

第2章 論理と集合

§ 2.1 命題

ものごとの価値を決める尺度には、楽しさ、美しさ、善さなど、いろいろなものがある。数学では、正しさに最大の関心を払う。絶対に正しいといい切れるものを、証明という手段で徐々に積み上げて、数学は構築されている。ここでは、正しさを扱うための基本単位となる命題について学んでいこう。

2.1.1 命題と真・偽

■“正しい”ということ“正しくない”ということ

次の4つの事柄について、“正しい”か“正しくない”かという点について考えてみよう。

- i) 日本の首都は東京である
- ii) ペンギンは魚類である
- iii) 実数を2乗すると0以上になる
- iv) 2つの実数 a, b に対し $ab > 0$ ならば, $a > 0$ かつ $b > 0$ である

まず, i) に関して. 日本の首都は東京であるので, 疑い無く“正しい”といえる。

次に, ii) に関して. ペンギンは鳥類なので, この文章は間違っている。“正しい”か“正しくない”かと聞かれたら, “正しくない”といえるだろう。

そして, iii) に関して. 実数は, 正・負・0の3つに分類でき, 正の実数の2乗は正, 負の実数の2乗は正, 0の2乗は0であるから, いずれにしても2乗した結果は0以上となる。ゆえに, この文章は“正しい”といえる。

最後に, iv) に関して. $ab > 0$ ということはいいかえるならば, a と b が同じ符号 (+, -) をもつということである。 a と b が同じ符号であるということには, $a > 0$ かつ $b > 0$ という場合もあるが, $a < 0$ かつ $b < 0$ という場合もあるということである。その点において, この文章は“正しい”とはいえないため, “正しくない”ということにする。

■命題と真・偽

式や文章で表された事柄で, “正しい”か“正しくない”かのどちらか一方に定まるものを**命題(proposition)**という。

「カレーライスおいしい」のように, “正しい”か“正しくない”かの判断が人によって異なるものや, 「今何時?」のように, “正しい”か“正しくない”がそもそも決定できないものは, 命題として扱わない。命題が“正しい”とき, その命題は**真(true)**であるといい, 命題が“正しくない”とき, その命題は**偽(false)**であるという。

数を $a, b, c, \dots$ などのアルファベットで表すように, 命題もアルファベットの p, q などで表す

—— 命題と真・偽 ——

式や文章で表された事柄で, “正しい”か“正しくない”かのどちらか一方に定まるものを**命題**という。命題が“正しい”とき, その命題は**真**であるといい, 命題が“正しくない”とき, その命題は**偽**であるという。

【例題: 真・偽の判断】

次の命題の真偽をいえ。

- (1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$
- (2) $2^{16} = 65536$
- (3) $x^2 = 9$ ならば $x = 3$
- (4) $x = 3$ ならば $x^2 = 9$
- (5) 整数 a, b の積が偶数ならば, a または b は偶数である。
- (6) 整数 a, b の積が奇数ならば, a と b はともに奇数である。

【解答】

- (1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ なので、この命題は偽である。
- (2) 計算すれば正しいとわかる。よって、この命題は真である。
- (3) $x^2=9$ のとき、 $x=-3, 3$ である。よって、 $x=3$ とはいいきれないので、この命題は偽である。
- (4) $x=3$ のときは、例外なく $x^2=9$ となるので、この命題は真である。
- (5) a と b の偶奇には、(偶数, 偶数), (偶数, 奇数), (奇数, 偶数), (奇数, 奇数) の4つの場合があるが、 ab が偶数になるのは、(偶数, 偶数), (偶数, 奇数), (奇数, 偶数) の3つの場合、つまり a または b が偶数の場合である。よって、この命題は真である。
- (6) (5)と同様に考え、 ab が奇数であるとき、 a と b はともに奇数である。よって、この命題は真である。

§ 2.2 命題の結合

一見複雑な命題も、よくみると小さな命題が組み合わさってできている。正しさに着目する限り、その組み合わせ方は「かつ」、「または」、「～ない」、「ならば」の4通りを考えれば十分である。以下では、その組み合わせり方のパターンをみていく。

2.2.1 命題の「かつ」と「または」

■命題の「かつ」

命題の「かつ」

2つの命題 p, q に対して、「 p, q は共に真である」という命題を

「 p かつ q (p and q)」

と表す。

「 p かつ q 」の意味は、日常使っている言葉でいうところの、「 p しかも q 」, 「 p さらに q 」などとほぼ同じ意味である。この辺りを専門に扱う論理学という学問では、日常使う言葉と区別するために「 $p \wedge q$ 」と表す。

この新しい命題「 p かつ q 」の真偽をまとめると、右の表のようになる(この表を真偽値表(truth and falsity table)という)。

例えば、命題 p, q をそれぞれ

p : 「ペンギンは鳥類である」(真)

q : 「2 は1 より小さい」(偽)

としたとき、「 p かつ q 」つまり

「ペンギンは鳥類であり、かつ、2 は1 より小さい」

の真偽は、 $p \wedge q$ のうち q が偽であるから、全体として偽となる。

p	q	p かつ q
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	偽

■命題の「または」

命題の「または」

2つの命題 p, q に対して、「 p, q の少なくとも一方は真である」という命題を

「 p または q (p or q)」

と表す。

命題「 p または q 」は、日常で使う「または」の意味とは少々異なることに注意がいる。
 命題の「または」が“少なくとも一方は”という意味なのに対し、日常語での「または」では
 “どちらか一方”の意味で使われることが多い。論理学では「 $p \wedge q$ 」と表し、日常語と区別している。

この新しい命題「 p または q 」の真偽値表は、右のようになる。

例えば、命題 p, q をそれぞれ

p : 「ペンギンは鳥類である」(真)

q : 「2 は1 より小さい」(偽)

としたとき、「 p または q 」つまり

「ペンギンは鳥類であるか、または、2 は1 より小さい」

の真偽は、 p, q のうち p が真であるから、全体として真となる。

p	q	p または q
真	真	真
真	偽	真
偽	真	真
偽	偽	偽

【例題: 命題の「かつ」と「または」】

次のそれぞれにおいて、「 p かつ q 」と「 p または q 」の真偽を答えよ。

(1) $p: \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ $q: \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(2) $p: 2^{16} = 65536$ $q: 2^{10} = 1024$

(3) $p: 1+1=1$ $q: 1 \times 1 = 2$

【解答】

(1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ なので、命題 p は偽であり、また、命題 q は真である。よって

「 p かつ q 」は偽「 p または q 」は真

(2) 命題 p は真であり、命題 q も真である。よって

「 p かつ q 」は真「 p または q 」は真

(3) 命題 p は偽であり、命題 q も偽である。よって

「 p かつ q 」は偽「 p または q 」は偽

2.2.2 命題の否定

■ 命題の否定

命題の否定

ある命題 p に対して、 p が真の場合には偽に、 p が偽の場合には真となる命題を、 p の否定 (negation) といい

「 p でない (not p)」

と書く。 p の否定は、記号 $\bar{p}$ で表すこともある。

命題の否定は、日常で使う「～ない」の意味と同じである。論理学では「 $\neg p$ 」と表す。

この新しい命題 $\bar{p}$ の真偽値表は、右のようになる。

例えば、真である命題として、命題 p を

p : 「ペンギンは鳥類である」(真)

とすると、この命題の否定 $\bar{p}$ は

$\bar{p}$: 「ペンギンは鳥類ではない」(偽)

となる。また、偽である命題として、命題 q を

q : 「2 は1 より小さい」(偽)

とすると、この命題の否定 $\bar{q}$ は、「2 は1 より小さくはない」すなわち

$\bar{q}$: 「2 は1 以上である」(真) となる。

p	$\bar{p}$
真	偽
偽	真

2.2.3 命題の「ならば」

■命題の「ならば」

命題の「ならば」

2つの命題 p , q に対して、「もし p が真であるならば、 q は真である」という命題は、簡単に

「 p ならば q (if p then q)」

と書かれ、記号で $p \Rightarrow q$ と表す。

このとき、初めの命題 p を仮定 (assumption) といい、後の命題 q を結論 (conclusion) という。

2つの命題 p , q の真偽それぞれについて、この新しい命題 $p \Rightarrow q$ の真偽をまとめると、右のようになる。仮定 p が偽のときは、結論 q の真偽にかかわらず、全体として真になることに注意しよう。こうなる理由は次の例を考えてみるとわかりやすい。

ある人が私たちに

「もしテストで100点をとれた (p) ならば、美味しいものをおごってあげる (q)」という約束したとしよう。そのとき、もし私たちがテストで100点をとったのに、美味しいものをおごってもらえなかったら、この人はうそをついたことになる。

しかし、テストで100点をとれなかったときには、たとえおごってもらえなくても、この人はうそをついたことにならないし、また、たとえおごってもらったとしても、やはりこの人はうそをついたことにならない。

このように、日常的に用いている「ならば」は、条件が偽のときには結論が真でも偽でも、全体としては偽とはならないという主張なのだと考えられる。それゆえ、「ならば」に対する真偽の割り当ては、右上の表のようになるのである。

p	q	$p \Rightarrow q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

■同値とは何か

命題の同値

2つの命題 p , q に対して、「 $p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$ 」という命題は、簡単に

$p \Leftrightarrow q$

と書かれる。

$p \Leftrightarrow q$ が真であるとき、命題 p と q は同値 (equivalence) であるという。

この新しい命題 $p \Leftrightarrow q$ の真偽をまとめると、右のようになる。

この表からわかるように、 p と q が同値となるのは、 p と q がともに真であるときか p と q がともに偽であるとき、つまり p と q の真偽が一致するときである。つまり、同値である2つの命題は、真偽に関して意味する内容が等しいということである(その意味で同値と呼ぶ)。

例として p と、 $\bar{p}$ の否定すなわち $\bar{\bar{p}}$ の真偽値表を書き並べてみると、右のようになる。

この表をみると、 $\bar{\bar{p}}$ と p の真偽値は一致しているので同値である。これは、2重否定「 p でないということはない」は「 p である」ことを意味する。

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
真	真	真	真	真
真	偽	偽	真	偽
偽	真	真	偽	偽
偽	偽	真	真	真

p	$\bar{p}$	$\bar{\bar{p}}$
真	偽	真
偽	真	偽

【例題:「ならば」のいいかえ】

下の真偽値表を埋め、 $p \Rightarrow q$ と p または q が同値、すなわち

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \text{ または } q)$$

が成り立つことを示せ.

【解答】

p	q	$\bar{p}$	$p \Rightarrow q$	$\bar{p}$ または q
真	真			
真	偽			
偽	真			
偽	偽			

p	q	$\bar{p}$	$p \Rightarrow q$	$\bar{p}$ または q
真	真	偽	真	真
真	偽	偽	偽	偽
偽	真	真	真	真
偽	偽	真	真	真

この表より、「 $p \Rightarrow q$ 」と「 $\bar{p}$ または q 」の真偽が一致するのが確かめられるので、次のことがいえる.

「ならば」のいいかえ

2つの命題 p, q に対して

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ または } q)$$

が成り立つ.

【例題:ド・モルガンの法則(命題版)】

下の真偽値表を埋め、次の関係が成り立つことを示せ.

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ または } \bar{q}) \quad \overline{p \text{ または } q} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ かつ } \bar{q})$$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \text{ かつ } q$	$p \text{ または } q$	$\overline{p \text{ かつ } q}$	$\overline{p \text{ または } q}$	$\overline{p \text{ または } q}$	$\overline{p \text{ かつ } q}$
真	真								
真	偽								
偽	真								
偽	偽								

【解答】

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \text{ かつ } q$	$p \text{ または } q$	$\overline{p \text{ かつ } q}$	$\overline{p \text{ または } q}$	$\overline{p \text{ または } q}$	$\overline{p \text{ かつ } q}$
真	真	偽	偽	真	真	偽	偽	偽	偽
真	偽	偽	真	偽	真	真	真	偽	偽
偽	真	真	偽	偽	真	真	真	偽	偽
偽	偽	真	真	偽	偽	真	真	真	真

この表より、 $\overline{p \text{ かつ } q}$ と $\bar{p} \text{ または } \bar{q}$ の真偽と、 $\overline{p \text{ または } q}$ と $\bar{p} \text{ かつ } \bar{q}$ の真偽が一致するのが確かめられるので、次のことがいえる.

ド・モルガンの法則(命題版)

2つの命題 p, q に対して

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ または } \bar{q}) \quad \overline{p \text{ または } q} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ かつ } \bar{q})$$

が成り立ち、これをド・モルガンの法則という.

■逆・裏・対偶

$p \Rightarrow q$ の形をした命題に対して

$q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の逆(converse)

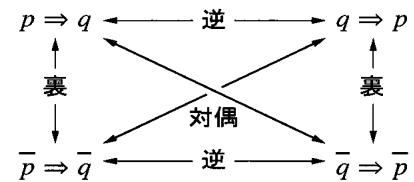
$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ を $p \Rightarrow q$ の裏(converse of contraposition)

$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ を $p \Rightarrow q$ の対偶(contraposition)

という.

命題 $\bar{p}$, $\bar{q}$ の否定は, もとの命題 p , q であるから,
命題 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ の対偶は $p \Rightarrow q$ である. つまり, 対偶の対偶
はもとに戻る.

逆・裏・対偶の関係をまとめると, 右図のようになる.



【例題: 対偶は同値であることの証明】³⁾

下の真偽値表を埋め, 次の関係が成り立つことを示せ.

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$$

【解答】

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \Rightarrow q$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$
真	真	偽	偽	真	真
真	偽	偽	真	偽	偽
偽	真	真	偽	真	真
偽	偽	真	真	真	真

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \Rightarrow q$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$
真	真				
真	偽				
偽	真				
偽	偽				

この表より, $p \Rightarrow q$ と $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ が一致するのが確かめられるので, 次のことがいえる.

対偶は同値

2つの命題 p , q に対して

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$$

が成り立つ.

§ 2.3 条件と真理集合

「1は2より小さい」(真)のような、単発の命題ではなく、「 x は2より小さい」のように、 x の値が決まって初めて真か偽かが決まる、いわば“穴の空いた命題”をここでは考える。

2.3.1 条件と真理集合

■条件とは何か

例えば、ある数 x を含む事柄 $p(x)$ を「 $2x^2-7x+3$ の値は 0 である」、つまり

$$p(x) : 「 2x^2-7x+3=0 」$$

としてみよう。

x の値が決まらなると、 $p(x)$ の真偽も決まらなないので、 $p(x)$ は命題ではない。しかし、例えば x に1を代入したもの、つまり $p(1)$ は

$$p(1) : 「 2 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 3 = 0 \text{ である} 」$$

となり偽と決まるので命題である。また、 x に3を代入したもの、つまり $p(3)$ は

$$p(3) : 「 2 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 3 = 0 \text{ である} 」$$

となり真と決まるので、これもやはり命題である。このように

変数・条件

x の内容が決まれば命題となる事柄 $p(x)$ のことを、 x を変数 (variable) とする条件 (condition) という。

変数は1つとは限らず、複数ある場合もある。例えば $p(x, y) : 「 x \text{ は } y \text{ より大きい数である} 」$ は、2つの変数 x, y が確定して初めて命題となる。以下では、簡単のため、変数が1つの条件について説明していくが、変数がいくつかある条件でも基本的には同じである。

■真理集合とは何か

条件を考える場合には、その条件がもつ変数のとりうる範囲を、全体集合としてあらかじめ決めておく必要がある。このもとで、次のような集合を定義する。

真理集合

$p(x)$ が真となるような x の集合を $p(x)$ の真理集合 (truth set) という。

例えば、条件 $p(x)$ を、先程と同じ

$$p(x) : 「 2x^2-7x+3=0 」$$

として、 $p(x)$ の真理集合を求めてみる。

全体集合が実数全体の場合には、2次方程式を考えて

$$\begin{aligned} 2x^2-7x+3 &= 0 \\ (2x-1)(x-3) &= 0 \\ x &= \frac{1}{2}, 3 \end{aligned}$$

の2つが $p(x)$ を真とする x の値である。つまり、条件 $p(x)$ の真理集合 P は

$$P = \left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}$$

となる. また, 全体集合が自然数全体の場合には, $\frac{1}{2}$ は除外されるので, 真理集合 P は

$$P = 3$$

となる.

【例題: 条件と真理集合】

条件を $p(x)$, 全体集合を U とするとき, 真理集合 P を求めよ.

$$(1) U = \mathbb{N} \quad p(x) = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$$

$$(2) U = \mathbb{Z} \quad p(x) = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$$

$$(3) U = \mathbb{R} \quad p(x) = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$$

【解答】

(1) 自然数($\mathbb{N}$)のうち, 条件 $p(x)$ を満たすものは $x=1, 2$ である. よって

$$P = \{1, 2\}$$

(2) 整数($\mathbb{Z}$)のうち, 条件 $p(x)$ を満たすものは $x=-2, -1, 0, 1, 2$ である. よって

$$P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

(3) 実数($\mathbb{R}$)のうち, 条件 $p(x)$ を満たすものは $-2 \leq x \leq 2$ を満たす実数 x である. よって

$$P = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$$

たとえ同じ条件でも, 全体集合の取り方によって, 真理集合は変化することに注意しよう.

§ 2.4 条件の結合

前のセクションでは, ある条件 $p(x)$ を真とする x の集まり, 真理集合を学んだ.

命題が組み合わされて命題が作れたように, 条件の場合にも条件の組み合わせによって, 新たに条件を作ることができる. この新たに作られた条件の真理集合は, 第1章『集合の基礎』で学んだ集合と対応させて理解することができる.

2.4.1 条件の「かつ」と「または」

■「かつ」の真理集合

条件の「かつ」

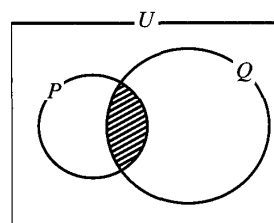
2つの条件 $p(x)$, $q(x)$ に対して, 「 $p(x)$, $q(x)$ は共に真である」という主張は条件となり

$$「p(x) \text{ かつ } q(x)」$$

と書く.

いま, ある条件 $p(x)$, $q(x)$ において, 変数 x のとり得る範囲を考え, それを全体集合 U とし, $p(x)$, $q(x)$ の真理集合をそれぞれ P , Q とする.

『命題の「かつ」』でみたように, 命題 $p(a)$, $q(a)$ ($a \in U$) が共に真のときに限り, 命題「 $p(a)$ かつ $q(a)$ 」は真になるので, 条件「 $p(x)$ かつ $q(x)$ 」の真理集合は $P \cap Q$ となる.



■「または」の真理集合

条件の「または」

2つの条件 $p(x)$, $q(x)$ に対して, 「 $p(x)$, $q(x)$ の少なくとも一方は真である」という主張は条件となり

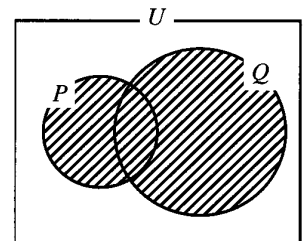
「 $p(x)$ または $q(x)$ 」

と書く.

いま, ある条件 $p(x)$, $q(x)$ において, 変数のとり得る範囲を考え, それを全体集合 U とし, $p(x)$, $q(x)$ の真理集合をそれぞれ P , Q とする.

『命題の「または」』でみたように, 命題 $p(a)$, $q(a)$ ($a \in U$) が共に偽のときに限り命題「 $p(a)$ または $q(a)$ 」は偽になるので, それ以外のときを考えて, 条件「 $p(x)$ または $q(x)$ 」の真理集合は

$P \cup Q$ となる.



2.4.2 条件の否定

■否定の真理集合

条件の否定

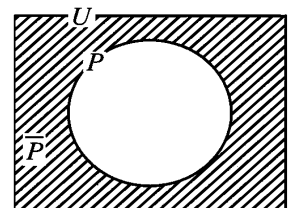
条件 $p(x)$ に対して

「 $p(x)$ ではない」

という主張は条件となり, 条件 $p(x)$ の否定という.

条件 $p(x)$ の否定は, 記号 $\overline{p(x)}$ で表すこともある.

いま, ある条件 $p(x)$ において, x のとり得る範囲を考え, それを全体集合 U とし, 命題 $p(a)$ ($a \in U$) が真となるような要素 a の集合, つまり条件 $p(x)$ の真理集合を P とする. 『命題の否定』でみたように, 命題 $p(a)$ が偽のときに命題 $\overline{p(a)}$ は真になるので, 条件 $\overline{p(x)}$ の真理集合は P の補集合 $\overline{P}$ となる.



【例題: 条件の否定】

x , y は実数とする. 次の条件の否定を答えよ.

- (1) $x=1$
- (2) $x=-2$
- (3) $x+y>0$
- (4) x は無理数である

【解答】

- (1) 「 x は1である」の否定は「 x は1ではない」, よって $x \neq 1$
- (2) 「 x は-2以上である」の否定は「 x は-2以上ではない」, つまり「 x は-2より小さい」, よって $x < -2$
- (3) 「 x と y を足したものは0より大きい」の否定は「 x と y を足したものは0より大きくはない」,

つまり「 x と y を足したものは0以下である」, よって

$$x + y \leq 0$$

- (4) 「 x は無理数である」の否定は「 x は無理数ではない」, つまり
「 x は有理数である」

2.4.3 条件の「ならば」

■「ならば」の真理集合

条件の「ならば」

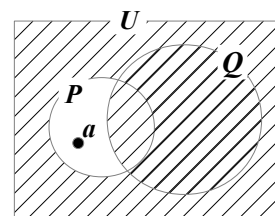
2つの条件 $p(x)$, $q(x)$ に対して, 「もし $p(x)$ が真であるならば, $q(x)$ は真である」
いう主張は条件となり

「 $p(x)$ ならば $q(x)$ 」

と書き, 記号では $p(x) \Rightarrow q(x)$ と表す.

このとき, 初めの条件 $p(x)$ を仮定といい, 後の条件 $q(x)$ を結論という.

いま, ある条件 $p(x)$, $q(x)$ において, 変数 x のとり
得る範囲を考え, それを全体集合 U とし, $p(x)$, $q(x)$
の真理集合をそれぞれ P , Q とする.
『命題の「ならば」』でみたように, $a \in U$ として命題 $p(a)$ が真
で命題 $q(a)$ が偽のときに限り命題 $p(a) \Rightarrow q(a)$ は偽に
なるので, それ以外の場合を考えて, 条件 $p(x) \Rightarrow q(x)$ の真理
集合は $\bar{P} \cup Q$ となる.



■必要条件と十分条件

一般に **A**:「全体集合内のすべての x において, $p(x) \Rightarrow q(x)$ は真となる」
という主張は命題となる.

右上図のような場合では, 白抜きの部分の要素 a では, $p(a)$ は真, $q(a)$ は偽だから命
題「 $p(a) \Rightarrow q(a)$ 」は偽つまり, 命題 **A** は偽となる. この要素 a のことを, この命題の
反例(counterexample) という.

しかし, 右図のように, 条件 $p(x)$, $q(x)$ の真理集合
 P , Q が $P \subseteq Q$ となる場合には, 全体集合内のいかな
る要素をとろうとも, $p(x) \Rightarrow q(x)$ は真となるので, この
命題 **A** は真となる.

全体集合内のすべての x に対して, $p(x) \Rightarrow q(x)$ が真
であるとき

$q(x)$ は $p(x)$ であるための**必要条件(necessary condition)**である

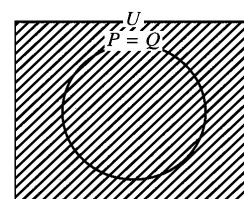
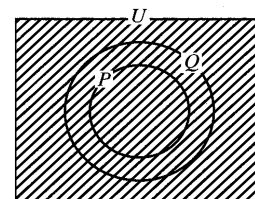
$p(x)$ は $q(x)$ であるための**十分条件(sufficient condition)**である

という

また, $p(x) \Rightarrow q(x)$ と $q(x) \Rightarrow p(x)$ がともに真である
とき $q(x)$ は $p(x)$ であるための**必要十分条件(necessary
and sufficient condition)**である.

または**同値(equivalence)**であるといい, $p(x) \Leftrightarrow q(x)$
と書く. この場合は, 右図のように真理集合 P と Q は等しく,
 $p(x)$ は $q(x)$ であるための**必要十分条件**でもある.

“必要”や“十分”という言葉の意味についてはこだわらず, 真理集合 P , Q
において「小さい方が十分条件」, 「大きい方が必要条件」と単純に覚えてしまおう.



【例題: 必要条件と十分条件】

次の【 】の中に

(ア) 必要条件であるが十分条件ではない (イ) 十分条件であるが必要条件ではない

(ウ) 必要十分条件である(エ) 必要条件でも十分条件でもない

のうち, 適当なものを選んで入れよ.

(1) $p(x)$ は $q(x)$ であるための, 【 】

$$p(x) : 「 x^2=2x 」 \quad q(x) : 「 x=2 」$$

(2) $p(x, y)$ は $q(x, y)$ であるための, 【 】

$$p(x, y) : 「 x \geq 0 \text{ かつ } y \leq 0 」 \quad q(x, y) : 「 xy \leq 0 」$$

(3) $p(x, y)$ は $q(x, y)$ であるための, 【 】

$$p(x, y) : 「 xy=0 \text{ かつ } x+y=0 」 \quad q(x, y) : 「 x=0 \text{ かつ } y=0 」$$

(4) $p(x)$ は $q(x)$ であるための, 【 】

$$p(x) : 「 x > 0 」 \quad q(x) : 「 x \neq 1 」$$

【解答】

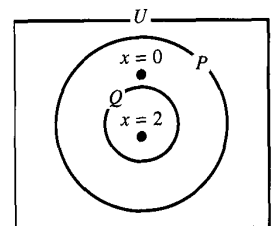
(1) $p(x) \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ または } 2$

これより

$$p(x) \Rightarrow q(x) \text{ は偽 (反例 } x=0 \text{)}$$

$$p(x) \Leftarrow q(x) \text{ は真}$$

となるので, 【 】には(ア)が入る.

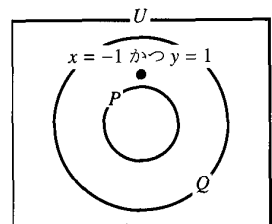
(2) $q(x, y) \Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ かつ } y \leq 0) \text{ または } (x \leq 0 \text{ かつ } y \geq 0)$

これより

$$p(x, y) \Rightarrow q(x, y) \text{ は真}$$

$$p(x, y) \Leftarrow q(x, y) \text{ は偽 (反例 } x=-1 \text{ かつ } y=1 \text{ など)}$$

となるので, 【 】には(イ)が入る.

(3) $p(x, y)$ に関して, まず

$$xy=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ または } y=0$$

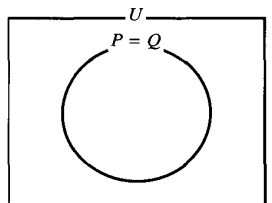
このうち, さらに $x+y=0$ を満たす x, y は

$$x=0 \text{ かつ } y=0$$

である. これより

$$p(x, y) \Rightarrow q(x, y) \text{ は真}$$

$$p(x, y) \Leftarrow q(x, y) \text{ は真}$$

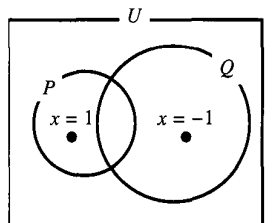
つまり, $p(x, y) \Leftrightarrow q(x, y)$ であるから, 【 】には(ウ)が入る.

(4)

$$p(x) \Rightarrow q(x) \text{ は偽 (反例 } x=1 \text{)}$$

$$p(x) \Leftarrow q(x) \text{ は偽 (反例 } x=-1 \text{ など)}$$

となるので, 【 】には(エ)が入る.



§ 2.5 いろいろな証明法

今までみてきた論理をもとに、ここでは有名な論法である「対偶法」と「背理法」についてみていこう。

2.5.1 対偶法

■対偶法とは何か

命題 $p \Rightarrow q$ と $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ は同値、すなわちこの2つの命題の真偽に関する意味は同じになるので、命題 $p \Rightarrow q$ を証明する代わりに、命題 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ を証明してもいい。

このようにいいかえにより、証明する論法のことを**対偶法(contraposition)**という。

例えば

「すべての整数 n について、 n^2 が偶数ならば n は偶数である」

という命題を証明してみよう。

n^2 は同じ n を2回かけたものなのだから、 n^2 が偶数なら n も偶数であることは自明ともいえるが、いざ証明せよといわれると難しい。

そこで、この命題の対偶である

「すべての整数 n について、 n が奇数ならば n^2 は奇数である」

を考えてみよう。こちらの命題であるならば、次のように解答を作ることができる。

【解答】

奇数 n はある整数 k を用いて、 $n=2k+1$ と表すことができるから

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1$$

$4(k^2+k)$ は偶数であるから、それに1を加えた n^2 は奇数である。

【例題:対偶法】

次の命題を証明せよ。

(1) すべての整数 m, n について、 mn が奇数ならば、 m, n はともに奇数である。

(2) すべての実数 x, y について、 $x^2+y^2=0$ ならば、 $x=0$ かつ $y=0$ である。

【解答】

(1) この命題の対偶は

「すべての整数 m, n について、 m または n が偶数であるならば mn は偶数である」
となる。

偶数 m はある整数 k を用いて、 $m=2k$ と表すことができるから

$$mn = 2kn$$

となり、 mn は偶数である。

n が偶数である場合も、ある整数 l を用いて、 $n=2l$ と表すことができるから、

$$mn = 2ml$$

となり、 mn は偶数である。

以上より、対偶の命題が証明されたので、もとの命題

「すべての整数 m, n について、 mn が奇数ならば m, n はともに奇数である」

も証明された。

(2) この命題の対偶は

「すべての実数 x, y について、 $x \neq 0$ または $y \neq 0$ であるならば $x^2+y^2 \neq 0$ である」
となる。

まず、一般に実数 x において、 $x^2 \geq 0$ であり、 $x^2=0$ となるのは $x=0$ のときに限る。

これは実数 y についても同様である。

いま、実数 x が $x \neq 0$ のとき、 $x^2 > 0$ となるから

$$x^2+y^2 > 0$$

となり、 $x^2+y^2 \neq 0$ である。

また、実数 y が $y \neq 0$ のとき、 $y^2 > 0$ であるから

$$x^2 + y^2 > 0$$

となり、 $x^2 + y^2 \neq 0$ である。

以上より、対偶の命題が証明されたので、もとの命題

「すべての実数 x, y について、 $x^2 + y^2 = 0$ ならば $x = 0$ かつ $y = 0$ である」も証明された。

2.5.2 背理法

■背理法とは何か

ある命題を証明するとき、その命題の否定を仮定して話をすすめると、つじつまが合わなくなること(矛盾(contradiction))を示し、そのことによって、もとの命題が成り立つと結論する論法がよく用いられる。この論法のことを背理法(reduction to absurdity)という。

背理法という言葉は、一見難しそうなイメージを与えるかもしれないが、実は私達が日常的に使っている論法である。例えば、「あなたがこの文章を読んでいる」ことの証明を考えてみよう。

もし、あなたがこの文章を読んでいない(否定)と仮定すると、あなたがこの文章の内容を理解していることと矛盾する。

よって、「あなたはこの文章を読んでいる」と証明できるといった具合である。

【例題: 背理法】

次の命題を証明せよ。

- (1) 3つの整数 a, b, c が $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすとき、 a, b, c のうち少なくとも1つは偶数である。
 (2) 三角形の内角のうち、少なくとも1つは 60° 以上である。

【解答】

(1) 3つの整数 a, b, c の全てが奇数であると仮定する。

このとき、 a^2, b^2, c^2 もすべて奇数である。ここで、左辺 $a^2 + b^2$ は奇数どうしの和であるから偶数となるが、右辺 c^2 は奇数であり、 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすことと矛盾する。よって、 a, b, c のうち少なくとも1つは偶数である。

(2) 3つの内角の全てが 60° 未満であると仮定する。このとき、3つの内角の和は 180° 未満となり、三角形の内角の和が 180° であることと矛盾する。三角形の内角のうち、少なくとも1つは 60° 以上である。

【記憶例題: 有名な背理法の応用例】

$\sqrt{2}$ が有理数でないことを証明せよ。

【解答】

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する。つまり $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

と表される「既約分数である」と仮定する。ただし、 a は整数、 b は0でない整数である。この両辺を2乗すると

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \therefore \quad 2b^2 = a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、左辺は2の倍数なので、右辺 a^2 も2の倍数である。したがって、 a も2の倍数である。そこで、 $a = 2a'$ (a' は整数)とおくと、①は

$$2b^2 = (2a')^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2b^2 = 4a'^2 \quad \therefore \quad b^2 = 2a'^2$$

ここで、右辺は2の倍数なので、左辺 b^2 も2の倍数となり、 b も2の倍数となる。しかし、そうすると、 a, b がともに2の倍数ということになり、最初の「既約分数である」という仮定に矛盾する。したがって、 $\sqrt{2}$ は有理数ではない。

■「 $p \Rightarrow q$ 」の形をした背理法

『「ならば」のいいかえ』でもみたように、「 $p \Rightarrow q$ 」は、「 p または q 」と同値なので、この否定は

$$(p \text{ または } q) \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ かつ } q) \leftarrow \text{『ド・モルガンの法則(命題版)』}$$

である.したがって、 $p \Rightarrow q$ が真であることを背理法で証明したいときには「 p かつ q 」を仮定して矛盾を導くことになる.

【例題: $p \Rightarrow q$ の背理法～その1～】

- (1) x が無理数ならば $x+3$ も無理数であることを証明せよ.
- (2) x が無理数ならば $3x$ も無理数であることを証明せよ.

実数のうち、有理数でないものを無理数という.

【解答】

- (1) $x+3$ が a という有理数であると仮定すると

$$x = a - 3$$

より、 x は有理数となる.これは、 x が無理数であることに矛盾する.

よって、 $x+3$ は無理数である.

- (2) $3x$ が b という有理数であると仮定すると

$$x = \frac{b}{3}$$

より、 x は有理数となる.これは、 x が無理数であることに矛盾する.よって、

$3x$ は無理数である.

【記憶例題: $p \Rightarrow q$ の背理法～その2～】

a, b, x, y が有理数のとき

$$a + b\sqrt{2} = x + y\sqrt{2} \text{ ならば, } a = x \text{ かつ } b = y$$

であることを証明せよ.

【解答】

$$a + b\sqrt{2} = x + y\sqrt{2} \text{ より}$$

$$(b - y)\sqrt{2} = x - a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

いま、 $b \neq y$ と仮定すると、 $\sqrt{2} = \frac{x - a}{b - y}$ となるが、 $x - a$, $y - b$ は有理数であるから

$\sqrt{2}$ は有理数となる.これは、 $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する.よって、 $b = y$ である.

また、このとき① から $a = x$ となる.

この例題から推測できるように、一般に次のことがいえる.

—— 有理数と無理数は独立している ——

a, b, x, y が有理数、 $\sqrt{z}$ が無理数のとき

$$a + b\sqrt{z} = x + y\sqrt{z} \text{ ならば, } a = x \text{ かつ } b = y$$

が成り立つ.