まえがき

FTEXT 教科書シリーズは,「入門から大学教養課程まで使える教科書」をコンセプトに編集されたテキストです. もちろん, その間の最大の山場である大学受験にも対応できるよう, 工夫が凝らされた教科書でもあります.

この教科書には次のような特徴があります.

1 綿密なクロスリファレンス(ページ参照)をつけた
2 重要項目を網羅した索引を巻末に載せた
3 現代数学の研究成果をとり入れた編集を心がけた
4 大学受験に対応できるテクニカルな内容も盛り込んだ
5 高校カリキュラムをこえる高度な内容も体系的な理解に必要ならば取り入れた
6 指導要領旧過程の内容も必要ならば取り入れた
7 レベルの高いものには星印(★)をつけ学習を後回しにできるようにした
8 例題を「例題」と「暗記例題」に分け, 問題に対する意識のもち方を区別できるようにした
9 ていねいで豊富な図版を用意した
10 どの問題にも完全な解答をつけた
11 各節のはじめには概要をつけ学習の指針となるようにした
12 必要な内容ならば繰り返しをいとわず掲載した
13 英語の文献で学ぶようになったときの手助けになるよう英語のルビを載せた

この教科書を利用することにより, 自分の学ぼうとする知識にはどのような意味があり, 全体の中でどういう位置付けにあるのかを把握することができます. この教科書は皆さんが身につける知識の地図となるわけです。

従来の問題暗記型の勉強ではなく, 体系的に知識を整理していこうと考える人にとって, この教科書はきっと最適のパートナーになるでしょう. 一度読むだけでは理解できない部分もあるでしょうから, 機会あるごとに何度も復習し, 自分のものにしていってください.

目次

ギリシア文字の読み方

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	beta	ベータ	B	β
gamma	ガンマ	Γ	γ	delta	デルタ	Δ	δ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	zeta	ゼータ	Z	ζ
eta	イータ	H	η	theta	シータ	Θ	θ, ϑ
iota	イオタ	I	ι	kappa	カッパ	K	κ
lambda	ラムダ	Λ	λ	mu	ムー	M	μ
nu	ヌー	N	ν	omicron	オミクロン	O	o
xi	クシー	Ξ	ξ	pi	パイ	Π	π, ϖ
rho	ロー	P	ρ, ϱ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
tau	タウ	T	τ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
phi	ファイ	Φ	ϕ, φ	chi	カイ	X	χ
psi	プシー	Ψ	ψ	omega	オメガ	Ω	ω

本書の使い方

1. 影付きの四角
これは，数学の定義（約束事）や定理（導かれた大切な話）をまとめるために使われています．書いてあることを理解するだけでなく，後で参照されることが多いので覚えてしまうことが大切です．

《例》

有理数

整数 a と 0 でない整数 b によって $\dfrac{a}{b}$ の形で表せる数を，**有理数**という．

2. 例題
本文に書かれた内容の理解を助けるため，例題があります．簡単な計算問題から骨のある問題まで，さまざまな問題が用意してあります．

どの例題も次のステップに進むのに重要な鍵となっていますので，理解してから先に進むように心がけてください．

すべての例題にはタイトルが付いています．例題を解き終えた後，皆さんが身に付けた知識が，その例題のタイトル通りのものか確認してみてください．

《例》

【例題：数の分類】

次の実数について，以下の問に答えよ．

3，-2，0，$\dfrac{2}{5}$，$-\dfrac{2}{5}$，$\sqrt{3}$，$1.\dot{5}\dot{2}$，$\dfrac{36}{6}$，$-\sqrt{16}$，$\left(\sqrt{5}\right)^2$，π^2

(1) 自然数を選べ．(2) 整数を選べ．(3) 有理数を選べ．(4) 無理数を選べ．

3. 記憶例題
上の例題の中には，数学の根っこを支えるような重要なものもあります．これらの例題は，理解するだけでは不十分で，その解答に用いられた論法も大切なものです．このような例題は，問題ごと覚えてしまう気持ちで取り組みましょう．

記憶例題は，暗記することまで意識してください．

《例》

【記憶例題：$\sqrt{2}$ は有理数でない事の証明】

$\sqrt{2}$ が有理数でないことを証明せよ。

4. 補足
本文中，ところどころにマーク付きの文章があります．このマークのついた文章は，知識を理解するためのポイントや，知識の覚え方などが書かれています．

世の中には，難しいことでもすぐに覚えられる人や，一度覚えたことを忘れずにずっと覚えていられる人がいます．このマーク付いた文章をうまく利用することによって，このような人たちと同じような振る舞いができるようになります．試してみてください．

第1章

集合の基礎

§ 1.1 集合と要素

犬やサルや鳥は，これらをひとまとめにして「動物」と表すことができる．このように，ものを寄せ集め，ひとくくりにしたものを集合という．ここでは，集合という考え方に対する注意や，集合に関する用語について学ぶ．

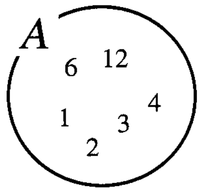
1.1.1 集合と要素の表し方

■集合の表し方

“**1** から**9** までの自然数の集まり”や“すべての偶数の集まり”のように，それに含まれるものが明確であるとき，このものの集まりを**集合(set)** といい，ものそれぞれをその集合の**要素(element)** という．

集合は，アルファベットの大文字 A，B，C，・・・，X，Y などを用いて表される．
例えば，集合 A を

「**12** の正の約数の集合」 ・・・・・・・・・・・・・・①



とした場合，**12** の正の約数は**1**，**2**，**3**，**4**，**6**，**12** であるから， A は

「**1**，**2**，**3**，**4**，**6**，**12** を要素とする集合」・・・・・②

といっても同じことである．
①のように，要素の満たす条件を示して集合を決める方法のことを，

内包(ないほう)的定義(intensional definition) といい

$$A=\{\ x\ |\ x\text{は}12\text{の正の約数}\ \}$$

と表す．この方法では， A の要素を代表して例えば x などで表し，{ } の中の縦線（ | ）の右側に，その x の満たす条件を書く．
また，② のように，すべての要素を書き並べて集合を決める方法のことを，

外延(がいえん)的定義(extensional definition) といい

$$A=\{1,2,3,4,6,12\}$$

と表す．また，「要素をもたない集合」というものも考えることとし，これを

空(くう)集合(empty set)といい，記号 φ で表す．

数の集合は次のように，あらかじめ表し方を決めているものがある．

数の種類集合の表し方

自然数	**natural number**	$\mathbb{N}$
整数	**integer（独zahlen）**	$\mathbb{Z}$
有理数	**rational number**	$\mathbb{Q}$
実数	**real number**	$\mathbb{R}$

【例題：集合の表し方】

(1) 次の集合を，要素の条件を示す方法で表せ．

i) $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

ii) $A=\{2,4,6,\cdots,100\}$

iii) $A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

(2) 次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．
i)　$A=\{\ x \mid x$ は 18 の正の約数 $\}$
ii)　$A=\{\ 2^n \mid n$ はNの要素であり $1\leq n\leq 6\ \}$
iii)　$A=\{\ 2n-1 \mid n$ は正の整数 $\}$

(1) の要素の条件を示す方法では，答えが1 通りになるとは限らず，
　いくつかの表し方があるのが普通である．

【解答】
(1)　i)　$A=\{x \mid 10$ 以下の自然数 $\}$
　《別解》
　$A=\{x \mid x$ はNの要素であり $1\leq x\leq 10\}$　など
ii)　$A=\{2x \mid x$ は整数かつ、$1\leq x\leq 50\}$
　《別解》
　$A=\{x \mid x$ は 100 以下の正の偶数 $\}$　など
iii)　$A=\{x \mid x$ は 20 以下の素数 $\}$

◂ **素数** (prime number) とは，1 より大きい整数で，1 とその数自身以外に約数をもたないような数をいう．
◂ 要素の個数に限りのない集合もある

(2)　i)　$A=\{1,2,3,6,9,18\}$
ii)　$A=\{2,4,8,16,32,64\}$
iii)　$A=\{1,3,5,7,\cdots\}$

この例題にある，“18 の正の約数”のように，有限個の要素からなる集合を**有限集合(finite set)** といい，
“自然数全体”の集合のように，要素の個数に限りが無い集合を**無限集合(infinite set)** という．

■要素の表し方

a　が集合　A　の要素であるとき，　a　は集合　A　に**属する(in)** といい

$$a\in A$$

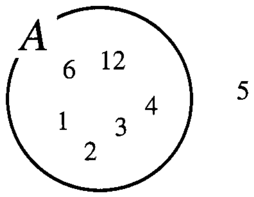
と表す．また，　a　が集合　A　の要素でないことは，$\in$ に斜線を引いて

$$a\notin A$$

で表す．
　例として，　$A=\{x \mid x$ は 12 の正の約数 $\}$　とすると

$$3\in A \quad , \quad 5\notin A$$

である．



【例題:集合の要素の表し方】
　集合　A，B　を

$$A=\{x \mid x \text{ は正の偶数}\} \qquad B=\{x \mid x \text{ は } 18 \text{ の正の約数}\}$$

とするとき，次の【　　】の中に　$\in$　または　$\notin$　のいずれかを入れよ．
(1) 2【　　】A，2【　　】B　　　(2) 3【　　】A，3【　　】B
(3) 4【　　】A，4【　　】B　　　(4) 5【　　】A，5【　　】B

わかりやすくするため，要素を書き並べてみると
$A=\{2,4,6,8,10,\cdots\}$　，　$B=\{1,2,3,6,9,18\}$
これをもとに問に答える．

【解答】
(1)　$2\in A$　，　$2\in B$　　(2)　$3\notin A$　，　$3\in B$　　(3)　$4\in A$　，　$4\notin B$　　(4)　$5\notin A$　，　$5\notin B$

§ 1.2 集合と集合の関係

先程学んだように，集合とはものの集まりであった．**2** つの集合があるとき，この**2** つの集合が全く別の集まりを表すこともあれば，要素を共有することもある．ここでは，**2** つの集合の間の関係について考えてみよう．

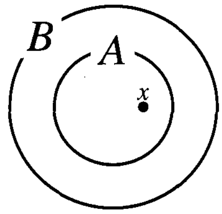
1.2.1 部分集合

■部分集合

2 つの集合 A，B について， A からどのような要素 x をとってきても，その要素 x が B の要素であるとき，つまり

$$x \in A \quad \text{ならば} \quad x \in B$$

が成り立つとき， A は B の**部分集合(subset)** であるといい



$$A \subseteq B$$

と表す．このとき， A と B の関係は右図のようになり， B は A を**含む(contain)** という．
また，この定義から集合 A は自分自身の部分集合，すなわち $A \subseteq A$ がいえる．
なお，要素をもたない集合である空集合 ϕ は，どのような集合に対しても部分集合であると約束する．
つまり，任意の集合 A に対し， $\phi \subseteq A$ とする．

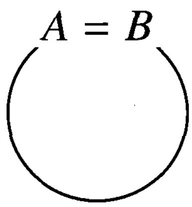
《例》 $X = \{1,2,3\}$ ， $Y = \{1,2,3\}$ ， $Z = \{1,2\}$ のとき

$$X \subseteq Y \quad , \quad Z \subseteq Y \quad , \quad \phi \subseteq Z$$

■集合の相等

2 つの集合 A，B において， $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ のときは， A と B の要素が完全に一致している．このとき， A と B は**等しい(equal)** といい

$$A = B$$



と表す．また，等しくないときは $A \neq B$ と表す．

《例》 $X = \{1,2,3\}$ ， $Y = \{1,2,3\}$ ， $Z = \{2,3,4\}$ のとき

$$X = Y \quad , \quad Y \neq Z$$

■真部分集合

2 つの集合 A，B において， $A \subseteq B$ であるが $A \neq B$ のとき， A は B の**真部分集合(proper subset)** であるといい

$$A \subset B$$

と表す．また，真部分集合でないときは $A \not\subset B$ と表す．

《例》 $X = \{1,2,3\}$ ， $Y = \{1,2,3\}$ ， $Z = \{1,2\}$ のとき

$$X \not\subset Y \quad , \quad Z \subset Y$$

集合における部分集合（ $\subseteq$ ）と真部分集合（ $\subset$ ）の違いは，実数における $\leq$ と $<$ の違いに似ていると考えると覚えやすい．

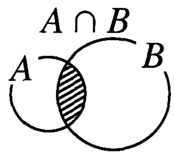
1.2.2 共通部分と和集合

■共通部分

2 つの集合 A, B について, A と B の両方に属する要素全体の集合を, A と B の共通部分といい、 $A\cap B$ と表す。つまり

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{かつ } x\in B\}$$

である. A と B に共通の要素がない場合には $A\cap B=\phi$ となる. 特に, $A\cap A=A$ である.



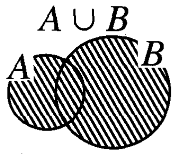
《例》 $X=\{1,2,3,4,5\}$, $Y=\{1,3,5,6\}$, $Z=\{2,4\}$ のとき

$X\cap Y=\{1,3,5\}$, $Y\cap Z=\phi$

■和集合

2 つの集合 A, B について, A と B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を, A と B の**和集合(sum of sets)** といい, $A\cup B$ と表す. つまり

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ または } x\in B\}$$



である. 特に, $A\cup A=A$ である.

《例》 $X=\{1,2,3,4,5\}$, $Y=\{1,3,5,6\}$ のとき

$X\cup Y=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\cup$ はコップのような形をしていて, $\cap$ はこれを裏返したような形をしている.
$\cup$ には水がいっぱい入るが, $\cap$ には水がほとんど入らない. これと対応させて,
要素の個数が多くなる方が $\cup$, 少なくなる方が $\cap$ と覚えよう.

【記憶例題:集合の性質～その1～】

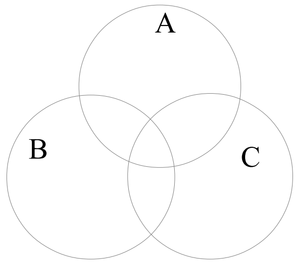
次の等式が成り立つことを, 右の図をつかって確認せよ.

(1) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$



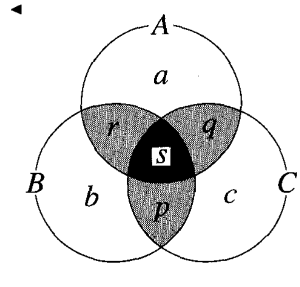
【解答】

(1) $(A\cup B)\cup C$ と $A\cup(B\cup C)$ は右欄外の図において, ともに a, b, c, p, q, r, s のすべてを表し等しい.

また, $(A\cap B)\cap C$ と $A\cap(B\cap C)$ は右欄外の図において, ともに s の部分を表し等しい.

(2) $A\cup(B\cap C)$ と $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ は右欄外の図において, ともに a, p, q, r, s の部分を表し等しい.

また, $A\cap(B\cup C)$ と $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ は右欄外の図において, ともに q, r, s の部分を表し等しい.



集合の性質～その 1～

集合 A, B, C に関して次のことが成り立つ.

i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

ii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

i) は∪ どうしや∩ どうしの演算では，順序は関係のないことを意味しているので，かっこを省略してそれぞれ $A\cup B\cup C$ ， $A\cap B\cap C$ と表すことがある．また，**ii)** は，式の展開法則 $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$ と似ていることに注意すると覚えやすい．

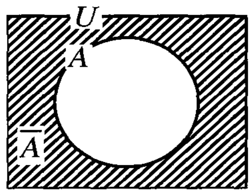
1.2.3 補集合

■全体集合と補集合

1 つの集合 U を定めておいて， U の要素や， U の部分集合だけを考えるとき， U を**全体集合(universal set)** という．全体集合 U の部分集合 A に対して， U の要素ではあるが A に属さない要素全体の集合を A の**補集合(complement)**といい， $\overline{A}$ で表す．つまり

$$\overline{A}=\{x|x\in U \text{ かつ } x\notin A\}$$

である．

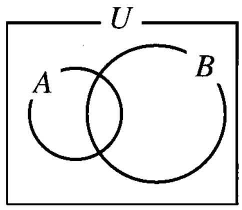


《例》 $X=\{1,2,3,4,5\}$ ， $Y=\{1,3,5\}$ のとき，全体集合 X に関する Y の補集合 $\overline{Y}$ は

$$\overline{Y}=\{2,4\}$$

【記憶例題：集合の性質～その2～】

次の等式が成り立つことを，右の図をつかって確認せよ．



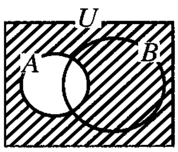
(1) $\overline{(\overline{A})}=A$

(2) $A\cup\overline{A}=U$ ， $A\cap\overline{A}=\phi$

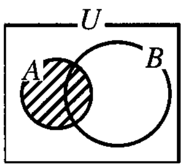
(3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ ， $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

【解答】

(1) まず， A の補集合 $\overline{A}$ は

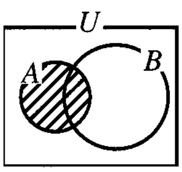


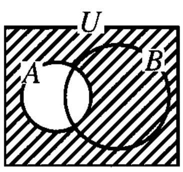
であるから， A の補集合の補集合 $\overline{(\overline{A})}$



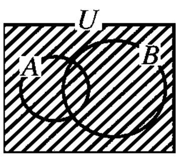
であり，これは**A** と一致する．

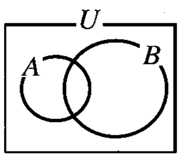
(2) A と $\overline{A}$ はそれぞれ





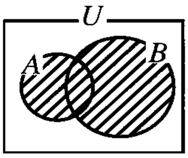
であるから， A と $\overline{A}$ の和集合 $A\cup\overline{A}$ と，共通部分 $A\cap\overline{A}$ はそれぞれ



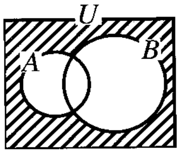


であり，これらは U ， ϕ と一致する．

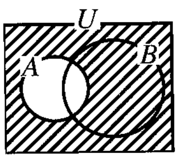
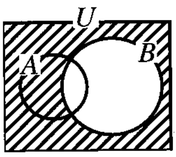
(3) まず, $A\cup B$ は



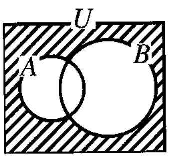
であるから, その補集合 $\overline{A\cup B}$ は



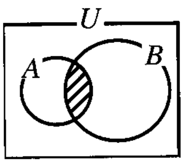
である.
また, $\overline{A}$, $\overline{B}$ はそれぞれ

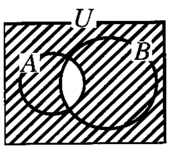
であるから, これらの共通部分 $\overline{A}\cap\overline{B}$ は



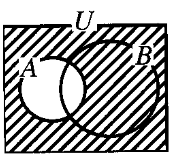
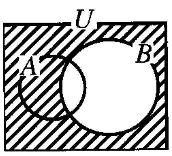
であり, これは先程の $\overline{A\cup B}$ に一致する.
最後に $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ を確認する. まず, $A\cap B$ は



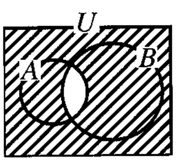
であるから, その補集合 $\overline{A\cap B}$ は



である.
また, $\overline{A}$, $\overline{B}$ はそれぞれ

であるから, これらの和集合 $\overline{A}\cup\overline{B}$ は



であり, これは先程の $\overline{A\cap B}$ に一致する.

集合の性質～その 2～

集合 A, B に関して次のことが成り立つ.

iii) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$
iv) $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$
v) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

特に，この v) の性質は有名で，**ド・モルガンの法則** (law of de Morgan) と呼ばれている.

なお, **iii)** の左辺にある集合**A** の補集合の補集合 $\overline{\left(\overline{A}\right)}$ は, 簡単に $\overline{\overline{A}}$ と書くことがある.

【記憶例題:3 集合の場合のド･モルガンの法則】
次の等式を『**集合の性質～その1～**』,『**集合の性質～その2～**』を用いて証明せよ.

(1) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
(2) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

【解答】
(1) まず $A \cup B$ を**1** かたまりとして考えていく.

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{(A \cup B) \cup C}$$ ◀『集合の性質～その 1～』
$$= \overline{A \cup B} \cap \overline{C}$$ ◀『集合の性質～その 2～』
$$= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$ ◀『集合の性質～その 2～』

(2) まず $A \cap B$ を**1** かたまりとして考えていく.

$$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{(A \cap B) \cap C}$$ ◀『集合の性質～その 1～』
$$= \overline{A \cap B} \cup \overline{C}$$ ◀『集合の性質～その 2～』
$$= \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$ ◀『集合の性質～その 2～』

1.2.4 集合の直積

■直積とは何か

2 つの集合 A，B について, A の要素 a と B の要素 b の, 順序を考えた組 (a, b) 全体がつくる集合を, A と B の**直積(direct product)** といい, $A \times B$ で表す. つまり

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ かつ } b \in B\}$$

である.
《例》 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 3, 5\}$ のとき
$$X \times Y = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5)\}$$

§ 1.3　写像

自動販売機にお金を入れボタンを押すと，商品がでてくる．自動販売機は内部の仕組みはわからなくても，「お金を入れボタンを押す」ことと「飲み物がでてくる」ことは何らかの規則で対応しているのはわかる．このように，途中の仕組みを無視して，何かと何かの対応のみに着目することが便利な場合もある．
数学ではこの対応のことを写像と呼ぶ．

1.3.1　写像

■写像とはなにか

ここでは，集合と集合の対応を調べることによって，写像や関数という考え方を学んでいこう．
例えば，東京駅からJR を使いさまざまな駅に向かうときの乗車券の料金は右の表のようになっている．
このことを「集合」を用いて表すことを考えよう．
まず，向かう駅の集合A を

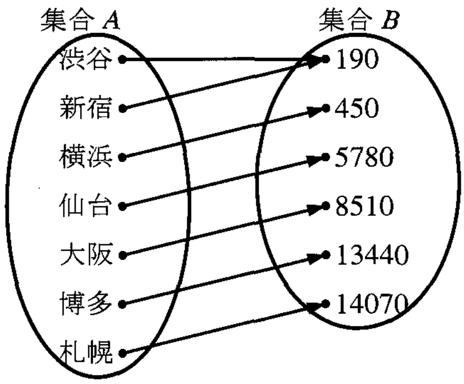
向かう駅	料金（円）
渋谷	190
新宿	190
横浜	450
仙台	5780
大阪	8510
博多	13440
札幌	14070

$$\boldsymbol{A}=\{\text{渋谷, 新宿, 横浜, 仙台, 大阪, 博多, 札幌}\}$$

とし，料金の集合 $\boldsymbol{B}$ を

$$\boldsymbol{B}=\{\mathbf{190, 450, 5780, 8510, 13440, 14070}\}$$

とする．
このように集合 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ を作ると，右図のように $\boldsymbol{A}$ の各要素に $\boldsymbol{B}$ の要素が**1** つずつ対応する．
一般に，**2** つの集合 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ において，ある規則によって



A のどの要素にも，**B** の要素が**1** つずつ対応しているとき，この規則を $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ への**写像(mapping)** といい，記号 $\boldsymbol{f}$ などを用いて

$$\boldsymbol{f}:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$$

と書く．
写像 $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ において，集合 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{f}$ の**定義域(domain of definition)** という．
また，写像 $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ によって，$\boldsymbol{A}$ の要素 $\boldsymbol{a}$ に対応する $\boldsymbol{B}$ の要素を $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ と書き，これを $\boldsymbol{f}$ による $\boldsymbol{a}$ の**像(image)**，または $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における**値(value)** という．さらに，この像（値）全体の集合

$$\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}\}$$

を写像 $\boldsymbol{f}$ の**値域(range)** という．
先程の例でいうなら，定義域は

$$\boldsymbol{A}=\{\text{渋谷, 新宿, 横浜, 仙台, 大阪, 博多, 札幌}\}$$

であり，値域は

$$\boldsymbol{B}=\{\mathbf{190, 450, 5780, 8510, 13440, 14070}\}$$

である．

また, この対応を与えている規則 f による「横浜」の像, つまり f (横浜) は, **450** である.

【例題:定義域・値域】

定義域 A を**10** 以下の自然数とするとき, A の各要素に, その正の約数の個数を対応させる写像 f の値域 B を求めよ.

【解答】

定義域 A は

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

である.

A の各要素の正の約数と, その個数は右の表のようにまとめられるので, 値域 B は

$$B=\{1,2,3,4\}$$

となる.

A	約数	約数の個数
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4

1.3.2 いろいろな写像

写像にはいくつかのパターンがある. ここでは, 写像の代表的なパターンについて見ておこう.
以下では, 写像 f を $f:A\to B$ とする.

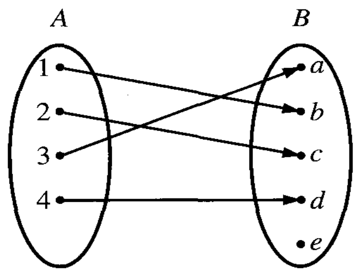
■1 対1 の写像(単射)

A からどのような要素 x, y をとってきても

$f(x)=f(y)$ が成り立つならば, $x=y$ であるとき

f を**1** 対**1** の**写像(one-to-one corespondence)** , または**単射(injection)** という.

単射では, A の要素が異なれば, それに対応する B の要素も異なるので, B の要素に**2** 本以上の矢印が向かうことはなく, あっても**1** 本の矢印しか向かわない.
それゆえ, 単射と覚えるとよい.



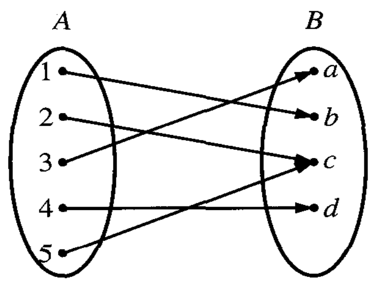
■上への写像(全射)

B のどのような要素 y に対しても

$f(x)=y$ となるような A の要素 x が存在するとき

f を上への**写像(onto-mapping)** , または**全射(surjection)** という.

全射では, B のどのような要素を考えてみても, 矢印の向わないところはなく, 全部の要素に最低**1** 本は矢印が向かっている.
それゆえ, 全射と覚えるとよい. 単射と違い, **2** 本以上の矢印が向かっていてもよい点に注意しよう.

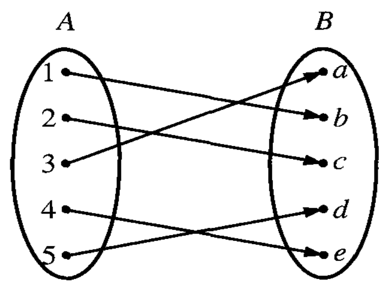


■上への1 対1 写像(全単射)

上への写像であり, かつ**1** 対**1** の写像でもあるものを, 上への**1** 対**1** **写像(onto and one-to-one corespondence)**, または**全単射(bijection)** という.

特に, 集合 A から集合 A への全単射のことを, **置換(substitution)** ともいう.

全単射であるならば, B の要素の個数は A と必ず等しいことに注意しよう.



§ 1.4 集合の要素の個数

有限集合の要素の個数は数えることができる. ここでは, 集合の要素の個数の表し方や, 集合の要素の個数についてに成り立つ関係式を見ていこう.

1.4.1 集合の要素の個数の表し方

集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す. 例えば, 集合 A を1桁の奇数, すなわち

$$A=\{1,3,5,7,9\}$$

とすると, $n(A)=5$ となる. 空集合 ϕ には要素がないので, $n(\phi)=0$ とする.
集合 A と B が等しいとき, A と B の要素の個数も当然等しい, すなわち

$$A=B \quad \text{ならば} \quad n(A)=n(B)$$

が成り立つ. これより,『集合の性質』でみた集合に関する等式は, 集合の要素の個数の場合にもそのまま成り立ち, 次のようにまとめられる.

要素の個数の基本

i) $n((A\cup B)\cup C)=n(A\cup(B\cup C))=n(A\cup B\cup C)$,
   $n((A\cap B)\cap C)=n(A\cap(B\cap C))=n(A\cap B\cap C)$
ii) $n(A\cup(B\cap C))=n((A\cup B)\cap(A\cup C))$,
   $n(A\cap(B\cup C))=n((A\cap B)\cup(A\cap C))$
iii) $n(\overline{\overline{A}})=n(A)$
iv) $n(A\cup\overline{A})=n(U)$, $n(A\cap\overline{A})=0$
v) ド・モルガンの法則
   $n(\overline{A\cup B})=n(\overline{A}\cap\overline{B})$, $n(\overline{A\cap B})=n(\overline{A}\cup\overline{B})$

1.4.2 直積の要素の個数

集合 A の要素の個数 $n(A)=l$, 集合 B の要素の個数 $n(B)=m$ とする.
A と B の直積 $A\times B$ は, A の要素l個それぞれに対して B の要素 m 個を対応させることによって作られるので, $n(A\times B)=l\times m$ が成り立つ.

直積の要素の個数

集合 A, B と, その直積 $A\times B$ の要素の個数に関して

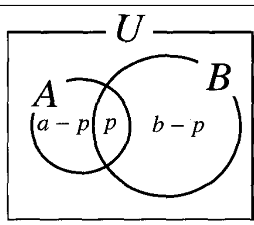
$$n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)$$

が成り立つ.

1.4.3 和集合の要素の個数(包含と排除の原理)

全体集合を U とする, 2つの集合 A, B について

$$n(A)=a \quad , \quad n(B)=b \quad , \quad n(A\cap B)=p$$



であるとすると右図のようになるので

$$n(A\cap\overline{B})=a-p \quad , \quad n(\overline{A}\cap B)=b-p$$

となるのがわかる. これより

$$n(A\cup B)=(a-p)+p+(b-p)=a+b-p$$
$$=\ n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

が成り立ち，これを

包含(ほうがん)と排除(はいじょ)の原理(principle of inclusion and exclusion) という．

包含と排除の原理（2 集合版）

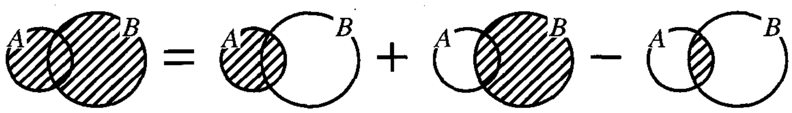
2 つの集合 A，B に関して

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

が成り立つ．

特に，$A\cap B=\emptyset$ のときには，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ となる．

$n(A\cup B)$ の要素の個数を数えるのに，$n(A)$ と $n(B)$ を加えたのでは，$n(A\cap B)$ を**2** 回数えたことになる．そこで，余分な**1** 回分の $n(A\cap B)$ を引くのだと考えると覚えやすい．イメージは下の図のようになる．



【例題：包含と排除の原理（2 集合版）】

$U=\{x|x$ は **100** 以下の自然数$\}$ を全体集合とし，$A=\{x|x$ は**3** の倍数$\}$

$B=\{x|x$ は **5** の倍数$\}$ とするとき，次の値を求めよ．

(1) $n(A)$ **(2)** $n(B)$ **(3)** $n(A\cap B)$ **(4)** $n(A\cup B)$

【解答】

(1) $100\div3=33$ あまり**1** より

$$A=\{3\times1, 3\times2,\cdots,3\times33\}$$

となるのがわかる．よって，$n(A)=33$ である．

(2) $100\div5=20$ より

$$B=\{5\times1, 5\times2,\cdots,5\times20\}$$

となるのがわかる．よって，$n(B)=20$ である．

(3) $A\cap B$ は，**3** の倍数でかつ**5** の倍数の集合だから，結局**15** の倍数の集合である．$100\div15=6$ あまり**10** より

$$A\cap B=\{15\times1, 15\times2,\cdots,15\times6\}$$

となるのがわかる．よって，$n(A\cap B)=6$ である．

(4) 和集合の要素の個数に関して

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

が成り立つから，**(1)**〜**(3)** より

$$n(A\cup B)=33+20-6=47$$

【記憶例題：包含と排除の原理（3 集合版）の導出】

2 つの集合に関する包含と排除の原理

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

を使い，**3** つの集合に関する包含と排除の原理

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

が成り立つのを証明せよ．

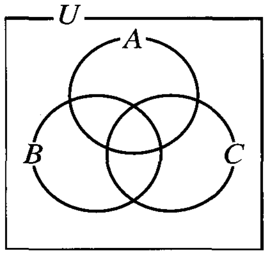
【解答】

$$\begin{aligned}
n(A\cup B\cup C) &= n\{(A\cup B)\cup C\}\\
&= n(A\cup B)+n(C)-n\{(A\cup B)\cap C\}\\
&= n(A\cup B)-n\{(A\cup B)\cap C\}+n(C)\\
&= n(A)+n(B)-n(A\cap B)-n\{(A\cap C)\cup(B\cap C)\}+n(C)\\
&= n(A)+n(B)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n\{(A\cap C)\cap(B\cap C)\}+n(C)\\
&= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\\
&\qquad + n\{(A\cap C)\cap(B\cap C)\}\\
&= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\\
&\qquad + n(A\cap B\cap C)
\end{aligned}$$

包含と排除の原理(3 集合版)

> 3 つの集合 A, B, C に関して
>
> $$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$
>
> が成り立つ.

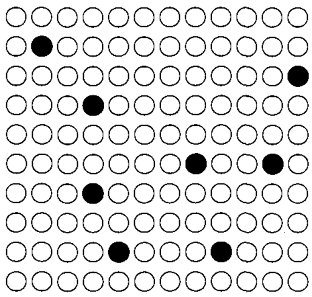
$n(A\cup B\cup C)$ を数えるのに, これを包み込む $n(A)+n(B)+n(C)$ をまず計算する.
すると, 重なっている部分ができてしまうので,
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$ を引くことにより除外する.
しかし, これでは3 つの集合が重なった部分を引きすぎてしまうので,
最後に $n(A\cap B\cap C)$ を加えておく. 右図で確認してみよう.



1.4.4 補集合の要素の個数

■“着目しないもの”に着目する

右図の中にある白丸(○)の個数を数えるには, 実際に白丸の個数を数えるのではなく, 丸が横に**12** 個, 縦に**10** 個, 計**120** 個並んでいるのを確認し, そこから黒丸(●)の個数を引くのがよい. つまり
(白丸の個数)= $\mathbf{12\times 10-8=112}$ 個と数えるのがよい.
このように, 着目しないもの(●)の個数を全体の個数から引くことによって, 着目するもの(○)の個数を数えることができ, 集合では次のようにまとめられる.

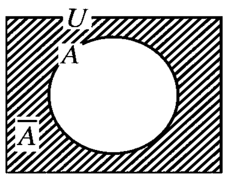


■補集合の要素の個数

全体集合を U とする. 集合 A と, その補集合 $\overline{A}$ について

$$A\cup\overline{A}=U \quad , \qquad A\cap\overline{A}=\phi$$

であるから,『包含と排除の原理』より $n(U)=n(A)+n(\overline{A})$ となる.



補集合の要素の個数

> 全体集合を U とする集合 A と, その補集合 $\overline{A}$ に関して
>
> $$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$$
>
> が成り立つ.

【例題:補集合の要素の個数と包含と排除の原理】

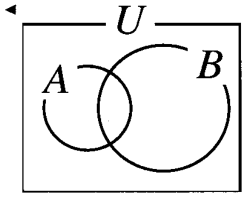
総世帯数が**191**のある地区では，新聞をとっている世帯が**170**ある．このうち A 新聞をとっている世帯は**89**，B 新聞をとっている世帯は**108**ある．その他の新聞はこの地区には無いものとして，以下の問に答えよ．

(1) この地区では新聞をとっていない世帯はいくつか．

(2) A，B 両方の新聞をとっている世帯はいくつか．

【解答】

U :「ある地区の総世帯」
A :「A 新聞をとっている世帯」
B :「B 新聞をとっている世帯」
とおく．



(1) 新聞をとっている世帯は $A\cup B$ と表せるので，新聞をとっていない世帯は $\overline{A\cup B}$ となる．

$$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=191-170=21$$

(2) A，B 両方の新聞をとっている世帯は $A\cap B$ と表される．
和集合の要素の個数に関して

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

が成り立つから

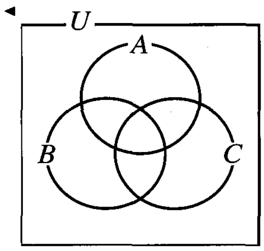
$$\begin{aligned} n(A\cap B)&=n(A)+n(B)-n(A\cup B)\\ &=89+108-170=27 \end{aligned}$$

【例題:補集合の要素の個数と包含と排除の原理(3 集合版)】

300人の高校生に A，B，C の**3**種のテストを行った．A テストに**102**人，B テストに**152**人，C テストに**160**人が合格したが，これらの中で，A，B 両テストに**42**人，B，C 両テストに**62**人，C，A 両テストに**32**人が合格している．**3**種のテストのどれにも合格しなかった人は**10**人であった．このとき，**3**種のテストにすべて合格した人は何人か．

【解答】

U :「テストを受けた高校生全員」
A :「A テストに合格した人」
B :「B テストに合格した人」
C :「C テストに合格した人」
とおくと，**3**種のテストのどれにも合格しなかった人は
$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ と表され，**3**種のテストにすべて合格した人は
$A\cap B\cap C$ で表せる．**3**つの集合の和集合に関して



$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C)=&n(A)+n(B)+n(C)\\ &-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C) \quad \cdots\cdot ① \end{aligned}$$

が成り立ち，また補集合に関して

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C)&=n(U)-n(\overline{A\cup B\cup C})\\ &=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

が成り立つ．① と② より

$$\begin{aligned} n(A\cap B\cap C)&=n(A\cup B\cup C)-n(A)-n(B)-n(C)\\ &\quad +n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\\ &=\{n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\}-n(A)-n(B)-n(C)\\ &\quad +\ n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\\ &=300-10-102-152-160+42+62+32=12 \text{ 人} \end{aligned}$$

第2章

論理と集合

§ 2.1 命題

ものごとの価値を決める尺度には，楽しさ，美しさ，善さなど，いろいろなものがある．数学では，正しさに最大の関心を払う．絶対に正しいといい切れるものを，証明という手段で徐々に積み上げて，数学は構築されている．ここでは，正しさを扱うための基本単位となる命題について学んでいこう．

2.1.1 命題と真・偽

■"正しい"ということ"正しくない"ということ

次の4 つの事柄について，"正しい"か"正しくない"かという点について考えてみよう．

i) 日本の首都は東京である

ii) ペンギンは魚類である

iii) 実数を2 乗すると0 以上になる

iv) 2 つの実数 a，b に対し $ab>0$ ならば， $a>0$ かつ $b>0$ である

まず，i) に関して．日本の首都は東京であるので，疑い無く"正しい"といえる．
次に，ii) に関して．ペンギンは鳥類なので，この文章は間違っている．"正しい"か"正しくない"かと聞かれたら，"正しくない"といえるだろう．
そして，iii) に関して．実数は，正・負・0 の3 つに分類でき，正の実数の2 乗は正，負の実数の2 乗は正，0 の2 乗は0 であるから，いずれにしても2 乗した結果は0 以上となる．ゆえに，この文章は"正しい"といえる．
最後に，iv) に関して． $ab>0$ ということはいいかえるならば， a と b が同じ符号（+，−）をもつということである． a と b が同じ符号であるということには， $a>0$ かつ $b>0$ という場合もあるが， $a<0$ かつ $b<0$ という場合もあるということである．その点において，この文章は"正しい"とはいいきれないため，"正しくない"ということにする．

■命題と真・偽

式や文章で表された事柄で，"正しい"か"正しくない"かのどちらか一方に定まるものを**命題(proposition)**という．
「カレーライスはおいしい」のように，"正しい"か"正しくない"かの判断が人によって異なるものや，「今何時？」のように，"正しい"か"正しくない"がそもそも決定できないものは，命題として扱わない．
命題が"正しい"とき，その命題は**真(true)** であるといい，命題が"正しくない"とき，その命題は**偽(false)** であるという．
数を a，b，c，・・・ などのアルファベットで表すように，命題もアルファベットの p，q などで表す

> **命題と真・偽**
>
> 式や文章で表された事柄で，"正しい" か "正しくない" かのどちらか一方に定まるものを**命題**（めいだい）という．命題が "正しい" とき，その命題は**真**（しん）であるといい，命題が "正しくない" とき，その命題は**偽**（ぎ）であるという．

【例題：真・偽の判断】

次の命題の真偽をいえ．

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{5}$　　(2) $2^{16}=65536$

(3) $x^2=9$ ならば $x=3$　　(4) $x=3$ ならば $x^2=9$

(5) 整数 a，b の積が偶数ならば， a または b は偶数である．

(6) 整数 a，b の積が奇数ならば， a と b はともに奇数である．