	組合せ	重複組合せ	資源配分
あり・なし		(右枠の和)	部屋割(区別なし)
なし・あり		(右枠の和)	資源配分(区別なし)

順列では, ものを取り出したときの順番の違いを考えに入れていたが, 順番は区別せず取り出したものの区別だけを考えたいことがあり, これを組合せという.

順列と同じように, 組合せも数が多くなると樹形図を書くのが大変になる. ここでは, 組合せの数を計算で求める方法について考えよう.

3.5.1 組合せ

■組合せnCr の定義

4 枚のカード から $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$ **2** 枚のカードの(順序は考えずに)組をつくる場合の数は, すべて書き出すと

$$\{\boxed{A}, \boxed{B}\},\ \{\boxed{A}, \boxed{C}\},\ \{\boxed{A}, \boxed{D}\},\ \{\boxed{B}, \boxed{C}\},\ \{\boxed{B}, \boxed{D}\},\ \{\boxed{C}, \boxed{D}\}$$

の**6** 通りとなる. これは, 順列の考え方を利用し, 次のように計算することもできる.

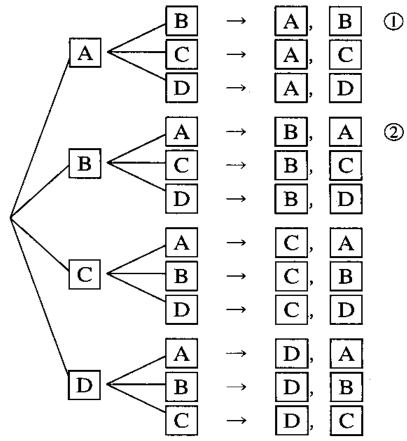
まず, **4** 枚のカードから**2** 枚引いて順列を作ると, 樹形図は右のようになり, その総数は, $_4P_2=4\times3=12$ 通りである.

しかし, **2** 枚のカードの組を作る場合には, 右の樹形図で例えば① , ② は並ぶ順が異なるだけなので, これらは**2** つで**1** 通りと数えなければならない.

これら以外の順列にも同様のことがいえるので, **2** 枚のカードの組の総数は, 順列の総数 $_4P_2$ を 2 で割ることにより

$$\frac{_4P_2}{2}=\frac{12}{2}=6 \quad \text{通り}$$

として計算できる.



このようにいくつかの組をつくる場合の数を定義しておこう.

組合せ $_nC_r$ の定義

> 「区別する n 個のものから r 個取り出して作った組」のことを ***n-r* 組合せ** (combination) といい, その組の総数を $_nC_r$ と表す.

この例では, $_4C_2=\dfrac{4\times3}{2}=6$ である.

■組合せnCr の計算

区別する n 個のものから r 個取り出して作る組の総数 $_nC_r$ も, 先程の例と同じように考えることができる.

まず, n 枚のカードから r 枚引いて順列を作ると, その総数は $_nP_r$ 通りある.

順列ではなく, r 枚のカードの組を作る場合には, $n-r$ 順列のうち $r!$ 通りについては同一視することになるので, 順列の総数 $_nP_r$ を $r!$ で割ることにより

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個の積}}}{r(r-1)\cdots3\cdot2\cdot1} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

以上，まとめると

組合せ $_n\mathrm{C}_r$ の計算

組合せ $_n\mathrm{C}_r$ は

$$_n\mathrm{C}_r = \frac{_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

と計算できる．

よくあるまちがいとして，$_nC_0=0$ としてしまうというのがある．上の式によれば，$_nC_0=\dfrac{n!}{(n-0)!0!}=1$ である．このことは，$_nC_0$ すなわち「区別する n 個のものから 0 個選ぶ場合の数」は，「**1** 個も選ばない」という**1** 通りである，とこじつけで覚えてしまうとよい．

【例題：組合せの計算練習】

次の値を求めよ．

(1) $_5C_2$ **(2)** $_4C_4$ **(3)** $_{10}C_3$ **(4)** $_{20}C_2$

具体的な数を計算したいときには，$_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$ を使う．

【解答】

(1) $_5C_2=\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$

(2) $_4C_4=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=1$

(3) $_{10}C_3=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$

(4) $_{20}C_2=\dfrac{20\cdot 19}{2\cdot 1}=190$

【例題：組合せ〜その1〜】

男子が**5** 人，女子が**5** 人いる中で，**4** 人を選ぶ場合の数について以下の問に答えよ．

(1) 男女関係無く選ぶときの場合の数は何通りか．

(2) 男子から**2** 人，女子から**2** 人選ぶときの場合の数は何通りか．

(3) 男子から**3** 人，女子から**1** 人選ぶときの場合の数は何通りか．

【解答】

(1) $_{10}C_4=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$ 通り

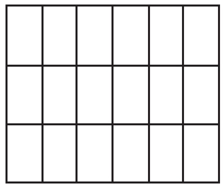
(2) 男子**2** 人の組合せそれぞれに対して，女子**2** 人の組合せが決められるので

$_5C_2\cdot{}_5C_2=\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=100$ 通り

(3) 男子**3** 人の組合せそれぞれに対して，女子**1** 人の組合せが決められるので

$_5C_3\cdot{}_5C_1=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}=50$ 通り

【例題:組合せ〜その2〜】



(1) 右図のように, 横に**4** 本, 縦に**7** 本の直行する平行線が引かれている.
この中に長方形はいくつあるか求めよ.

(2) 正十角形の対角線の本数を求めよ.

【解答】

(1) 横**4** 本の平行線のうちから**2** 本, 縦**7** 本の平行線のうちから**2** 本をそれぞれ選べば, **1** 個の長方形が定まる. よって

$${}_4C_2\cdot{}_7C_2=126 \quad \text{本}$$

(2) **10** 個の頂点のうち**2** 個を選べば, **1** 本の対角線または辺が定まる. 辺の数は**10** 本であるから, これを除いて

$${}_{10}C_2-10=45-10=35 \quad \text{本}$$

【例題:組み分け】

10 人を次のように分ける方法は何通りあるか.

(1) **7** 人, **3** 人に分ける.

(2) **5** 人, **5** 人に分ける.

(3) **4** 人, **3** 人, **3** 人に分ける.

(4) **2** 人, **2** 人, **2** 人, **2** 人, **2** 人に分ける.

【解答】

(1) **10** 人から**3** 人を選びグループとし, 残った**7** 人をもうひとつのグループにすればよい. よって

$${}_{10}C_3\cdot{}_7C_7=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120 \quad \text{通り}$$

(2) **10** 人から**5** 人を選びグループとし, 残った**5** 人をもうひとつのグループにすればよい. しかし, **10** 人を a,b,c,d,e,f,g,h,i,j とすると, 例えばはじめに a,b,c,d,e の**5** 人を選んだ場合と, はじめに f,g,h,i,j を選んだ場合では, どちらも (a,b,c,d,e), (f,g,h,i,j) という**2** つのグループに分かれるという点では同じである. つまり, これらは**2** つで**1** 通りと数えなければならない. 他の選び方でも同様のことがいえるので, **2** で割ることにより重複の分を修正して

$$\frac{{}_{10}C_5\cdot{}_5C_5}{2}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=126 \quad \text{通り}$$

(3) 最初に**4** 人選びグループとし, 残った**6** 人から**3**, **3**人のグループをつくればよい. ただし, **3** 人のグループが**2** つあるので, **(2)** と同じように重複した分は修正する必要がある.

$$\frac{{}_{10}C_4\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3}{2}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{2}=2100 \quad \text{通り}$$

(4) **2** 人ずつ選んでいって, 重複を修正すると

$$\frac{{}_{10}C_2\cdot{}_8C_2\cdot{}_6C_2\cdot{}_4C\,2\cdot{}_2C_2}{5!}=\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\cdot\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}\cdot\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=945 \quad \text{通り}$$

■ボールと箱のモデル

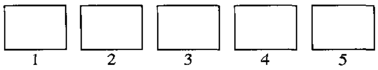
$_5C_3$ の定義は

「区別する5 個のものから3 個とりだして作る組の総数」

であったが，これはボールと箱のモデルを使って

「区別しない3 個のボールを，区別する5 個の箱に多くても1 個配る場合の数」

といいかえることができる．これは，次のように説明できる．
準備として，3 つのボールは区別しないで
それを ○，○，○ とし，箱は区別するので番号をつけ，
それを



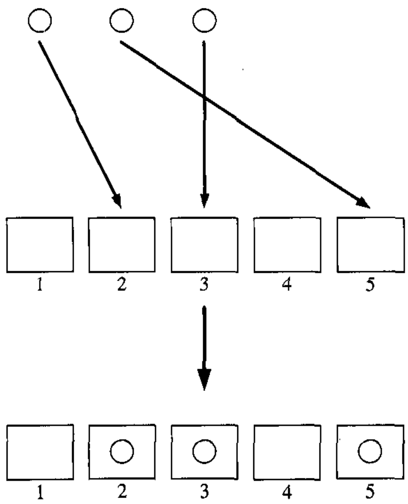
としておく．

3 つの区別しないボールを，5 つの区別する箱に高々1 個配る場合の総数は，結局5 つの箱からボールを入れるための箱を3 つ選ぶ選び方と等しくなり，これは

「区別する5 個のものから3 個とりだして作る組の総数」

と考えることができるので

$$_5C_3=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$$ 通りとなる．



一般に，次のようにまとめることができる．

> **組合せ $_nC_r$ のボールと箱のモデル**
>
> 組合せ $_nC_r$ はボールと箱のモデルを用いて
>
> 「区別しない r 個のボールを，区別する n 個の箱に高々 1 個配る場合の総数」
>
> と考えることができる．

3.5.2 同じものを含む順列

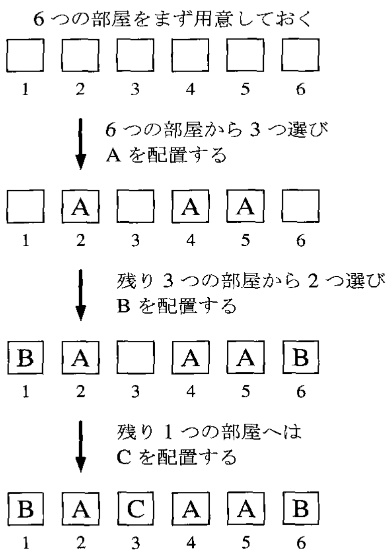
■同じものを含む順列C(n1, n2,・・・, nm) の定義

例えば，6 枚のカード A, A, A, B, B, C を1 列並べる順列の総数は次のように求めることができる．
ただし，ここでは A の3 枚や，B の2 枚の並べ方の違いは区別しないものとする．

まず，カードを並べるための“部屋”を先に 6 つ用意しておく．

3 枚のA の入れる部屋の選び方は $_6C_3$ 通りあり，その選んだ部屋にA を入れる．

そのそれぞれに対し，残りの部屋は3 部屋であるから，2 枚のB の入れる部屋の選び方は $_3C_2$ 通りあり，その選んだ部屋にB を入れる．
そのそれぞれに対し，残りの部屋は1 つであるから，最後にC を入れる．以上から，6 枚のカード A，A，A，B，B，C を1 列



に並べる順列の総数は積の法則より

$$ {}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{1}{1}=60 \quad \text{通り} $$

となる.

ここで, 数個の区別しないものを含む**n** 個の順列を定義しておこう.

同じものを含む順列 $C(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_m)$ の定義

第 i 種 $(1 \leqq i \leqq m)$ のものが n_i 個ずつ全部で $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$ 個あり，同種のものは区別しないものとするとき，これら n 個を 1 列に並べた順列のことを，**同じものを含む順列**または，**一般順列** (generalized permutation) といい，その総数を FTEXTでは $C(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_m)$ と表す.

例えば，a が 3 個，b が 2 個，c が 1 個の計 6 個の同じものを含む順列の総数は，$C(3,\ 2,\ 1)$ である.

■同じものを含む順列 $C(n_1,n_2,\cdot\cdot\cdot,n_m)$ の計算

今みた例と同じように, 一般の $C(n_1,n_2,\cdot\cdot\cdot,n_m)$ も, 以下のように考えることができる.

まず, カードを並べるための場所を先に n 個用意しておく.

n_1 個の同種のものの入れる場所の選び方は ${}_nC_{n_1}$ 通りあり, またそのそれぞれに対して n_2 個の同種のものの入れる場所の選び方は ${}_{n-n_1}C_{n_2}$ 通りあり, またそのそれぞれに対して n_3 個の同種のものの入れる場所の選び方は ${}_{n-n1-n2}C_{n_3}$ 通りあり, ・・・, またそのそれぞれに対して n_m 個の同種のものの入れる場所の選び方は ${}_{n-n_1-n_2-\dots-n_{m-1}}C_{n_m}$ 通りある.

以上から, 同じものを含む n 個の順列は, 積の法則から

$$ C(n_1,n_2,\cdots,n_m)={}_nC_{n_1}\times{}_{n-n_1}C_{n_2}\times{}_{n-n_1-n_2}C_{n_3}\times\cdots\times{}_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}C_{n_m} $$

となる.

まとめると

同じものを含む順列 $C(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_m)$ の計算

第 i 種 $(1 \leqq i \leqq m)$ のものが n_i 個ずつ全部で $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$ 個あり，同種のものは区別しないときの同じものを含む順列の総数 $C(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_m)$ は

$$ \begin{aligned} &C(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_m)\\ &={}_nC_{n_1}\times{}_{n-n_1}C_{n_2}\times{}_{n-n_1-n_2}C_{n_3}\times\cdots\times{}_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}C_{n_m} \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}\\ &=\frac{n!}{\cancel{(n-n_1)!}n_1!}\times\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{\cancel{(n-n_1-n_2)!}n_2!}\times\cdots\times\frac{\cancel{(n-n_1-n_2-n_3-\cdots-n_{m-1})!}}{0!n_m!}\\ &=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_m!} \quad \cdots\cdots\cdots \text{②} \end{aligned} $$

と計算できる.

例えば，a が 3 個，b が 2 個，c が 1 個の計 6 個の順列の総数は①を用いて

$$ C(3,\ 2,\ 1)={}_6C_3\times{}_{6-3}C_2\times{}_{6-3-2}C_1={}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=60 $$

または，②を用いて

$$ C(3,\ 2,\ 1)=\frac{6!}{3!2!1!}=60 $$

と計算できる.

上の②，$C(n_1, n_2, \cdots, n_m)=\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_m!}$ は，ただ計算の上でいえるだけでなく「n 個のものすべてを区別した $n!$ 通りの順列のうち，同種の n_1，n_2，$\cdots$，n_m 個の並び替えについては同一視するため，$n_1!\,n_2!\cdots n_m!$ 通りで一まとめにして数えたもの」と考えることもできる．

【例題：同じものを含む順列】
(1) $1,1,1,2,2,3,3$ の**7** つの数字を一列に並び替えるとき，何通りの並べ方があるか．
(2) $SUUGAKUA$ を並び替えるとき，何通りの並べ方があるか．

【解答】
(1) 1 を**3** つ，**2** を**2** つ，**3** を**2** つ含むから

$$C(3,2,2)={}_7C_3\times{}_{7-3}C_2\cdot{}_{7-3-2}C_2={}_7C_3\times{}_4C_2\times{}_2C_2=210 \text{ 通り}$$

《別解》

$$C(3,2,2)=\frac{7!}{3!\,2!\,2!}=210 \text{ 通り}$$

(2) U を**3** つ，A を**2** つ，S，G，K をそれぞれ**1** つ含むから

$$C(3,2,1,1,1)={}_8C_3\cdot{}_{8-3}C_2\cdot{}_{8-3-2}C_1\cdot{}_{8-3-2-1}C_1\cdot{}_{8-3-2-1-1}C_1={}_8C_3\times{}_5C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1=3360 \text{ 通り}$$

《別解》

$$C(3,2,1,1,1)=\frac{8!}{3!\,2!\,1!\,1!\,1!}=3360 \text{ 通り}$$

【例題：同じものを含む円順列】
(1) 文字 a，b，c をそれぞれ**1** つ，**2** つ，**3** つ，計**6** つ用いて円形に並べるとき，何通りの並べ方があるか．
(2) 文字 a，b，c をそれぞれ**2** つ，**2** つ，**2** つ，計**6** つ用いて円形に並べるとき，何通りの並べ方があるか．

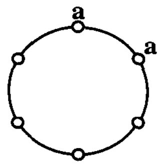
【解答】
(1) 1 つの a を固定して，その周りに**2** つの b と**3** つの c を並べていくと考えて

$$\frac{5!}{2!\,3!}=10 \text{ 通り}$$

この答えは，『円順列**cir(n)** の計算』との関係において，$\dfrac{C(1,2,3)}{6}=10$ となっていることに注意しよう

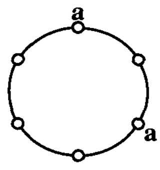
(2) 2 つの a の並べ方は次の**3** つの場合に分けられる．
i) 隣り合うタイプ
残りの**4** つの場所に b，b，c，c を並べて

$$\frac{4!}{2!\times 2!}=6 \text{ 通り}$$



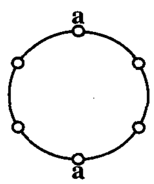
ii) 1 つ間をおくタイプ
残りの**4** つの場所に b，b，c，c を並べて

$$\frac{4!}{2!\times 2!}=6 \text{ 通り}$$



iii) 2 つ間をおくタイプ
残りの**4** つの場所に b，b，c，c を並べて

$$\frac{4!}{2!\times 2!}=6 \text{ 通り}$$

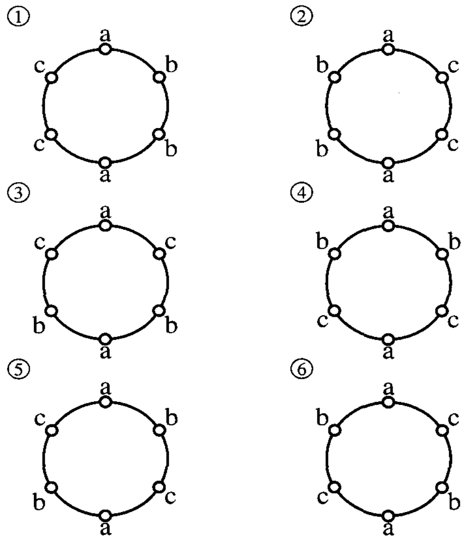


しかし、この**6**通りの内、
①と②は同じものであり，③と④ も同じものである.
よって，**4** 通りとなる.
以上**i)**，**ii)**，**iii)** より

$$6+6+4=16$$ 通り」

この答えは，『円順列**cir(n)** の計算』との関係において，

$$\frac{C(2,2,2)}{6}=15$$ となっていないことに注意しよう



3.5.3 ${}_nC_r$ の性質

組合せ ${}_nC_r$ について次の式が成り立つ.

${}_nC_r$ の性質

i) ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ （選ばれるもの・選ばれないもの）
ii) ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$ （特定のものについての場合分け）
iii) $r\,{}_nC_r = n\,{}_{n-1}C_{r-1}$ （リーダーの公式）

【暗記例題：${}_nC_r$ の性質の証明】
上の**i)**～**iii)** が成り立つことを，**(1)** 計算式を用いた方法，**(2)** 組合せの意味を考えた説明，でそれぞれ証明せよ.

【解答】
i) (1) ～計算式を用いた方法～

$$\begin{aligned}{}_nC_r&=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\\&=\frac{1}{(n-r)!}\cdot\frac{n!}{r!}\\&=\frac{1}{(n-r)!}\cdot\frac{n!}{\{n-(n-r)!\}}\\&=\frac{1}{(n-r)!}\cdot{}_nP_{n-r}\\&=\frac{{}_nP_{n-r}}{(n-r)!}={}_nC_{n-r}\end{aligned}$$

(2) ～組合せの意味を考えた説明～
異なる n 個の中から r 個選ぶ ${}_nC_r$ 通りそれぞれは，n 個のものから選ばずに残す $(n-r)$ 個のものを選ぶ ${}_nC_{n-r}$ 通りと一対一に対応する．つまり，r 個選ぶとは，選ばない $n-r$ を「選ぶ」ことと等しい．よって

$${}_nC_r={}_nC_{n-r}$$

が成り立つ.

ii) (1) ～計算式を用いた方法～

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1} &= \frac{{}_{n-1}P_r}{r!}+\frac{{}_{n-1}P_{r-1}}{(r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!\,r!}+\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!\,(r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\,r!}+\frac{(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\,(r-1)!}\left\{\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r}\right\} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\,(r-1)!}\cdot\frac{n}{r(n-r)} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \\
&= \frac{{}_nP_r}{r!} \quad = \ {}_nC_r
\end{aligned}
$$

(2) ～組合せの意味を考えた説明～

異なる n 個のものの中から r 個選ぶ方法は，次の**2** つの場合に分けることができる．

I. ある特定の**1** 個を含まないで r 個選ぶ
II. ある特定の**1** 個を含んで r 個選ぶ

この**2** つは同時に起こることはないので

$$
{}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1} \qquad \text{◀『和の法則』}
$$

が成り立つ．

iii) (1) ～計算式を用いた方法～

$$
\begin{aligned}
r\,{}_nC_r &= \frac{r\times{}_nP_r}{r!} && \text{◀ 組合せの計算} \\
&= r\times\frac{n!}{(n-r)!\,r!} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!\,(r-1)!} \\
&= n\times\frac{(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!\,(r-1)!} \\
&= n\times\frac{{}_{n-1}P_{r-1}}{(r-1)!} && \text{◀ 順列の計算} \\
&= n\,{}_{n-1}C_{r-1} && \text{◀ 組合せの計算}
\end{aligned}
$$

(2) ～組合せの意味を考えた説明～

n 人の中から r 人の班をつくり班長を決める場合の数について考える．

n 人の中から班員 r 人選び，その r 人の中からリーダーを**1** 人決める方法には ${}_nC_r\times r$ 通りある．また別の方法として， n 人の中から先にリーダーを決めておき，残りの班員 $r-1$ 人を選ぶ方法には $n\,{}_{n-1}C_{r-1}$ 通りある．よって

$$
r\,{}_nC_r=n\,{}_{n-1}C_{r-1}
$$

が成り立つ．

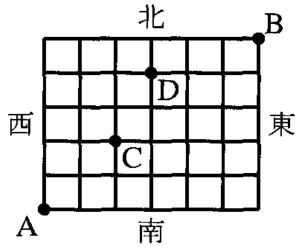
【例題:最短経路】

右図のように, 東西に走る道路と南北に走る道路があるとする.
南西の角にある A 地点から, 北東の角にある B 地点に至る
最短経路について以下の問に答えよ.

(1) 最短経路は全部で何通りあるか求めよ.

(2) C 地点を通る最短経路は何通りあるか. また, D 地点を通る最短経路は何通りあるか, それぞれ求めよ.

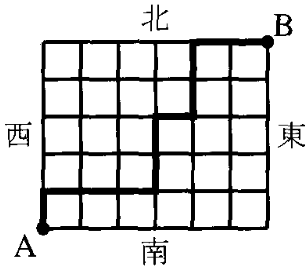
(3) C 地点または D 地点を通る最短経路は何通りあるか求めよ.



北に**1** 区画進むことを↑, 東に**1** 区画進むことを→で表すと, 例えば
右図のように進む場合には

↑→→→↑↑→↑↑→→

と表すことができる.



【解答】

(1) 北に**1** 区画進むことを↑, 東に**1** 区画進むことを→で表すと, **A** 地点から B 地点への最短経路は, **5** 個の↑と**6** 個の→

(↑↑↑↑↑→→→→→→)を一列に並べる順列の総数に等しい.

よって, 求める最短経路の数は

$$\frac{11!}{5!6!}=462\ \text{通り}$$ ◀『同じものを含む順列』

となる.

(2)(C 地点を通る最短経路)

まず, A 地点から C 地点までの最短経路の数は

$$\frac{4!}{2!2!}=6\ \text{通り}$$

であり, この**6** 通りそれぞれに対し, C 地点から B 地点までの最短経路

$$\frac{7!}{3!4!}=35\ \text{通り}$$

が決まるから, 積の法則より

$$6\times35=210\ \text{通り}$$

(D 地点を通る最短経路)

同様にして

$$\frac{7!}{4!3!}\times\frac{4!}{1!3!}=35\times4=140\ \text{通り}$$

(3) 集合 C, D をそれぞれ

C :**C** 地点を通る最短経路

D :**D** 地点を通る最短経路

とおくと, $n(C\cap D)$, つまり C, D 両地点を通る最短経路の数は

$$n(C\cap D)=\frac{4!}{2!2!}\times\frac{3!}{2!1!}\times\frac{4!}{1!3!}=6\times3\times4=72$$

であるから， $n(C\cup D)$ ，つまり求める最短経路の数は

$$\begin{aligned} n(C\cup D)&=n(C)+n(D)-n(C\cap D) \\ &= 210+140-72=278 \text{　通り}\end{aligned}$$

◀『包含と排除の原理』

3.5.4　2 項定理

■ $(a+b)^n$ を展開するということ

$(a+b)^2$ を展開すると

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

また， $(a+b)^3$ を展開すると

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

である．

ここでは，自然数 n について， $(a+b)^n$ を展開した式を組合せを使って求める方法について考えてみよう．以下では例として， $(a+b)^5$ の展開についてみていこう．

$(a+b)^5$ とは，5 つの $(a+b)$ の積

$$\underbrace{(a+b)}_{①}\underbrace{(a+b)}_{②}\underbrace{(a+b)}_{③}\underbrace{(a+b)}_{④}\underbrace{(a+b)}_{⑤}$$

のことである．この展開式は，5 つの $(a+b)$ のそれぞれから， a か b のどちらかをとって，掛け合わせたものの和になる．

■ a^4b の係数はいくつになるのか

5 つの $(a+b)$ のうち，1 つから b を選び，残りの4 つから a をとって掛け合わせると， a^4b が作られる．右の図は，1 から b をとった場合のイメージである．

$$\underbrace{(a+\boxed{b})}_{①}\underbrace{(\boxed{a}+b)}_{②}\underbrace{(\boxed{a}+b)}_{③}\underbrace{(\boxed{a}+b)}_{④}\underbrace{(\boxed{a}+b)}_{⑤}$$

ここで， a^4b が作られる場合の数は，上の1 から5 の1 ヶ所から b を選べばよいので，組合せの考えを使って ${}_5C_1$ と数えることができる．

つまり， $(a+b)^5$ の展開式における a^4b の係数は ${}_5C_1=5$ である．

■ a^3b^2 の係数はいくつになるのか

5 つの $(a+b)$ のうち，2 つから b を選び，残りの3 つから a をとって掛け合わせると， a^3b^2 が作られる．右の図は，2 と5 から b をとった場合のイメージである．

$$\underbrace{(\boxed{a}+b)}_{①}\underbrace{(a+\boxed{b})}_{②}\underbrace{(\boxed{a}+b)}_{③}\underbrace{(\boxed{a}+b)}_{④}\underbrace{(a+\boxed{b})}_{⑤}$$

ここで， a^3b^2 が作られる場合の数は，上の1 から5 の2 ヶ所から b を選べばよいので，組合せの考えを使って ${}_5C_2$ と数えることができる．

つまり， $(a+b)^5$ の展開式における a^3b^2 の係数は ${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ である．

■ $(a+b)^5$ の展開式

以上の例から， $(a+b)^5$ の展開式における各項の係数は，それぞれ次のようになるのがわかる．

a^5 の係数は5 つの $(a+b)$ のうち0 ヶ所から b を選ぶと考えて ${}_5C_0$

a^4b の係数は5 つの $(a+b)$ のうち1 ヶ所から b を選ぶと考えて ${}_5C_1$

a^3b^2 の係数は5 つの $(a+b)$ のうち2 ヶ所から b を選ぶと考えて ${}_5C_2$

a^2b^3 の係数は5つの $(a+b)$ のうち3ヶ所から b を選ぶと考えて ${}_5C_3$
ab^4 の係数は5つの $(a+b)$ のうち4ヶ所から b を選ぶと考えて ${}_5C_4$
b^5 の係数は5つの $(a+b)$ のうち5ヶ所から b を選ぶと考えて ${}_5C_5$

つまり

$$(a+b)^5={}_5C_0a^5+{}_5C_1a^4b+{}_5C_2a^3b^2+{}_5C_3a^2b^3+{}_5C_4ab^4+{}_5C_5b^5$$

となる.

■ $(a+b)^n$ **の展開式(2 項定理)**

一般に, $(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-r}b^r$ の係数は, n 個の $(a+b)$ のうち, r 個から b を, 残りの $n-r$ 個から a を取り出す方法の総数 ${}_nC_r$ となる.

このことから, 次の式(**2 項定理(binomial theorem)**)が成り立つことがわかる.

2 項定理

2 項定理

n を自然数とするとき, $(a+b)^n$ は

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n$$

と展開できる.

2 項定理の係数になるという意味で, 組合せの総数 ${}_nC_r$ のことを**2 項係数(binomial coefficient)** ともいう.

例えば, $(a+2b)^4$ は2 項定理を用いて

$$\begin{aligned}(a+2b)^4&={}_4C_0a^4+{}_4C_1a^3(2b)+{}_4C_2a^2(2b)^2+{}_4C_3a(2b)^3+{}_4C_4(2b)^4\\&=a^4+4a^3(2b)+6a^2(2b)^2+4a(2b)^3+(2b)^4\\&=a^4+8a^3b+24a^2b^2+32ab^3+16b^4\end{aligned}$$

と展開できる.

【例題:展開された式の係数】

次の展開式において, [ ] 内で指定された項の係数を求めよ.

(1) $(2x+1)^6$ [x^2]　　(2) $(2x-3y)^5$ [x^3y^2]

(3) $\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^7$ [$\dfrac{1}{x}$]　　(4) $\left(x-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{12}$ [定数項]

【解答】

(1) $(2x+1)^6$ を展開したとき, x^2 を含む項は

$${}_6C_4(2x)^21^4$$

となる. よって, x^2 の係数は

$${}_6C_4\cdot 2^2=60$$

(2) $(2x-3y)^5$ を展開したとき，x^3y^2 を含む項は

$${}_5C_2(2x)^3(-3y)^2$$

となる．よって，x^3y^2 の係数は

$${}_5C_2\cdot 2^3\cdot(-3y)^2=720$$

(3) $(a+b)^7$ の展開において，$a=x^2$ ，$b=-\dfrac{1}{2x}$ としたものが

$$\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^7$$

である．a^2b^5 を計算すると $\dfrac{1}{x}$ の項ができるので，このときの係数を求める．

$$\begin{aligned}{}_7C_5a^2b^5&={}_7C_5(x^2)^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^5\\&={}_7C_5\left(-\frac{1}{2}\right)^5\frac{1}{x}\\&=-\frac{21}{32}\cdot\frac{1}{x}\end{aligned}$$

よって，求める係数は $-\dfrac{21}{32}$ である．

(4) $(a+b)^{12}$ の展開において，$a=x$ ，$b=-\dfrac{1}{2x^2}$ としたものが

$\left(x-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{12}$ である．a^8b^4 を計算すると定数項ができるので，このときの係数を求める．

$$\begin{aligned}{}_{12}C_4a^8b^4&={}_{12}C_4x^8\left(-\frac{1}{2x^2}\right)^4\\&={}_{12}C_4\left(-\frac{1}{2}\right)^4\\&=\frac{495}{16}\end{aligned}$$

よって，求める係数は $\dfrac{495}{16}$ である．

【例題:2 項定理の応用】
次の展開式において，[ ] 内で指定された項の係数を求めよ．
(1) $(2x+y-z)^8$ [$x^2y^3z^3$]　　**(2)** $(x-2y-z)^5$ [x^2yz^2]

【解答】
(1) $(2x+y-z)^8=\{2x+(y-z)\}^8$ として考える．これを展開したとき，x^2 の項は

$${}_8C_6(2x)^2(y-z)^6$$

として計算される．

さらに $(y-z)^6$ を展開したとき, y^3 の項は

$$ {}_6C_3y^3(-x)^3 $$

として計算される.
よって, $(2x+y-z)^8$ を展開したときの $x^2y^3z^3$ の係数は

$$ {}_8C_6\cdot 2^2\cdot {}_6C_3\cdot(-1)^3=-4\cdot {}_8C_2\cdot {}_6C_3=-2240 $$

《別解》 多項定理による係数の計算方法
$(a+b+c)^n$ を展開した時、 $a^pb^qc^r$ ($n=p+q+r$)の係数は
$\dfrac{n!}{p!q!R!}\cdot a^pb^qc^r$ である。

この定理を使用すれば、

$$ \frac{8!}{2!3!3!}\cdot(2x)^2(y)^3(-z)^3=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{2!3!}\cdot4x^2y^3(-1)z^3=-2240x^2y^3z^3 $$

と計算できる。 2項の場合も同様に計算できるので、高次式を展開した時の係数計算は多項定理を利用した方がよい。

(2) $(x-2y-z)^5=x+(-2y-z)^5$ として考える. これを展開したとき, x^2 の項は
$$ {}_5C_3x^2(-2y-z)^3 $$
として計算される.
さらに $(-2y-z)^3$ を展開したとき, y の項は
$$ {}_3C_2(-2y)(-z)^2 $$
として計算される.
よって, $(x-2y-z)^8$ を展開したときの x^2yz^2 の係数は
$$ {}_5C_3\cdot {}_3C_2\cdot(-2)\cdot(-1)^2=-2\cdot {}_5C_3\cdot {}_3C_2=-60 $$

《別解》多項定理による解法
$(2x+y-z)^8$ [$x^2y^3z^3$] $5=2+1+2$ より、
$$ \frac{5!}{2!1!2!}\cdot(x)^2(-2y)^1(-z)^2=\frac{5\cdot4\cdot3}{2}\cdot(-2)^1(-1)^2x^2yz^2=-60x^2yz^2 $$
よって係数は、 -60

【例題:2 項係数の和】
2 項定理を用いて次の等式を証明せよ.
(1) $2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n$
(2) $0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^{n-1}{}_nC_{n-1}+(-1)^n{}_nC_n$
(3) $(-1)^n={}_nC_0-2{}_nC_1+2^2{}_nC_2-\cdots+(-2)^{n-1}{}_nC_{n-1}+(-2)^n{}_nC_n$

【解答】
2 項定理
$$ (a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n $$
において
(1) $a=b=1$ とおくと
$$ 2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n $$
となり, 確かに成立する.

(2) $a=1, \ b=-1$ とおくと

$$0^n={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^{n-1}{}_nC_{n-1}+(-1)^n{}_nC_n$$

となり，確かに成立する．

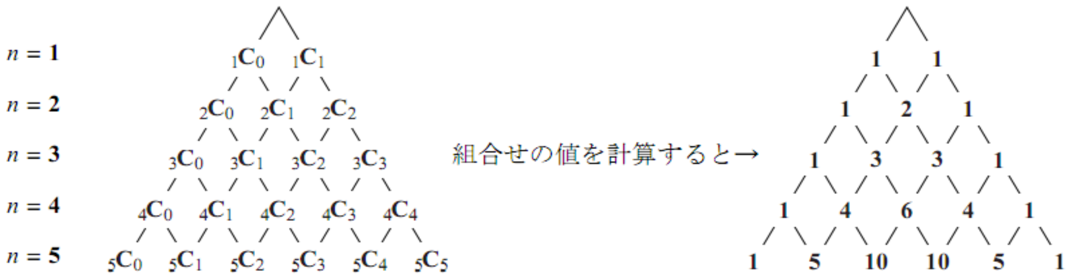
(3) $a=1, \ b=-2$ とおくと

$$(-1)^n={}_nC_0-2\,{}_nC_1+2^2{}_nC_2-\cdots+(-2)^{n-1}{}_nC_{n-1}+(-2)^n{}_nC_n$$

となり，確かに成立する．

■パスカルの三角形

下図のように，2 項係数 ${}_nC_0$，${}_nC_1$，${}_nC_2$，$\cdots$，${}_nC_n$ の値を，上から順に $n=1,2,3,\cdots$ の場合について三角形の形に並べたものを，**パスカルの三角形(Pascal's triangle)** という．



パスカルの三角形には，次のような特徴がある．

i) ${}_nC_0={}_nC_n=1$ であるから，各行の左右両端の数字は**1** である．

ii) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ であるから，各行は左右対称である．

iii) ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ であるから，左右両端以外の数字は，その}左上の数と右上の数を足したものとなる．

【例題：パスカルの三角形】

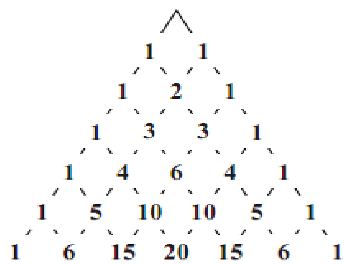
パスカルの三角形を利用して，次の展開式を求めよ．

(1) $(x+y)^6$ 　　**(2)** $(x-2y)^5$

【解答】

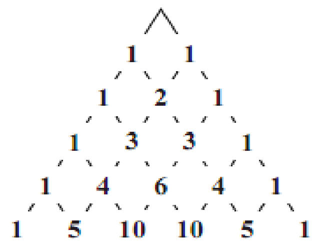
(1) パスカルの三角形を $n=6$ の場合まで書くと，右図のようになるので

$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$



(2) パスカルの三角形を $n=5$ の場合まで書くと，右図のようになるので

$$\begin{aligned}(x-2y)^5&=x^5+5x^4(-2y)+10x^3(-2y)^2+10x^2(-2y)^3\\&\quad+5x(-2y)^4+(-2y)^5\\&=x^5-10x^4y+40x^3y^2-80x^2y^3+80xy^4-32y^5\end{aligned}$$



§ 3.6 重複組合せ

順列で順序を考慮しなければ組合せになるように，重複順列で順序を考慮しなければ重複組合せになる．
ここでは，この重複組合せの計算についてみていこう．

ボール・箱	単射	写像全て	全射
あり・あり	順列	重複順列	部屋割り
なし・あり	組合せ	重複組合せ	資源配分
あり・なし		重複組合せ	部屋割（区別なし）
なし・あり		（右枠の和）	資源配分（区別なし）

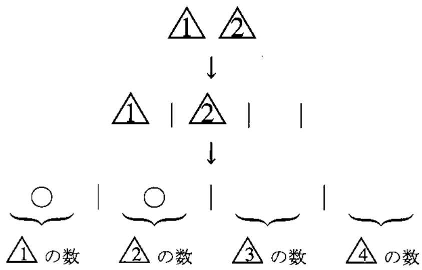
3.6.1 重複組合せ

■重複組合せnHr の定義

△1，△2，△3，△4 の目が描いてある正四面体のさいころを**2** 回振って，
出た目の組（順番は考えない）をすべて書き出すと

{ △1 , △1 }, { △1 , △2 }, { △1 , △3 }, { △1 , △4 }, { △2 , △2 },
{ △2 , △3 }, { △2 , △4 }, { △3 , △3 }, { △3 , △4 }, { △4 , △4 }

の**10** 通りとなる．これは，『同じものを含む順列』の考え方を利用し，次のように計算することができる．
まず，各組は △1，△2，△3，△4 の順に並べて表すことにする．例えば △1 を**1** 個，△2 を**1** 個使って作られる組は △1△2 この組に対して，さいころの目を表す**2** 個の○と，異なる**4** 文字の“しきり”を表す **(4−1)=3** 個の｜からなる順列を，右図のように対応させる．



つまり，**3** つの“しきり”｜で**4** つの場所ができるので，その場所にある○の個数が，それぞれさいころの △1，△2，△3，△4 の個数を表すものとするのである．
例えば，上の**10** 組のうちの，{ △1 , △1 }や { △1 , △3 }や { △2 , △4 } などは，○と｜の順列で右図のように表すことができる．

△1 △1 → ○○|||
△1 △3 → ○||○|
△2 △4 → |○||○

こうすると，結局，区別しない**2** 個の○と区別しない**3** 個の｜の計**5** 個のものを並べたときの順列を計算すればよいから，『同じものを含む順列』より

$$C(2,3)=\frac{5!}{2!3!}=10 \quad \text{通り}$$

と数えることができる．
ここで， n 個のものから，繰り返し用いることを許して， r 個とって作る組について定義しておこう．

重複組合せ $_n\mathrm{H}_r$ の定義

「区別する n 個のものから，繰り返し用いることを許して，r 個取り出して作った組」のことを ***n*-*r* 重複組合せ**（ちょうふく）(combination with repetitions) といい，その組の総数を $_n\mathrm{H}_r$ と表す．

この例では

$$_4H_2=C(2,3)=\frac{5!}{2!3!}=10$$

である．

■重複組合せnHr の計算

区別する n 個のものから, 繰り返し用いることを許して, r 個取り出して作る組の総数 ${}_nH_r$ も, 先程の例と同じように考えることができる.

まず, 右図のように, r 個の○と, (n 個の入る場所 r を作るための) $n-1$ 個の "しきり" | を並べる. こうしておいてから, 区別しない r 個の○と区別しない $n-1$ 個の | の計 $r+n-1$ 個のものを並べたときの『同じものを含む順列』を計算すればよいので

$$\overbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}^{r\text{ 個}}\quad\overbrace{|\ |\ \cdots\ |}^{n-1\text{ 個}}$$

$${}_nH_r = C(r, n-1) = {}_{r+n-1}C_r$$

となる. 普通 ${}_nH_r$ を計算するには, このように○と | の並べ方を考えて ${}_{r+n-1}C_r$ に帰着してから計算するとよい.
さて, ここでさらに ${}_{r+n-1}C_r$ の計算をすすめてみると

$$\begin{aligned}{}_{r+n-1}C_r &= \frac{(r+n-1)!}{(n-1)!\,r!}\\ &= \frac{(r+n-1)(r+n-2)\cdots n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot r!}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-2)(n+r-1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1}\end{aligned}$$

つまり

$${}_nH_r = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-2)(n+r-1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1}$$

と計算することもできる. この式は, ${}_nC_r$ と比較すると覚えやすい. 例えば

$${}_6C_3 = \frac{\overset{\text{下がっていく}}{\overrightarrow{6\cdot 5\cdot 4}}}{3\cdot 2\cdot 1},\quad {}_6H_3 = \frac{\overset{\text{上がっていく}}{\overrightarrow{6\cdot 7\cdot 8}}}{3\cdot 2\cdot 1}$$

である.
以上, まとめると

重複組合せ ${}_n\mathrm{H}_r$ の計算

区別する n 個のものから, 繰り返し用いることを許して, r 個取り出して作る組の総数 ${}_n\mathrm{H}_r$ は, 同じものを含む順列の考え方で計算でき

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{H}_r &= \mathrm{C}(r,\ n-1) = {}_{r+n-1}\mathrm{C}_r\\ &= \frac{\overbrace{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-2)(n+r-1)}^{r\text{ 個の積}}}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1}\end{aligned}$$

となる.

【例題:重複組合せの計算練習】

次の値を求めよ.

(1) ${}_7H_2$　**(2)** ${}_4H_3$　**(3)** ${}_5H_3$　**(4)** ${}_3H_5$

【解答】

(1) $_7H_2={}_{7+2-1}C_2=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$ ← $_7H_2=\dfrac{7\cdot8}{2\cdot1}=28$ と計算してもよい。

(2) $_4H_3={}_{4+3-1}C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ ← $_4H_3=\dfrac{4\cdot5\cdot6}{3\cdot2\cdot1}$ と計算してもよい。

(3) $_5H_3={}_{5+3-1}C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ ← $_5H_3=\dfrac{5\cdot6\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=35$ と計算してもよい。

(4) $_3H_5={}_{3+5-1}C_5=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=21$ ← $_3H_5=\dfrac{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=21$ と計算してもよい

■ボールと箱のモデル

例えば，**5H3** の定義は

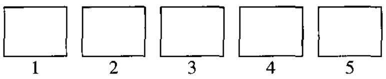
「区別する**5** 個のものから，繰り返し用いることを許して，**3** 個とりだしてつくる組の総数」

であったが，これはボールと箱のモデルを使って

「区別しない**3** 個のボールを，区別する**5** 個の箱に配る**(**何個でもよい**)** 場合の総数」

といいかえることができる．それには，次のように考えるとよい．

準備として，ボールは区別しないので，それを、○,○,○　とし，箱は区別するので番号をつけ，それを



としておく．

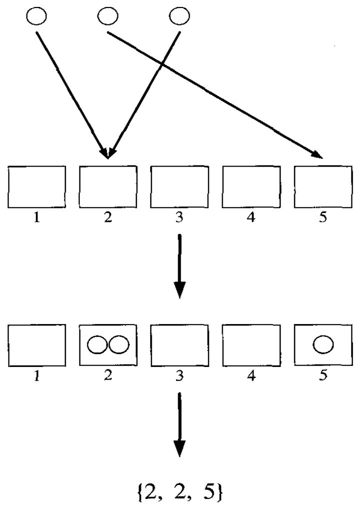
例えば，区別しない**3** 個のボールを，区別する**5** 個の箱に，右図のように配ったとする．

このときは，**5-3** 重複組合せのうちの{ **2,2,5** } と対応すると考えることができる．

また逆に，**5-3** 重複組合せのうちの{ **2,2,5** } は，右図のようなボールの配り方に対応すると考えることができる．

これ以外の**5-3** 重複組合せも，ボールの箱への配り方と**1** 対**1** に対応するので，結局，ボールの箱への配り方の総数は $_5H_3$ と一致するといえる．

一般に，次のようにまとめることができる．



重複組合せ $_nH_r$ のボールと箱のモデル

> 重複組合せ $_nH_r$ はボールと箱のモデルを用いて
>
> 「区別しない r 個のボールを，区別する n 個の箱に配る（何個でもよい）場合の総数」
>
> と考えることができる．

ただし，この考え方ではうまく計算できないので，実際に計算するときには『重複組合せの計算』でみたように，“○と｜の並べ方”の問題へ帰着することになる．

【例題:重複組合せ】
(1) **3** 種類の果物, りんご, かき, なしを使って, **7** 個入りの果物かごを作る. **1** つも入らない種類があってもよいとすると, 何通りの果物かごができるか求めよ.
(2) **(1)** で, **3** 種類の果物を最低**1** 個は入れるものとすると, 何通りの果物かごができるか求めよ.

【解答】
(1)【解**1**:重複組合せで考える】
区別する**3** 種類のものを, 重複を許して**7** つ取り出し組を作ればよいので

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7=36 \quad \text{通り} \qquad \leftarrow \qquad {}_3H_7=\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}=36 \quad \text{と計算してもよい}$$

【解**2**:同じものを含む順列に帰着させる】
7 個のものを ○ を使って

○○○○○○○ ・・・**7**個

と表すことにする.
これらを**2** つの“しきり”| によって, **3** つの区間に分け, 左から順にりんご, かき, なしと対応させる.
こうすると, 例えば

○ | ○○ | ○○○○

は, りんご**1** 個, かき**2** 個, なし**4** 個を表し

○○○|○○○○|

は, りんご**3** 個, かき**0** 個, なし**4** 個を表す. **7** 個の と**2** 個の| の計**9** 個のものを**1** 列に並べる並べ方の数が, 考える果物かごの数である.
よって

$$C(7,2)={}_{7+2}C_2=36 \quad \text{通り}$$

(2)【解**1**:重複組合せで考える】
まず, りんご, かき, なしから1つずづ計**3** 個取り出しておく. 残りの**4** つについて, 重複を許して組を作ればよいので

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4=15 \quad \text{通り} \qquad \leftarrow \qquad {}_3H_4=\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \quad \text{と計算してもよい}$$

【解**2**:『資源配分』に帰着させる】
(1) と同様に, **7** 個のものを○を使って

◀『資源配分』を参照のこと

○○○○○○○ ・・・**7**個

と表すことにする.
りんご, かき, なしそれぞれから, 最低**1** 個はとりだすので, 今度は**2** つの“しきり”| を**6** ヶ所ある○の“すきま”にいれ, **3** つの区間に分け, 左から順にりんご, かき, なしと対応させる.
こうすると, 例えば

○|○○|○○○○

は, りんご**1** 個, かき**2** 個, なし**4** 個を表し

○○○○|○|○○

は, りんご**4** 個, かき**1** 個, なし**2** 個を表す.
7 個の によって作られる, **6** ヶ所の“すきま”から**2** 個の| の入る場所を選ぶ選び方の数が, 考える果物かごの数である. よって

$${}_6C_2=15 \quad \text{通り}$$

§ 3.7　資源配分

5 本の鉛筆（区別しない）を3 人の人に配る場合（鉛筆をもらわない人はいないとする），配り方には何通りの方法があるだろうか．

このような問題は，鉛筆を区別しないボール，人を区別する箱として，ボールと箱のモデルで考えることができる．

ボール・箱	単射	写像全て	全射
あり・あり	順列	重複順列	部屋割り
なし・あり	組合せ	重複組合せ	資源配分
あり・なし		（右枠の和）	部屋割（区別なし）
なし・あり		（右枠の和）	資源配分（区別なし）

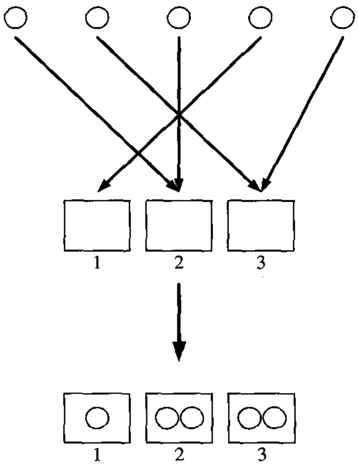
3.7.1　資源配分の数

■ボールと箱のモデル

では，このボールと箱のモデルを使って

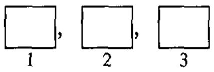
「区別しない**5** 個のボールを，区別する**3** 個の箱に最低**1** 個は配る場合の総数」

を求めてみよう．

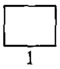
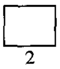
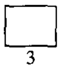


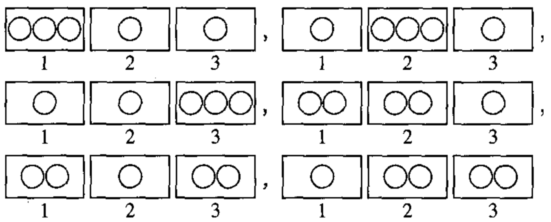
準備として，ボールは区別しないので，それを

○，○，○，○，○ とし，箱は区別するので番号をつけ，それを



としておく．

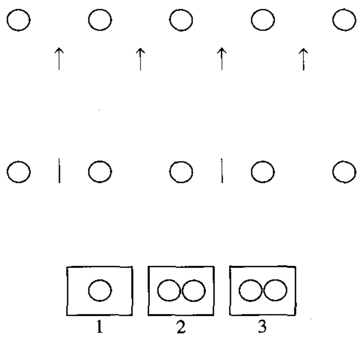
右の図は  に 1 個， に 2 個， に2個のボールを配った場合を表したものである．このような，ボールの配り方をすべて書き出すと



の**6** 通りの場合があるのがわかる．

これを，計算で求めるには次のように考えるとよい．

まず，区別しない**5** 個のボールを並べて，ボールの間にある**4** つの“すきま”について考える．



この**4** つの“すきま”から**2** つ選んで，その**2** ヶ所に“しきり”｜を入れ，**5** 個のボールを**3** つの部分に分ける．

こうしておいてから，この**3** つの部分の左，真中，右にあるボールの個数をそれぞれ**3** つの箱，に入れるボールの個数に対応させる．

このように考えると，結局

「区別しない**5** 個のボールを，区別する**3** 個の箱に最低**1** 個は配る場合の総数」

は，**4** つの“すきま”から**2** つの“すきま”の選び方の総数となり，組合せで計算することができる．つまり，

$${}_4C_2=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6$$ 通りと計算できる．

資源配分の数 resource(n, r) の定義

「区別しない n 個のボールを，区別する r 個の箱に最低 1 個は配る場合の数」を，FTEXTでは **resource(n, r)** と表す．

この例では　$resource(5,3)={}_4C_2=6$

である．

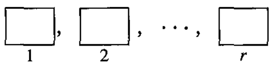
■資源配分の数resource(n, r) の計算

区別しない　n　個のボールを，区別する　r　個の箱に最低**1** 個は配る場合の総数 **resource(n, r)** も，先程の例と同じように考えることができる．

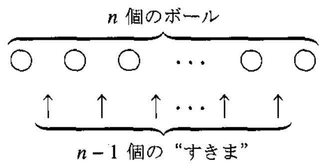
まず，区別しない　n　個のボールを並べて，ボールの間にある　$n-1$　個の“すきま”について考える．

この　$n-1$　個の“すきま”から　$r-1$　個選んで，その　$r-1$　ヶ所に“しきり” | を入れ，　n　個のボールを　r　個の部分に分ける．

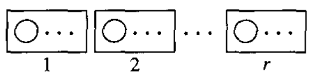
こうしておいてから，この　r　個の部分を左から順に，　r　個の箱，



に入れるボールの個数に対応させる．



$n-1$ 個の “すきま” から選んだ $r-1$ 個の場所に “しきり” を入れることにより，下の図のようになる



このように考えると，結局

「区別しない　n　個のボールを，区別する　r　個の箱に最低**1** 個は配る場合の数」は，　$n-1$　個の“すきま”から　$r-1$　個の“すきま”の選び方の総数となり，組合せで計算することができ

$$resource(n\,,r)={}_{n-1}C_{r-1}$$

となる．

まとめておこう．

資源配分の数 resource(n, r) の計算

資源配分の数 resource(n, r) は

resource(n, r) $= {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

と計算できる．

【例題：資源配分の計算練習】

次の値を求めよ．

(1)　$resource(5,2)$　　**(2)**　$resource(7,6)$

(3)　$resource(10,4)$　　**(4)**　$resource(20,18)$

【解答】

(1) $resource(5,2)={}_4C_1=4$

(2) $resource(7,6)={}_6C_5={}_6C_1=6$

(3) $resource(10,4)={}_9C_3=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=84$

(4) $resource(20,18)={}_{19}C_{17}={}_{19}C_2=\dfrac{19\cdot 18}{2\cdot 1}=171$

【例題:資源配分～その1～】

8 個の区別しないアメを**3** 人の子供に分けるとき，次の問に答えよ.

(1) 子供は皆最低**1** 個はアメをもらう場合，何通り分け方があるか.

(2) 1 個もアメをもらえない子供がいてもよい場合，何通りの分け方があるか.

【解答】

(1) 8 個のアメを**8** 個の白丸

○○○○○○○○

であらわし，これによってできる**7** ヶ所の“すきま”から**2** ヶ所選んで“しきり”を入れ，**3** つの部分に分け，左にある○の数を**1** 番目の子供に与えるアメの数，中央にある○の数を**2** 番目の子供に与えるアメの数，右にある○の数を**3** 番目の子供に与えるアメの数とすればよい．よって

$$resource(8,3)={}_7C_2=\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}=21$$ 通り

(2) (こちらは重複組合わせになる)　◂『重複組合せ $_nH_r$ のボールと箱のモデル』参照

$${}_3H_8=45$$ 通り

【例題:資源配分～その2～】

(1) $x+y+z+w=15$ を満たす自然数の組(x,y,z,w) の数を求めよ.

(2) $x+y+z+w=15$ を満たす**0** 以上の整数の組(x,y,z,w) の数を求めよ.

【解答】

(1) 15 という数を**15** 個の白丸

○○○○○○○○○○○○○○○

であらわし，これによってできる**14** ヶ所の“すきま”から**3** ヶ所選んで“しきり”を入れ，**4** つの部分に分け，一番左にある○の数を x の値，左から**2** 番目にある○の数を y の値，右から**2** 番目にある○の数を z の値，一番右にある○の数を w の値とすればよい.

よって,

$$resource(15,4)={}_{14}C_3=\frac{14\cdot 13\cdot 12}{3\cdot 2\cdot 1}=364$$ 通り

◂ 例えば

○｜○○○○｜○○○

では，アメを子供にそれぞれ 1 個，4 個，3 個与えることに対応する

(2) (こちらは重複組合せになる)　◂『重複組合せ $_nH_r$ のボールと箱のモデル』参照

$${}_4H_{15}={}_{4+15-1}C_{15}={}_{18}C_3=816$$ 通り

【例題:資源配分と重複組合せ】[3]
$\boldsymbol{resource(n,r)}$ と $_{r}H_{n-r}$ は等しいことを説明せよ.

【解答】
$\boldsymbol{resource(n,r)}$ の定義は,

◀『資源配分の数』

「区別しない n 個のボールを, 区別する r 個の箱に
最低1 個は配る場合の数」である.

また, $_{r}H_{n-r}$ はボールと箱のモデルでは,

◀『重複組合せ $_{n}H_{r}$ のボールと箱のモデル』

「区別しないの $n-r$ 個のボールを, 区別する r 個の箱に
配る(何個でもよい)場合の数」である.

$\boldsymbol{resource(n,r)}$ について考える. この「最低1 個は配る」
について, はじめに r 個の箱に1 個ずつボールを配っておき,
その後残った $n-r$ 個のボールを r 個の箱に配る
(何個でもよい)と考えてもよく, これは, $_{r}H_{n-r}$ と一致する.

§ 3.8　部屋割り（部屋に区別が無い場合）

『部屋割り』では，ボールと箱のモデルで

「区別する**n** 個のボールを，区別する**r** 個の箱に最低**1** 個は配る場合の数」

を扱った.『部屋割り』の問題において，部屋の作りが同じなどという理由で，部屋を区別する必要がない場合も考えられる.

ここでは，部屋を区別しない場合の部屋割り，すなわち箱を区別しない場合のボールの配分について考えてみよう.

ボール・箱	単射	写像全て	全射
あり・あり	順列	重複順列	部屋割り
なし・あり	組合せ	重複組合せ	資源配分
あり・なし		（右枠の和）	部屋割 (区別なし)
なし・あり		（右枠の和）	資源配分（区別なし）

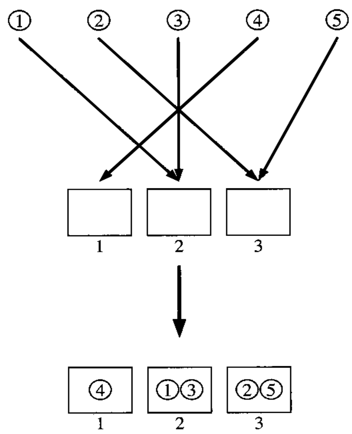
3.8.1　部屋割（部屋に区別がない場合）の数

■ボールと箱のモデル

ボールと箱のモデルを使って

「区別する**5**個のボールを、区別しない**3**個の箱に最低**1**個は配る場合の数」

を求めてみよう。



箱に区別はないが数を数えやすくするため，とりあえず区別して考えていく. つまり，箱に区別のある普通の『部屋割り』に一度戻して考えていく.

ボールは区別するので番号をつけ，それを① , ② , ③ , ④ , ⑤ とし，箱もとりあえず区別するので番号をつけ，

それを $\boxed{}_1\ \boxed{}_2\ \boxed{}_3$ としておく.

集合 A，B，C，U をそれぞれ

A: $\boxed{1}$ が空になる　**B**: $\boxed{2}$ が空になる　**C**: $\boxed{3}$ が空になる

U:ボールを適当に箱にしまう場合（空・重複有り）

とおくと，部屋割りの数は $n(U)-n(A\cup B\cup C)$ である.

$n(U)=3^5$　←重複順列 ${}_3\Pi_5$

$n(A)=n(B)=n(C)=2^5$　←**1** つ以上の部屋が空になる場合

$n(A\cap B)=n(B\cap C)=n(C\cap A)=1$　←**2** つ（以上）の箱が空になる場合

$n(A\cap B\cap C)=0$　←全部の箱がからになる場合

であるから，『包含と排除の原理』を使って

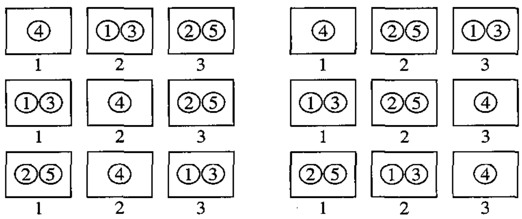
$$
\begin{aligned}
& n(U)-n(A\cup B\cup C)\\
=\ & n(U)-\{n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\}\\
=\ & n(U)-n(A)-n(B)-n(C)+n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-n(A\cap B\cap C)\\
=\ & 3^5-3\cdot 2^5+3-0\\
=\ & 150 \text{　通り}
\end{aligned}
$$

となる.

以上までが，普通の部屋割りと同じ話であった．部屋に区別がない場合には，以下の点が違う．

今求めた**150** 通りは，部屋に区別がある場合の部屋割りの数であるから，部屋に区別が無いときには，部屋を区別することによって生じる $3!$ 通りものを**1** 束にして数える必要がある．

例えば，右図の $3!$ 通りのものは，部屋を区別しない立場では同一視しなければならない．



ここで，「区別する n 個のボールを，区別しない r 個の箱に最低**1** 個は配る場合の数」を定義しておこう．

部屋割り（部屋の区別が無い場合）の数 ${}_n\mathrm{S}_r$ の定義

「区別する n 個のボールを，区別しない r 個の箱に最低 1 個は配る場合の数」を，${}_n\mathrm{S}_r$ と表す[a]．

[a] S はイギリスの数学者スターリング (Stirling) の頭文字に由来する．${}_n\mathrm{S}_r$ は第 2 種スターリング数 (Stirling number of the second kind) と呼ばれている．

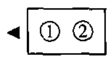
この例では，${}_5S_3=\dfrac{150}{3!}=25$ である．

【例題：nSr の計算練習】

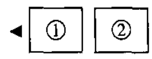
(1) ${}_2S_1$ **(2)** ${}_2S_2$ **(3)** ${}_3S_1$ **(4)** ${}_3S_2$

【解答】

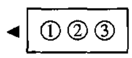
(1) ${}_2S_1$ は「区別する**2** 個のボールを，区別しない**1** 個の箱に最低**1** 個は配る場合の数」である．これは，**2**個のボールを**1** つの箱にしまう**1** 通り．



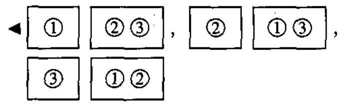
(2) ${}_2S_2$ は「区別する**2** 個のボールを，区別しない**2** 個の箱に最低**1** 個は配る場合の数」である．これは，**2**個のボールを **2** つの箱に**1** つずつしまう**1** 通り．



(3) ${}_3S_1$ は「区別する**3** 個のボールを，区別しない**1** 個の箱に最低**1** 個は配る場合の数」である．これは，**3**個のボールを **1** つの箱にしまう**1** 通り．



(4) ${}_3S_2$ は「区別する**3** 個のボールを，区別しない**2** 個の箱に最低**1** 個は配る場合の数」である．ボールを配るとき，ボールが**1** 個の箱と**2** 個の箱ができるが，どのボールが**1** 個で箱に入るのかを考え，${}_3C_1=3$ 通り．



【例題：部屋割り（部屋に区別が無い場合）】

9 人の人が，区別しない**3** つの部屋に泊まる場合について考える．どの部屋にも最低**1** 人は泊まるものとすると，泊まり方には何通りの方法があるか．

まず，部屋を区別してから考える．求めるものは ${}_9S_3$ である．

【解答】

まず, 3 つの部屋を区別して考えていくため, 部屋に a, b, c と名前を付ける. 空の部屋があってもよいとした場合, 各部屋への人の泊まり方は, 各人に対して部屋の選び方が3 通りずつあるので, 3^9 通り.

このうち, 1 部屋以上の部屋が空部屋になるのは

$${}_3C_1 \cdot 2^9 \quad \text{通り}$$

2 部屋が空部屋になるのは

$${}_3C_2 \cdot 1^9 \quad \text{通り}$$

よって, 空部屋が無いような人の泊まり方は

$$\begin{aligned} &3^9 - \left({}_3C_1 \cdot 2^9 - {}_3C_2 \cdot 1^9\right) \\ =\ &3^9 - 3\times 2^9 + 3 \quad \text{通り} \end{aligned}$$

本来部屋は区別しないので, $3!$ で割って

$$\frac{3^9 - 3\times 2^9 + 3}{3!} = 3025 \quad \text{通り}$$

■★ nSr の計算

部屋を区別しない場合の, 一般の部屋割りの数は ${}_nS_r$ で表される. いま, 部屋を区別する場合の『部屋割りの数』において $room(n, r)$ の部屋の区別を無くして数えたものが ${}_nS_r$ であるから, 部屋の区別によって生じる $r!$ 通りを1 束として考えて

$${}_nS_r = \frac{room(n, r)}{r!} \quad \text{と表される.}$$

第 2 種スターリング数 ${}_nS_r$ の計算

第 2 種スターリング数 ${}_nS_r$ は

$${}_nS_r = \frac{\mathrm{room}(n,\ r)}{r!} = \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k (r-k)^n}{(r-k)!k!}$$

と計算できる.

この計算式は理論的にはこう表せるということを示したものであり, 記憶する必要は全くない.

■第2 種スターリング数の性質

【例題:nSr の性質を利用した計算】

(1) 2 以上の整数 n, r において

$${}_nS_r = {}_{n-1}S_{r-1} + r \times {}_{n-1}S_r$$

が成り立つことを, ${}_nS_r$ の(計算ではなく)意味を考えることによって示せ.

(2) (1) を利用して, ${}_5S_3$ を求めよ.

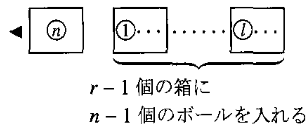
【解答】

(1) ${}_nS_r$ すなわち「区別する n 個のボールを，区別しない r 個の箱に最低**1** 個は配る場合の数」は，次の**2** つの場合に分けることができる．

I) 特定のボールが**1** つだけで入る箱がある

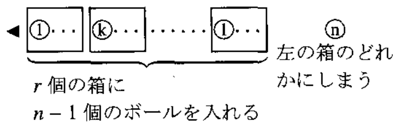
II) 特定のボールが**1** つだけで入る箱がない

I) については，まず特定のボールを**1** つの箱に入れておいて，残り $n-1$ 個のボールを残りの $r-1$ 個の箱にしまえばよいから



$${}_{n-1}S_{r-1} \text{ 通り}$$

II) については，まず特定のボール以外の $n-1$ 個のボールを r 個の箱にしまっておいて，最後に特定のボールをすでに他のボールが入っている r 個の箱のどれかにしまえばよいから



$${}_{n-1}S_r \times r \text{ 通り}$$

よって

$${}_nS_r = {}_{n-1}S_{r-1} + r \times {}_{n-1}S_r$$

が成り立つ．

(2)

$$\begin{aligned}
&{}_5S_3 = {}_4S_2 + 3\cdot{}_4S_3 \\
=\ &({}_3S_1 + 2\cdot{}_3S_2) + 3({}_3S_2 + 3\cdot{}_3S_3) \\
=\ &{}_3S_1 + 9\cdot{}_3S_3 + 5\cdot{}_3S_2 \\
=\ &{}_3S_1 + 9\cdot{}_3S_3 + 5({}_2S_1 + 2\cdot{}_2S_2) \\
=\ &1 + 9 + 5(1 + 2\cdot 1) = 25
\end{aligned}$$

■部屋割り（部屋に区別が無い場合）の和

【例題：部屋割り（部屋に区別が無い場合）の和】

p.75 の例題において，空の部屋があってもよいとすると，何通りの方法があるか求めよ．

【解答】

p.75 の解答より，空部屋が無いような人の泊まり方は **3025** 通り ◀ ${}_9S_3$ だった．

2 部屋が空になるのは，部屋を区別した場合には**3** 通りあるが，部屋の区別をなくすには**3** で割ればよいので

$$\frac{3}{3} = 1 \text{ 通り}$$

1 部屋が空になるのは，部屋を区別した場合には ${}_3C_1(2^9-2)$ 通りあるが，部屋の区別をなくすには **3!** で割ればよいので

$$\frac{{}_3C_1(2^9-2)}{3!} = 255 \text{ 通り}$$

よって

$$\mathbf{1+255+3025=3281}\quad 通り \qquad ◀\ {}_9S_1+{}_9S_2+{}_9S_3$$

この例題からわかるように，空の部屋（箱）があってもよい場合の人（ボール）の分け方（配り方）は，${}_nS_r$ の和となる．ボールと箱のモデルでまとめると，次のようになる．

部屋割り（部屋に区別が無い場合）の和

「区別する n 個のボールを，区別しない r 個の箱に配る（何個でもよい）場合の数」は，${}_n\mathrm{S}_1+{}_n\mathrm{S}_2+\cdots+{}_n\mathrm{S}_r$ と表すことができる．

ボールと箱のモデルでの体系では以下の位置を占めている．

ボール・箱	単射	写像全て	全射
あり・あり	順列	重複順列	部屋割り
なし・あり	組合せ	重複組合せ	資源配分
あり・なし		(右枠の和)	部屋割(区別なし)
なし・あり		(右枠の和)	資源配分(区別なし)

先程の例題を少し変え，「**9** 人の人が，区別しない**9** つの部屋に泊まる場合（空部屋があってもよい）何通りの泊まり方があるか」とした場合にはその答えは

$${}_9S_1+{}_9S_2+{}_9S_3+{}_9S_4+{}_9S_5+{}_9S_6+{}_9S_7+{}_9S_8+{}_9S_9$$

となり，この値は $B(9)$ などと表される***1**．

***1** パソコンでの計算によれば $B(9)=21147$ である． B は数学者ベル**(Bell)** の頭文字に由来し，$B(n)$ は，**ベル数(Bell number)** と呼ばれている．

§ 3.9　資源配分（配分先に区別が無い場合）

『資源配分』では，ボールと箱のモデルで「区別しない　n　個のボールを，区別する　r　個の箱に最低**1** 個は配る場合の数」
を扱った.『資源配分』の問題において，同じ種類の袋に配分するなどの理由で，配分先を区別する必要がない場合も考えられる. ここでは，配分先を区別しない場合の資源配分，すなわち箱を区別しない場合のボールの配分について考えてみよう.

ボール・箱	単射	写像全て	全射
あり・あり	順列	重複順列	部屋割り
なし・あり	組合せ	重複組合せ	資源配分
あり・なし		（右枠の和）	部屋割（区別なし）
なし・あり		（右枠の和）	資源配分 (区別なし)

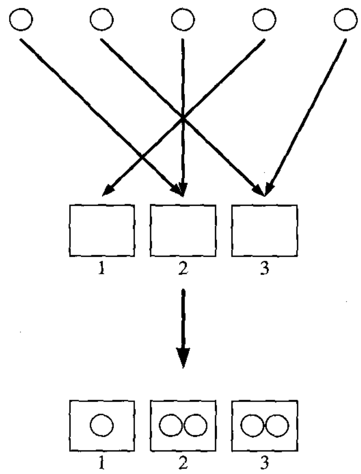
3.9.1　資源配分（配分先に区別が無い場合）の数

■ボールと箱のモデル

ボールと箱のモデルを使って

「区別しない**5** 個のボールを，区別しない**3** 個の箱に最低**1** 個は配る場合の数」

を求めてみよう.

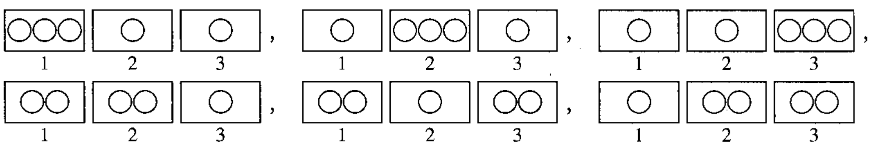


箱に区別はないが，数を数えやすくするため，とりあえず区別して考えていく. つまり，箱に区別のある普通の『資源配分』に一度戻して考えていく.

ボールは区別しないので，それを○，○，○，○，○ とし，箱はとりあえず区別するので番号をつけ，それを

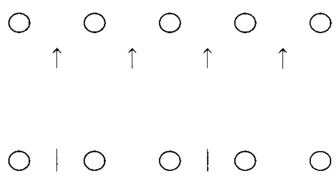
$\underset{1}{\square}$，$\underset{2}{\square}$，$\underset{3}{\square}$ としておく。

右の図は，$\underset{1}{\square}$ に**1** 個，$\underset{2}{\square}$ に**2** 個，$\underset{3}{\square}$ に**2** 個のボールを配った場合を表したものである. このような，ボールの配り方をすべて書き出すと



の**6** 通りの場合があるのがわかる.

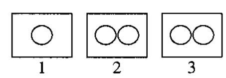
これを，計算で求めるには次のように考えるとよい.



まず，区別しない**5** 個のボールを並べて，右図のようにボールの間にある**4** つの“すきま”について考える.

この**4** つの“すきま”から**2** つ選んで，その**2** ヶ所に“しきり”｜を入れ，**5** 個のボールを**3** つの部分に分ける. 右図は左から**1** 番目と**3** 番目の“すきま”を選んで“しきり”を入れた例である.

こうしておいてから，この**3** つの部分の左，真中，右にあるボールの個数をそれぞれ**3** つの箱 $\underset{1}{\square}$，$\underset{2}{\square}$，$\underset{3}{\square}$ に入れるボールの個数に対応させる（右図参照）.



このように考えると

「区別しない**5** 個のボールを，区別する**3** 個の箱に最低**1** 個は配る場合の数」

は，結局4 つの"すきま"から2 つの"すきま"の選び方の総数となり，組合せで計算することができる．
つまり，

$${}_4C_2=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6$$ 通りと計算できる．

この6 通りは，箱に区別がある場合の資源配分の数で
あるから，袋に区別が無いときには（3 通りを一束にして数えるので），上の図の2 通りの場合だけしかない．

資源配分（配分先に区別が無い場合）の数 $p(n,\ r)$ の定義

「区別しない n 個のボールを，区別しない r 個の箱に最低 1 個は配る場合の数」を，
FTEXTでは $p(n,\ r)$ と表す．

この例では， $p(5,3)=\frac{6}{3}=2$ である．

■資源配分（配分先に区別が無い場合）の数p(n, r) の計算

区別しない n 個のボールを，区別しない r 個の箱に最低1 個は配る場合の数 $p(n,r)$ の
一般的な議論は難しいので，簡単な例題についてだけ以下に触れる．

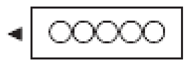
【例題：資源配分（配分先に区別が無い場合）の計算練習】

次の値を求めよ．

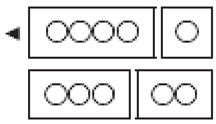
(1) $p(5,1)$　　(2) $p(5,2)$　　(3) $p(5,3)$　　(4) $p(5,4)$
(5) $p(5,5)$

【解答】

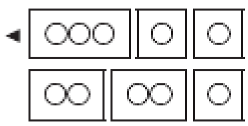
(1) 求めるのは「区別しない5 個のボールを，区別しない1 個の箱に最低1 個は配る場合の数」であり，これは右欄外の図のような1 通りである．



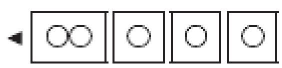
(2) 求めるのは「区別しない5 個のボールを，区別しない2 個の箱に最低1 個は配る場合の数」であり，これは右欄外の図のような2 通りである．



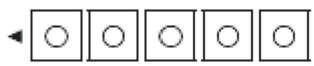
(3) 求めるのは「区別しない5 個のボールを，区別しない3 個の箱に最低1 個は配る場合の数」であり，これは右欄外の図のような2 通りである．



(4) 求めるのは「区別しない5 個のボールを，区別しない4 個の箱に最低1 個は配る場合の数」であり，これは右欄外の図のような1 通りである．



(5) 求めるのは「区別しない5 個のボールを，区別しない5 個の箱に最低1 個は配る場合の数」であり，これは右欄外の図のような1 通りである．



【例題：資源配分（配分先に区別が無い場合）】

区別しない9 個のボールを，区別しない3 つの箱に配る場合について．どの箱にも最低1 個はボールを配るとして，その配り方には何通りの方法があるか求めよ．

【解答】

まず，ボールを区別せず，箱を区別する（**a** 箱，**b** 箱，**c** 箱と名付ける）場合について考える．このとき，**9** 個のボールを**3** つの箱に分ける方法は，並べた**9** 個のボールの“すきま”**8** ヶ所に“しきり”を**2** ヶ所いれ，左から順に a 箱，b 箱，c 箱に入れるボールの数と対応させればよい．

◀ ○○○○○○○○○
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

つまり，${}_8C_2=28$ 通りある．

a 箱，b 箱，c 箱にはいるボールの数がそれぞれ l，m，n のとき，(l,m,n) と表す．

i) 28 通りのうち**3** つの箱とも入るボールの数が等しくなるのは

$(3,3,3)$ の**1** 通り．

ii) a 箱，b 箱に入るボールの数が等しいのは，**3** 箱とも入るボールの数が同じ場合を除くと

$(1,1,7),(2,2,5),\ \underbrace{(3,3,3)}_{\text{これは除く}},(4,4,1)$

の**3** 通りある．

3 つの箱のうち，どの**2** つの箱に入る球の数が等しくなるかは ${}_3C_2$ 通りあるので，**2** つの箱に入るボールの数が等しいのは

${}_3C_2\times3=9$ 通り．

iii) 3 つの箱に入るボールの数がばらばらであるのは，

$28-(1+9)=18$ 通り．

よって，箱の区別をなくすと

$1+\dfrac{9}{3}+\dfrac{18}{3!}=7$ 通り

◀ $p(9,3)$

7 通りの内訳は次のようになる．

1.	○	○	○○○○○○○
2.	○	○○	○○○○○○
3.	○	○○○	○○○○○
4.	○	○○○○	○○○○
5.	○○	○○	○○○○○
6.	○○	○○○	○○○○
7.	○○○	○○○	○○○

【例題：★資源配分（配分先に区別が無い場合）】

n を正の整数とし，n 個のボールを**3** つの箱に分けて入れる問題を考える．ただし，**1** 個のボールも入らない箱があってもよいものとする．

(1) 互いに区別のつかないボールを，A，B，C と区別された**3** つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

(2) n が**6** の倍数 $6m$（m は自然数）であるとき，n 個の互いに区別のつかないボールを，区別のつかない**3** つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．
m を用いて表せ．

【解答】

(1) A に a 個, B に b 個, C に c 個入れるとして

$$a+b+c=n$$

を満たす0 以上の整数の組 (a, b, c) が何組あるかと対応する. よって

$${}_3H_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$ 通り

(2) (1) の $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$ 通りのうち

i) 3 箱に入るボールの数がすべて違うものが p 通り

ii) 3 箱に入るボールの数が2 箱については同じものが q 通り

iii) 3 箱に入るボールの数がすべて同じものが r 通り

あるとすれば, 求める値は, 箱の区別を無くすため, それぞれ 6, 3, 1 で割って

$\dfrac{p}{3!}+\dfrac{q}{3}+r$ 通りとなる.

まず, r は明らかに1 である.

次に, q を求める. どの2 つの箱に入るボールの数が等しくなるかで ${}_3C_2$ 通りある.

例えば a と b が等しい場合

$$(a, b, c)=(k, k, 6m-2k)(k=0, 1, \cdots, 3m)$$

なので, $3m+1$ 通りあるが, 3 箱に入るボールの数がすべて同じになる場合である

$$(a, b, c)=(2m. 2m, 2m)$$

の1 通りを引いて, $3m$ 通りある. よって

$$q={}_3C_2\cdot 3m=9m$$

最後に, p は全体から q, r を引くことにより求まり

$$p=\frac{(n+2)(n+1)}{2}-9m-1 = \frac{(6m+2)(6m+1)}{2}-9m-1$$
$$= 18m^2$$

以上より

$$18\frac{m^2}{3!}+\frac{9m}{3}+1=3m^2+3m+1$$ 通り

■資源配分(配分先に区別が無い場合)の和

【例題:資源配分(配分先に区別が無い場合)の和】

区別しない9 個のボールを, 区別しない3 つの箱に配る場合について,空の箱があってもよいとすると, 何通りの配り方があるか求めよ.

【解答】

$P79$ の解答より、空の箱が1 つも無い場合には 7 通りであった.

2 つの箱が空箱になるのは, 1 通り. 1 つの箱が空箱になるのは(数えて) 4 通り. よって

$1+4+7=12$ 通り ◀ $p(9,1)+p(9,2)+p(9,3)$

この例題からわかるように，空の箱があってもよい場合のボールの配り方は、 $p(n,r)$ の和となる．ボールと箱のモデルでまとめると，次のようになる．

資源配分（配分先に区別が無い場合）の和

「区別しない n 個のボールを，区別しない r 個の箱に配る（何個でもよい）場合の数」は， $p(n,\ 1)+p(n,\ 2)+\cdots+p(n,\ r)$ と表すことができる．

ボール・箱	単射	写像全て	全射
あり・あり	順列	重複順列	部屋割り
なし・あり	組合せ	重複組合せ	資源配分
あり・なし		（右枠の和）	部屋割（区別なし）
なし・あり		右枠の和	資源配分（区別なし）

■**数の分割**

自然数の**5** を正の整数の和（**5** そのものも含むとする）として表す方法には，和の順番を区別しなければ

$$5,4+1,3+2,3+1+1,2+2+1,2+1+1+1,1+1+1+1+1$$

の**7** 通りある．

このように，正の整数 n を正の整数の和として表すことを，正の整数 n の**分割(partition)**といい，その表し方の総数を本教科書では $p(n)$ と表す．この例から， $p(5)=7$ である．

『資源配分（配分先に区別が無い場合）』**(p.78)** の例題より

$$p(5,1)=1,\ p(5,2)=2,\ p(5,3)=2,\ p(5,4)=1,\ p(5,5)=1$$

であったが，これらは自然数**5** の分割のすべてのパターンを表したものであるので

$$p(5)=p(5,1)+p(5,2)+p(5,3)+p(5,4)+p(5,5)$$

が確認できる．

§ 3.10 残りの体系

3.10.1 残りの体系

■ボールと箱のモデル

ここでは，ボールと箱のモデルにおける体系の最後として，下表の網掛け部分，つまり

「区別する n 個のボールを，区別しない r 個の箱に高々**1** 個配る場合の数」

と

「区別しない n 個のボールを，区別しない r 個の箱に高々**1** 個配る場合の数」

について考えてみよう．

ボール・箱	単射	写像全て	全射
あり・あり	順列	重複順列	部屋割り
なし・あり	組合せ	重複組合せ	資源配分
あり・なし		（右枠の和）	部屋割（区別なし）
なし・あり		（右枠の和）	資源配分（区別なし）

実はこれらは非常に単純で，$n \leq k$ の場合に**1** 通りとなるだけである．
例えば，区別する**3** 個のボールを区別しない**4** 個の箱に高々**1** 個配る場合の数は

①	②	③		

の**1** 通りしかない．
同じようにボールを区別しない場合でも

○	○	○		

の**1** 通りしかない．
また，$n = k$ の場合には，すべての箱に**1** つずつボールを配っても，ボールが余ってしまうので**0** 通りとする．