第8章　積分法の応用

52　面　　積

1　面積の公式　($a<b$, $c<d$ とする)

① 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S

$f(x)\geqq 0$ ならば $S=\int_a^b f(x)dx$, $f(x)\leqq 0$ ならば $S=-\int_a^b f(x)dx$

② 2曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ および2直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S　　$f(x)\geqq g(x)$ ならば $S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

③ 曲線 $x=g(y)$ と y 軸および2直線 $y=c$, $y=d$ で囲まれた部分の面積 S

$g(y)\geqq 0$ ならば $S=\int_c^d g(y)dy$

④ 曲線が $F(x, y)=0$ の形の場合は，$y=f(x)$ [$x=f(y)$] の形に変形する。

注意　面積を求めるときは，グラフをかいて，曲線と座標軸，曲線と曲線の共有点や位置関係を明確にする。また，対称性を利用するとよい。

2　媒介変数表示の場合の面積　($a<b$ とする)

曲線 $x=f(t)$, $y=g(t)$ と x 軸および2直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は，$a=f(\alpha)$, $b=f(\beta)$ とすると　$S=\int_a^b |y|dx=\int_\alpha^\beta |g(t)|f'(t)dt$

A

483　次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

*(1) $y=x^3-4x^2+4x$　　(2) $y=-\sqrt{x}$, $x=2$

*(3) $y=\sin x$　$(\pi\leqq x\leqq 2\pi)$　　(4) $y=e^x$, $x=0$, $x=1$

484　次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

*(1) $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{x}{2}$　　(2) $y=\dfrac{5}{x}$, $y=-x+6$

*(3) $y=\sin x$, $y=-\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq \dfrac{3}{4}\pi\right)$　　(4) $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$

485　次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

*(1) $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $y=4$, y 軸　　(2) $y=\log x$, $y=1$, $y=2$, y 軸

*(3) $x=2y-y^2$, y 軸　　(4) $y^2=x-1$, $y=x-1$

A のまとめ

486　曲線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ で囲まれた部分の面積を次の方法で求めよ。

(1) x について積分　　(2) y について積分

$F(x, y)=0$ のグラフの面積

例題 64　曲線 $2x^2+2xy+y^2=1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

指針　**$F(x, y)=0$ のグラフと面積**　曲線の方程式 $F(x, y)=0$ を x か y について解き，曲線の概形や積分される関数を明らかにする。

解答　$2x^2+2xy+y^2=1$ から　$y^2+2xy+2x^2-1=0$

これを y について解くと

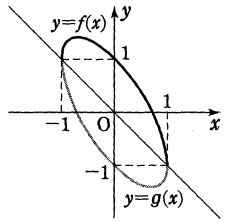
$y=-x\pm\sqrt{x^2-(2x^2-1)}=-x\pm\sqrt{1-x^2}$

$1-x^2\geqq 0$ から，曲線は $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲。

$f(x)=-x+\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=-x-\sqrt{1-x^2}$

とすると，定義域内で　$f(x)\geqq g(x)$　　よって

$S=\int_{-1}^1 \{f(x)-g(x)\}dx=2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$



このとき，曲線 $y=\sqrt{1-x^2}$ は円 $x^2+y^2=1$ の上半分を表すから

$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\dfrac{\pi}{2}$　　したがって　$S=\pi$　答

B

487　次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

*(1) $y=\sin x$, $y=\sin 2x$　$(0\leqq x\leqq \pi)$　　*(2) $y=xe^{1-x}$, $y=x$

(3) $y=\dfrac{1}{x\log x}$, $y=0$, $x=\sqrt{e}$, $x=e$　　(4) $y=(x-e)\log x$, $y=0$

■ 次の曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。[**488**, **489**]

***488**　(1) $2x^2+3y^2=6$　　(2) $y^2=x^2(4-x^2)$　　(3) $|y+1|=x|x-3|$

489　*(1) $5x^2+2xy+y^2=16$　　(2) $2x^2-2xy+y^2-4x+2y=0$

490　次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

*(1) $x=2t$, $y=2t-t^2$, x 軸　　(2) $x=\sin t$, $y=\cos 2t$, x 軸

(3) $x=3\cos\theta$, $y=4\sin\theta$　　*(4) $x=\cos^3\theta$, $y=\sin^3\theta$

*(5) $x=2t-\sin t$, $y=1-\cos t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$, x 軸

***491**　楕円 $\dfrac{(x-3)^2}{3^2}+\dfrac{(y-2)^2}{2^2}=1$ … ① の内部の面積 S を次の方法で求めよ。

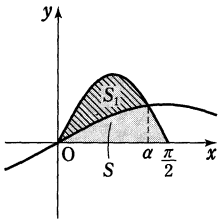
(1) ① の上側を $y_1=f(x)$，下側を $y_2=g(x)$ として $S=\int_0^6 (y_1-y_2)dx$

(2) ① を $x(\theta)=3-3\cos\theta$, $y(\theta)=2+2\sin\theta$ として $S=\int_0^{2\pi} y(\theta)x'(\theta)d\theta$

例題 65 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，曲線 $y=\sin 2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を曲線 $y=a\sin x$ $(a>0)$ が 2 等分する。このとき，定数 a の値を求めよ。

指針 **面積の等分**　2 つの部分の面積 S_1 と S_2 を計算して $S_1=S_2$ または $S=2S_1$

解答 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，曲線 $y=\sin 2x$ と $y=a\sin x$ が囲む部分の面積を S_1，2 曲線の原点以外の共有点の x 座標を α とおく。



$\sin 2x=a\sin x$ から　$2\sin x\cos x=a\sin x$

ゆえに，$2\cos\alpha=a$ $(0<a<2)$ とおける。

右の図から　$S_1=\int_0^{\alpha}(\sin 2x-a\sin x)dx$

$$=\left[-\frac{\cos 2x}{2}+a\cos x\right]_0^{\alpha}=-\frac{\cos 2\alpha}{2}+a\cos\alpha+\frac{1}{2}-a$$

$$=\frac{(a-2)^2}{4}$$

一方　$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=1$　　$2S_1=S$，$0<a<2$ から　$\boldsymbol{a=2-\sqrt{2}}$　答

B

492 曲線 $C: y=xe^{-x}$ について

(1) 曲線 C の変曲点における接線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C，(1) で求めた接線，y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

***493** 曲線 $y=e^x$ と，原点からこの曲線に引いた接線および y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

494 2 曲線 $y=ax^2$ と $y=\log x$ が，ある点で共通の接線をもつ。

(1) 定数 a の値と接点の座標を求めよ。

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

***495** 2 曲線 $y=x\sin x$，$y=k\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ が囲む総面積が最小となるような定数 k $(0 \leqq k \leqq \pi)$ の値と，そのときの総面積を求めよ。

***496** 点 $(1,\ 1)$ を通る直線と両軸によってできる三角形の面積が，曲線 $y=\sqrt{x}$ によって 2 等分されるとき，この直線の傾きを求めよ。

53 体　積

1 体積の公式

① $a \leqq x \leqq b$ において，x 軸に垂直な平面による切り口の面積が $S(x)$ である立体の体積 V　　$V=\int_a^b S(x)dx$

② 曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ が x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V

$$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx=\pi\int_a^b y^2dx$$

③ 曲線 $x=g(y)$ $(c \leqq y \leqq d)$ が y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V

$$V=\pi\int_c^d\{g(y)\}^2dy=\pi\int_c^d x^2dy$$

A

497 定積分を用いて次の立体の体積を求めよ。

(1) 1 辺の長さが 5 の正方形を底面とする高さ 4 の四角錐

(2) 半径が 3 の球　　(3) 1 辺の長さが 4 の正四面体

498 次の曲線や直線で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

*(1) $y=x^2-9$，$y=0$　　(2) $y=x(x^2-1)$，$y=0$

*(3) $y=2\sqrt{x-1}$，$x=2$，$y=0$　　(4) $y=\cos x$，$y=0$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

499 次の図形で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

*(1) $9x^2+4y^2=36$　　(2) $y^2=x$，$x=1$

500 次の曲線や直線で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

*(1) $y=3-x^2$，$y=0$　　*(2) $9x^2+4y^2=36$

(3) $y=\sqrt{x}$，$x=0$，$y=1$　　(4) $y=\log(x+2)$，$x=0$，$y=0$

A のまとめ

501 次の図形を x 軸，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積をそれぞれ求めよ。

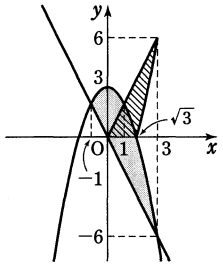
(1) $y=x^2-1$，x 軸　　(2) $y=\sqrt{x+4}$，x 軸，y 軸

(3) $4x^2+3y^2=12$　　(4) $x^2+y^2=9$

回転体の体積（軸の両側）

例題 66 曲線 $y=-x^2+3$ と直線 $y=-2x$ で囲まれた部分Aを，x軸の周りに1回転させてできる立体の体積Vを求めよ。

指針 **軸の両側にある図形の回転**　軸の一方側の図形の回転に直して考える。



解答 グラフは右の図のようになる。Aのうち，x軸より下方の部分の回転は，x軸の上方の斜線部分の回転と同じである。

$$V=\pi\int_{-1}^{1}(-x^2+3)^2dx+\pi\int_{1}^{3}(2x)^2dx$$
$$-\pi\int_{\sqrt{3}}^{3}(x^2-3)^2dx-\pi\int_{-1}^{0}(-2x)^2dx$$
$$=\left(\frac{24\sqrt{3}}{5}+\frac{392}{15}\right)\pi$$ 答

B

502 次の曲線や直線で囲まれた部分をx軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

*(1) $y=5-x^2$，$y=x+3$　　(2) $y=-x^2+5x$，$y=x^2+2$

***503** 曲線 $y=6-x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を [1] x軸，[2] 直線 $y=2$ の周りに1回転させてできる立体の体積をそれぞれ求めよ。

***504** 曲線 $y=-x^2+2x+2$ とx軸 $(x\geqq 0)$ とy軸で囲まれた部分をy軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

***505** 円 $x^2+(y-3)^2=9$ をx軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

506 次の曲線や直線で囲まれた部分を，x軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

*(1) $y=-x^2+2$，$y=-x$　　(2) $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ $\left(\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi\right)$

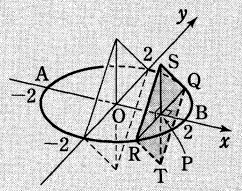
507 次の曲線や直線で囲まれた部分を，x軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1) $x=2\cos\theta$，$y=3\sin\theta$，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$

*(2) $x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$，$y=0$

立体図形の体積

例題 67 円 $x^2+y^2=4$ の直径AB上に，点Pをとる。Pを通りABに垂直な弦QRが対角線となる正方形QSRTを，ABに垂直に作る。PがAからBまで移動するとき，この正方形が通過してできる立体の体積Vを求めよ。



指針 **立体図形の体積**　内容を正確に把握して，点Pにおける断面積を求める。

解答 Pの座標を $(x,\ 0)$ とすると，QRを対角線とする正方形の面積 $S(x)$ は

$S(x)=2\mathrm{PQ}^2=2y^2$　　ところで，$x^2+y^2=4$ から　$y^2=4-x^2$

したがって　$S(x)=2(4-x^2)=8-2x^2$

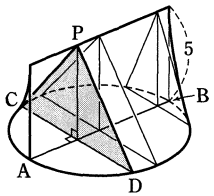
よって　$V=\int_{-2}^{2}S(x)dx=\int_{-2}^{2}(8-2x^2)dx=2\left[8x-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=\frac{64}{3}$ 答

B

508 曲線 $y=9-x^2$ $(-3\leqq x\leqq 3)$ とx軸で囲まれた部分が，y軸の周りに1回転してできる立体の体積を，曲線 $y=kx^2$ がy軸の周りに1回転したときにできる曲面で2等分したい。このとき，定数kの値を求めよ。

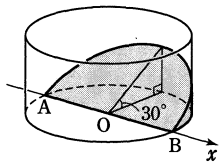
***509** 曲線 $y^2=x$ と直線 $y=2ax$ で囲まれた図形がある。これをx軸の周りに1回転させてできる立体とy軸の周りに1回転させてできる立体とが等しい体積であるように，定数aの値を定めよ。

***510** 右の図のように，底面が直径10の円で高さが5，直径ABに垂直な断面がPC=PDの二等辺三角形となる立体がある。この立体の体積を求めよ。



***511** 半径rの半球状の容器が，水をいっぱい入れて平面上においてある。この容器を静かに45°傾けたとき，残った水の体積を求めよ。

***512** 底面の半径が10で高さも10の直円柱がある。この底面の直径ABを含み底面と30°の傾きをなす平面で，直円柱を2つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ。



54 曲線の長さ，速度と道のり

1 曲線の長さ

① **媒介変数**　曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ の長さ L は

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

② **直交座標**　曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

2 速度と道のり

① **数直線上の道のり**　数直線上を運動する点Pの速度を $v=f(t)$ とし，$t=a$ のときのPの座標を k とする。

[1] $t=b$ におけるPの座標 x は　$x=k+\int_a^b f(t)dt$

[2] $t=a$ から $t=b$ までのPの位置の変化量 s は　$s=\int_a^b f(t)dt$

[3] $t=a$ から $t=b$ までのPの道のり l は　$l=\int_a^b |f(t)|dt$

② **平面上の道のり**　座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標を $(x,\ y)$，速度を $\vec{v}$ とすると，時刻 $t=\alpha$ から時刻 $t=\beta$ までの道のり l は

$$l=\int_\alpha^\beta |\vec{v}|dt=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

A

■次の曲線の長さを求めよ。[**513**，**514**]

513 *(1) $x=3t^2$，$y=3t-t^3$ $(0 \leqq t \leqq 2)$　(2) $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

514 (1) $y=x\sqrt{x}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$　*(2) $y=\sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$

(3) $y=\log(\cos x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}\right)$　*(4) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $(0 \leqq x \leqq \log 2)$

515 直線上を動く点Pの，時刻 t における速度 v が $t^2-2\sqrt{t}$ であるとする。$t=0$ から $t=4$ までに，Pの位置はどれだけ変化するか。また，実際に通過した道のり l を求めよ。

A のまとめ

516 (1) 曲線 $x=t^3$，$y=t^2$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の長さを求めよ。

(2) 直線上を動く点Pの時刻 t における速度が t^2-t とする。$t=0$ から $t=3$ までの道のりを求めよ。

平面上の点の速度，道のり

例題 68　平面上を動く点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として $x=t-\sin t$，$y=1+\cos t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表されている。

(1) 点Pが座標 $(\pi,\ 0)$ を通るときの速度 $\vec{v}$ を求めよ。

(2) 点Pが時刻 0 から 2π までに通過する道のり l を求めよ。

指針　**平面上の動点の速度**　時刻 t における点Pの座標を $(f(t),\ g(t))$ とすると速度 $\vec{v}$ は　$\vec{v}=(f'(t),\ g'(t))$　　また道のり l は　$l=\int_0^{2\pi}|\vec{v}|dt$

解答　(1) 点Pが $(\pi,\ 0)$ のとき　$\pi=t-\sin t$，$0=1+\cos t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

よって　$t=\pi$　　したがって，$P(\pi,\ 0)$ となる時刻は　$t=\pi$

$x=t-\sin t$，$y=1+\cos t$ から　$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(1-\cos t,\ -\sin t)$

これに $t=\pi$ を代入すると　$\vec{v}=(2,\ 0)$　答

(2) $l=\int_0^{2\pi}|\vec{v}|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(-\sin t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt$

$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=2\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8$　答

B

517 次の曲線の長さを求めよ。

*(1) $x=e^\theta\cos\theta$，$y=e^\theta\sin\theta$　$(0 \leqq \theta \leqq 1)$

(2) $x=2(\cos\theta+\theta\sin\theta)$，$y=2(\sin\theta-\theta\cos\theta)$　$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

***518** 曲線 $9y^2=(x+5)^3$ と y 軸で囲まれた図形の周の長さを求めよ。

***519** 数直線上を，原点から初速度 2 で出発して，t 秒後の加速度が $\alpha=\sin t(1+4\cos t)$ で与えられる運動をする点Pがある。

(1) 出発してから t 秒後の速度 v と点の位置を求めよ。

(2) 出発してから π 秒後までの道のりを求めよ。

***520** xy 平面上を運動する点Pの速度ベクトルが，時刻 t の関数として $(1-\cos t,\ \sin t)$ で表される。$t=0$ から $t=\pi$ までの道のりを求めよ。

521 平面上を動く点Pの，時刻 t における座標は $(\cos 2t,\ 4\sin t)$ である。点Pが $t=0$ から $t=\pi$ まで動いたとき，次のものを a で表せ。ただし $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=a$ とする。

(1) 点Pが動いた道のり　　(2) 点Pが動いてできる曲線の弧の長さ

55 指 発展 微分方程式

＊＊＊p. 116, 117 では学習指導要領の範囲を越えた内容を扱っている。

1 微分方程式とその解

① **微分方程式**　未知の関数の導関数を含む等式。

例　$\dfrac{dy}{dx}=x+1$,　$\dfrac{dy}{dx}=y$

② **微分方程式の解**　与えられた微分方程式を満たす関数。
微分方程式を解くと，いくつかの任意の定数を含んだ解が得られる。

2 微分方程式の解法

① $\dfrac{dy}{dx}=f(x)$,　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=g(x)$ などの解は，両辺を積分して求める。

② $f(y)\dfrac{dy}{dx}=g(x)$ の解は $\int f(y)dy=\int g(x)dx$ から求める。

③ x と y が混ざっているときは，分離して求める。

例　$\dfrac{dy}{dx}=x+xy \Rightarrow \dfrac{1}{1+y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=x$

発展

522　A, B は定数とする。次の関数は，右に示した微分方程式を満たすことを示せ。

(1)（関数）$y=Ax$　　（微分方程式）$y=xy'$

(2)（関数）$y=Ae^x+Be^{-x}$　　（微分方程式）$y''=y$

(3)（関数）$y=Ax+\dfrac{B}{x}$　　（微分方程式）$x^2y''+xy'-y=0$

(4)（関数）$y=A\sin x+B\cos x$　　（微分方程式）$y+y''=0$

523　次の条件を満たす曲線を微分方程式で表せ。

*(1) 曲線上の点 (x, y) の y 座標とその点における接線の傾きが常に等しい。

*(2) 曲線上の各点における法線が，常に原点を通る。

(3) 曲線上の点Pにおける接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれQ，Rとするとき，常にPが線分QRの中点になっている。

(4) 曲線上の点Pにおける接線が x 軸，y 軸によって切りとられる部分の長さが常に1である。

524　直線上で，定点Oから遠ざかる点PがOから x m の距離にあるとき，x^3 m/s の速度をもつとする。この関係を微分方程式で表せ。

微分方程式の解法

例題 69

(1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=x+xy$ を解け。

(2) (1)の関数のグラフが原点を通るとき，関数を定めよ。

指針 **微分方程式の解法**　x と y が混ざっているときは分離して $f(y)\dfrac{dy}{dx}=g(x)$

解答

(1) $\dfrac{dy}{dx}=x+xy$ から　$\dfrac{dy}{dx}=x(1+y)$

[1] $y\neq-1$ のとき，$\dfrac{1}{1+y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=x$ から　$\int\dfrac{1}{1+y}\cdot\dfrac{dy}{dx}dx=\int x\,dx$

$\int\dfrac{1}{1+y}dy=\int x\,dx$　よって　$\log|1+y|=\dfrac{x^2}{2}+C$（$C$は積分定数）

ゆえに　$|1+y|=e^ce^{\frac{x^2}{2}}$　　すなわち　$y=\pm e^ce^{\frac{x^2}{2}}-1$

ここで，$\pm e^c=A$ とおくと，Aは0以外の任意の値をとる。

したがって，解は　$y=Ae^{\frac{x^2}{2}}-1$, $A\neq0$

[2] $y=-1$ は，もとの微分方程式を満たすから解である。

ところで，[2]における解 $y=-1$ は，[1]における解 $y=Ae^{\frac{x^2}{2}}-1$ において，$A=0$ とおくと得られる。

ゆえに求める解は　$\boldsymbol{y=Ae^{\frac{x^2}{2}}-1}$, **$A$は任意の定数**　答

(2) $(x, y)=(0, 0)$ を満たすので，(1)で求めた解に代入すると　$0=A-1$

よって　$A=1$　　したがって，求める関数は　$\boldsymbol{y=e^{\frac{x^2}{2}}-1}$　答

発展

525　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx}=x$　　*(2) $\dfrac{dy}{dx}=\cos x$　　(3) $\dfrac{dy}{dx}=e^x$

(4) $yy'=1-x$　　(5) $xy'+1=y$　　*(6) $xy'+y=y'+1$

526　次の微分方程式について，（　）内の条件を満たす解を求めよ。

*(1) $y'=(2x-1)^3$　（$x=0$ のとき $y=1$）

(2) $(2-x)y'=1$　（$x=1$ のとき $y=0$）

***527**　$f(x)=x+\int_0^x f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

***528**　曲線 $y=f(x)$ は原点Oを通り，O以外の曲線上の点 $P(x, y)$ については，その点における接線の傾きが常に直線OPの傾きの2倍である。また，この曲線は点 $A(1, 2)$ を通る。この曲線の方程式を求めよ。

56 第8章 演習問題

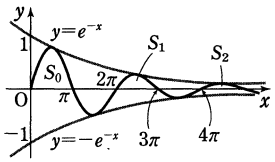
面積と無限級数

例題 70 曲線 $y=e^{-x}\sin x$ $(x\geqq 0)$ と x 軸で囲まれた図形で，x 軸の上側にある部分の面積を y 軸に近い方から順に S_0，S_1，……，S_n，…… とするとき，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}S_k$ を求めよ。

指針 **図形の面積** まずグラフをかく。

$y=e^{-x}\sin x$ $(x\geqq 0)$ のグラフは，右の図のようになる。そして

$$S_0=\int_0^{\pi}y\,dx,\ S_1=\int_{2\pi}^{3\pi}y\,dx,\ \cdots\cdots$$



解答 曲線 $y=e^{-x}\sin x$ $(x\geqq 0)$ と x 軸との交点の x 座標は，$e^{-x}\sin x=0$ から

$\sin x=0$　　ゆえに　$x=n\pi$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

また　$\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx$　←部分積分

$$=-e^{-x}\cos x-\left(e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\sin x\,dx\right)$$

よって　$\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C$ （Cは積分定数）

したがって　$S_k=\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\left[e^{-x}(\cos x+\sin x)\right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}$

$$=\frac{1}{2}\{e^{-(2k+1)\pi}+e^{-2k\pi}\}$$

よって　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n}e^{-(2k+1)\pi}+\sum_{k=0}^{n}e^{-2k\pi}\right\}=\frac{e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}$　答

B

***529** 2つの楕円 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，$x^2+\frac{y^2}{3}=1$ の共通部分の面積を求めよ。

***530** 曲線 C：$x=1-t^4$，$y=t-t^3$ $(0\leqq t\leqq 1)$ について

(1) $\frac{dy}{dx}$ を求め，曲線Cの概形をかけ。

(2) 曲線Cと x 軸で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

(3) 点 $(x,\ y)$ が曲線C上を動くとき，$x+2y$ の最大値を求めよ。

***531** $x\geqq 0$ において，曲線 $y=e^{-x}\sin x$ と x 軸で囲まれたすべての部分の面積の総和を求めよ。

空間図形の回転体

例題 71 空間内の2点 A(0, 2, 0)，B(1, 0, 3) を通る直線を ℓ とし，直線 ℓ を x 軸の周りに1回転して得られる図形をMとする。図形Mと2つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積Vを求めよ。

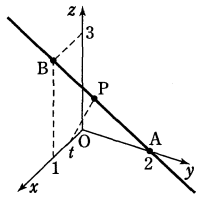
指針 **x 軸の周りの回転体**　x 軸に垂直な平面で切った断面積を求める。

解答 直線 ℓ 上の点Cは，s を実数として，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$ と表される。

$\overrightarrow{OC}=(0,\ 2,\ 0)+s(1,\ -2,\ 3)=(s,\ 2-2s,\ 3s)$

よって，x 座標が t である点Pの座標は $s=t$ として

P$(t,\ 2-2t,\ 3t)$



図形Mを平面 $x=t$ で切ったときの断面は，中心が $(t,\ 0,\ 0)$，半径 $\sqrt{(2-2t)^2+(3t)^2}$ の円である。

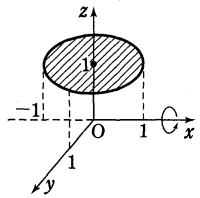
ゆえに，その断面積を $S(t)$ とすると　$S(t)=\pi\{(2-2t)^2+(3t)^2\}$

よって　$V=\pi\int_0^1\{(2-2t)^2+(3t)^2\}dt=\pi\int_0^1(13t^2-8t+4)dt=\frac{13}{3}\pi$　答

発展

***532** 空間内の2点 P(0, 1, −1) と Q(1, −1, 0) を通る直線を ℓ とし，直線 ℓ を y 軸の周りに1回転してできる図形と2つの平面 $y=1$ および $y=-1$ で囲まれた立体をAとする。立体Aの体積Vを求めよ。

533 空間に円盤 $x^2+y^2\leqq 1$，$z=1$ がある。これを x 軸の周りに1回転してできる立体の体積Vを求めよ。



***534** 直線 $y=x$ と曲線 $y=x^2-x$ で囲まれた部分を直線 $y=x$ の周りに1回転してできる立体の体積Vを求めよ。

535 区間 $a\leqq x\leqq b$ $(0\leqq a<b)$ で $f(x)\geqq 0$ とする。曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに1回転してできる立体の体積Vは $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$ で表される。このことを利用して，次の図形を y 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。

(1) 曲線 $y=-x^2+6x$ と x 軸で囲まれた図形

*(2) 曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸で囲まれた図形

483 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (3) 2 (4) $e-1$

484 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $12-5\log 5$ (3) $2\sqrt{2}$

(4) $e+\frac{1}{e}-2$

485 (1) $\frac{56}{3}$ (2) e^2-e (3) $\frac{4}{3}$

(4) $\frac{1}{6}$ [(1) $\int_2^4 y^2dy$ (2) $\int_1^2 e^y dy$

(3) $\int_0^2(2y-y^2)dy$ (4) $\int_0^1\{y+1-(y^2+1)\}dy$]

486 $\frac{32}{3}$ [(1) $\int_{-1}^3(2x+3-x^2)dx$

(2) $\int_0^1\{\sqrt{y}-(-\sqrt{y})\}dy+\int_1^9\left(\sqrt{y}-\frac{y-3}{2}\right)dy$]

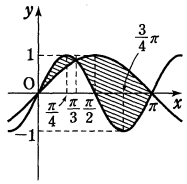
487 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $e-\frac{5}{2}$ (3) $\log 2$

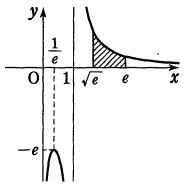
(4) $-\frac{e^2}{4}+e-\frac{1}{4}$ [(1), (3) 参考図参照

(2) $\int_0^1(xe^{1-x}-x)dx$

(4) $-\int_1^e(x-e)\log x\,dx$]

(1) 〔参考図〕 (3) 〔参考図〕





488 (1) $\sqrt{6}\pi$ (2) $\frac{32}{3}$ (3) 9

[(1) $4\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{2-\frac{2}{3}x^2}\,dx$

(参考) 曲線 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた部分の面積は πab である (2) $4\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

(3) $2\int_0^3\{\{-x(x-3)-1\}-(-1)\}dx$]

489 (1) 8π (2) 2π

[(1) $y=-x\pm 2\sqrt{4-x^2}$ から

$4\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

(2) $y=x-1\pm\sqrt{-(x-1)^2+2}$ から

$2\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\sqrt{-(x-1)^2+2}\,dx$]

490 (1) $\frac{8}{3}$ (2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(3) 12π (4) $\frac{3}{8}\pi$ (5) 5π

[(1) $\int_0^4 y\,dx=\int_0^2(2t-t^2)\cdot 2dt$

(2) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\cdot\cos t\,dt$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(\cos 3t+\cos t)dt$

(3) $\int_{-3}^3 y(\text{上側})dx-\int_{-3}^3 y(\text{下側})dx$

$=\int_{\pi}^0 4\sin\theta\cdot(-3\sin\theta)d\theta$

$-\int_{\pi}^{2\pi}4\sin\theta\cdot(-3\sin\theta)d\theta$

(4) $4\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^3\theta\cdot 3\cos^2\theta(-\sin\theta)d\theta$

(5) $\int_0^{4\pi}y\,dx=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)(2-\cos t)dt$]

491 6π

[(参考1) (2) $S=\int_0^{2\pi}y(\theta)x'(\theta)d\theta$ の求め方

$S=\int_0^6 y_1dx-\int_0^6 y_2dx$

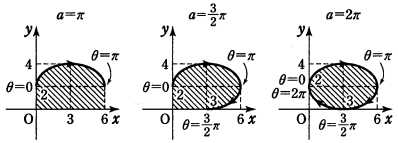
$=\int_0^{\pi}y(\theta)x'(\theta)d\theta-\int_{2\pi}^{\pi}y(\theta)x'(\theta)d\theta$

$=\int_0^{\pi}y(\theta)x'(\theta)d\theta+\int_{\pi}^{2\pi}y(\theta)x'(\theta)d\theta$

$=\int_0^{2\pi}y(\theta)x'(\theta)d\theta$

(参考2) (2) $S=\int_0^a y(\theta)x'(\theta)d\theta$ の値

$a=\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$ としたときの S の値はそれぞれ下の図の面積を表す]



492 (1) $y=-\frac{x}{e^2}+\frac{4}{e^2}$ (2) $\frac{9}{e^2}-1$

[(1) 変曲点の座標は $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$

(2) $\int_0^2\left(-\frac{x}{e^2}+\frac{4}{e^2}-xe^{-x}\right)dx$]

493 $\frac{e}{2}-1$ [$\int_0^1(e^x-ex)dx$]

494 (1) $a=\frac{1}{2e},\ \left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2}\right)$ (2) $\frac{2\sqrt{e}}{3}-1$

[(1) 接点の x 座標を x_1 とすると

$2ax_1=\frac{1}{x_1},\ ax_1{}^2=\log x_1$

(2) $\int_0^{\sqrt{e}}\frac{x^2}{2e}dx-\int_1^{\sqrt{e}}\log x\,dx$]

495 $k=\frac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\pi-2$

[面積は $\int_0^k(k\sin x-x\sin x)dx$

$+\int_k^{\pi}(x\sin x-k\sin x)dx=\pi-2\sin k$]

496 $\frac{-1-\sqrt{10}}{3}$ [直線の傾きを m とおくと,

三角形の面積は $\frac{1}{2}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot(-m+1)$

これが, $\int_0^1\sqrt{x}\,dx+\frac{1}{2}\left(\frac{m-1}{m}-1\right)\cdot 1$

の2倍であればよい]

497 (1) $\frac{100}{3}$ (2) 36π (3) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

[(1) $\int_0^4\left(\frac{5}{4}h\right)^2dh$ (2) $\int_{-3}^3\pi(9-x^2)dx$

(3) $\int_0^{\frac{4}{3}\sqrt{6}}\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2dx$]

498 (1) $\frac{1296}{5}\pi$ (2) $\frac{16}{105}\pi$ (3) 2π

(4) $\frac{\pi^2}{2}$ [(1) $\pi\int_{-3}^3(x^2-9)^2dx$]

499 (1) 24π (2) $\frac{\pi}{2}$

[(1) $\pi\int_{-2}^2 y^2dx=\pi\int_{-2}^2\left(9-\frac{9}{4}x^2\right)dx$

(2) $\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1 x\,dx$]

500 (1) $\frac{9}{2}\pi$ (2) 16π (3) $\frac{\pi}{5}$

(4) $\left(-\frac{5}{2}+4\log 2\right)\pi$

[(1) $\pi\int_0^3 x^2dy=\pi\int_0^3(3-y)dy$

(2) $\pi\int_{-3}^3 x^2dy=\pi\int_{-3}^3\frac{36-4y^2}{9}dy$

(3) $\pi\int_0^1 x^2dy=\pi\int_0^1 y^4dy$

(4) $\pi\int_0^{\log 2}x^2dy=\pi\int_0^{\log 2}(e^y-2)^2dy$]

501 (1) (x 軸) $\frac{16}{15}\pi$ (y 軸) $\frac{\pi}{2}$

(2) (x 軸) 8π (y 軸) $\frac{256}{15}\pi$

(3) (x 軸) $\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi$ (y 軸) 8π

(4) (x 軸) 36π (y 軸) 36π

502 (1) $\frac{153}{5}\pi$ (2) $\frac{297}{32}\pi$

[(1) $\pi\int_{-2}^1\{(5-x^2)^2-(x+3)^2\}dx$

(2) $\pi\int_{\frac{1}{2}}^2\{(-x^2+5x)^2-(x^2+2)^2\}dx$]

503 [1] $\frac{384}{5}\pi$ [2] $\frac{512}{15}\pi$

[[1] $\pi\int_{-2}^2\{(6-x^2)^2-2^2\}dx$

[2] $\pi\int_{-2}^2(6-x^2-2)^2dx$]

504 $\left(\frac{22}{3}+4\sqrt{3}\right)\pi$

$\left[\pi\int_0^3(1+\sqrt{3-y})^2dy-\pi\int_2^3(1-\sqrt{3-y})^2dy\right]$

505 $54\pi^2$

$\left[\pi\int_{-3}^3\{(3+\sqrt{3^2-x^2})^2-(3-\sqrt{3^2-x^2})^2\}dx\right]$

506 (1) $\frac{60+32\sqrt{2}}{15}\pi$ (2) $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{8}\pi$

$\Big[$(1) $\pi\int_{-1}^0\{(-x^2+2)^2-(-x)^2\}dx$

$+\pi\int_0^1(-x^2+2)^2dx+\pi\int_1^2x^2dx$

$-\pi\int_{\sqrt{2}}^2(x^2-2)^2dx$

(2) $\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\sin^2x\,dx+\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin^2 2x\,dx$

$-\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx\Big]$

507 (1) 24π (2) $5\pi^2$

$\Big[$(1) $2\pi\int_0^2y^2dx=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 9\sin^2\theta\cdot(-2\sin\theta)d\theta$

(2) $\pi\int_0^{2\pi}y^2dx=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\cdot(1-\cos\theta)d\theta\Big]$

508 $k=1$ $\Big[\pi\int_0^9(9-y)dy$

$=2\pi\int_0^{\frac{9k}{k+1}}\left\{(9-y)-\frac{y}{k}\right\}dy\Big]$

509 $a=\pm\frac{2}{5}$ $\left[\frac{\pi}{96a^4}=\pm\frac{\pi}{240a^5}\right]$

510 $\frac{125}{2}\pi$ $\left[\int_{-5}^5 2\sqrt{25-x^2}\cdot5\cdot\frac{1}{2}dx\right]$

511 $\frac{8-5\sqrt{2}}{12}\pi r^3$ $\left[\pi\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^r(r^2-x^2)dx\right]$

512 $\frac{2000\sqrt{3}}{9}$ $\left[2\int_0^{10}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(100-x^2)dx\right]$

513 (1) 14 (2) 2π

514 (1) $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$ (2) $\frac{\pi}{2}$

(3) $\log(2+\sqrt{3})$ (4) $\frac{3}{4}$

515 順に $\frac{32}{3}$, $\frac{40}{3}$

$\Big[$位置 $\int_0^4(t^2-2\sqrt{t})dt$ $l=\int_0^4|t^2-2\sqrt{t}|dt\Big]$

516 (1) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$ (2) $\frac{29}{6}$

$\Big[$(1) $\int_0^1\sqrt{(3t^2)^2+(2t)^2}\,dt=\int_0^1t\sqrt{9t^2+4}\,dt$

$9t^2+4=u$ とおく。(2) $\int_0^3|t^2-t|dt\Big]$

517 (1) $\sqrt{2}(e-1)$ (2) π^2

518 $\frac{38+10\sqrt{5}}{3}$

$\left[\frac{10\sqrt{5}}{3}+2\int_{-5}^0\sqrt{1+\frac{1}{4}(x+5)}\,dx\right]$

519 (1) 順に $-\cos 2t-\cos t+4$,

$-\frac{1}{2}\sin 2t-\sin t+4t$ (2) 4π

$\Big[$(1) $2+\int_0^t\sin t(1+4\cos t)dt$,

$0+\int_0^t(-\cos t-\cos 2t+4)dt$

(2) $-\int_0^{\pi}(\cos t+\cos 2t-4)dt\Big]$

520 4 $\left[2\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt\right]$

521 (1) $8a$ (2) $4a$

[(2) $\cos 2(\pi-t)=\cos 2t$,

$4\sin(\pi-t)=4\sin t$]

522 [(1) $xy'=xA=y$

(2) $y''=Ae^x+Be^{-x}=y$ (3) $x^2y''+xy'$

$-y=\frac{2B}{x^3}x^2+x\left(A-\frac{B}{x^2}\right)-\left(Ax+\frac{B}{x}\right)=0$

(4) $y''=-A\sin x-B\cos x=-y$]

523 (1) $y=y'$ (2) $x+yy'=0$

(3) $y+xy'=0$ (4) $(y-xy')^2(1+y'^2)=y'^2$

[(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ における

法線の方程式は $Y-f(x)=-\frac{1}{f'(x)}(X-x)$

原点を通るから $X=0$, $Y=0$ を代入

(3) $\mathrm{Q}\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)},\ 0\right)$, $\mathrm{R}(0,\ f(x)-xf'(x))$

Pが線分 QR の中点であるから

$\frac{1}{2}\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=x$

(4) (3)の Q, R の座標を利用 QR=1]

524 $\frac{dx}{dt}=x^3$

525 (1) $y=\frac{1}{2}x^2+C$ (2) $y=\sin x+C$

(3) $y=e^x+C$ (4) $x^2+y^2-2x+C=0$

(5) $y=Cx+1$ (6) $y=1+\frac{C}{x-1}$

$\Big[$(1) $\int\frac{dy}{dx}dx=\int x\,dx$ から $\int dy=\int x\,dx$

(2) $\int\frac{dy}{dx}dx=\int\cos x\,dx$

(3) $\int\frac{dy}{dx}dx=\int e^x dx$

(4) $\int y\frac{dy}{dx}dx=\int(1-x)dx$

(5) $x\frac{dy}{dx}=y-1$

$y\neq1$ のとき $\frac{1}{y-1}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$

(6) $y\neq1$ のとき $\frac{1}{y-1}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x-1}\Big]$

526 (1) $y=\frac{1}{8}(2x-1)^4+\frac{7}{8}$

(2) $y=-\log|x-2|$

$\Big[$(1) $\int\frac{dy}{dx}dx=\int(2x-1)^3dx$ から

$y=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(2x-1)^4+C$

(2) $\int\frac{dy}{dx}dx=\int\frac{dx}{2-x}\Big]$

527 $f(x)=e^x-1$ [等式の両辺を x で微分すると $f'(x)=1+f(x)$]

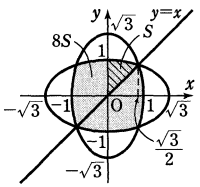
528 $y=2x^2$ $\left[\frac{dy}{dx}=2\cdot\frac{y}{x}\right]$

529 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

[右の図の斜線部分の面積を S とすると，求める面積は $8S$

$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx$

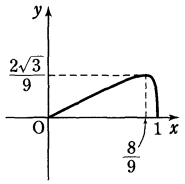
$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Big]$



530 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2-1}{4t^3}$,

〔図〕(2) $\frac{8}{35}$ (3) $\frac{27}{16}$

$\Big[$(2) $S=\int_0^1y\,dx$



$=\int_1^0(t-t^3)(-4t^3)dt$

(3) $x+2y$

$=1-t^4+2(t-t^3)$

$=-t^4-2t^3+2t+1$

これは $t=\frac{1}{2}$ のとき最大になる$\Big]$

531 $\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$ $\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|e^{-x}\sin x|dx$

$=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi}\right|$

$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-k\pi}(1+e^{-\pi})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}\Big]$

532 $\frac{4}{3}\pi$ [直線 ℓ 上の点のうち，y 座標が t であるものは $\left(-\frac{t-1}{2},\ t,\ -\frac{t+1}{2}\right)$

立体 A を平面 $y=t$ で切った断面は，中心が $(0,\ t,\ 0)$，半径が $\sqrt{\left(-\frac{t-1}{2}\right)^2+\left(-\frac{t+1}{2}\right)^2}$ の円であるから $V=\int_{-1}^1\frac{\pi}{2}(t^2+1)dt\Big]$

533 $\frac{4}{3}\pi$ [平面 $x=t$ と円盤との交線のうち，x 軸に最も近い距離は 1，最も遠い距離は $\sqrt{2-t^2}$

よって $V=\pi\int_{-1}^1\{(\sqrt{2-t^2})^2-1^2\}dt\Big]$

534 $\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$ [曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から直線 $y=x$ に垂線 PQ を下ろし $\mathrm{OQ}=t$ とする。

$\mathrm{Q}\left(\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ から $t=\frac{x+y}{\sqrt{2}}=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{PQ}=\frac{|x^2-2x|}{\sqrt{2}}$

よって $V=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\mathrm{PQ}^2dt=\pi\int_0^2\mathrm{PQ}^2\sqrt{2}\,x\,dx\Big]$

535 (1) 216π (2) $2\pi^2$

$\Big[$(1) $2\pi\int_0^6x(-x^2+6x)dx$

(参考) $y=-x^2+6x$ から $x=3\pm\sqrt{9-y}$

$\pi\int_0^9\{(3+\sqrt{9-y})^2-(3-\sqrt{9-y})^2\}dy$

(2) $2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\,dx\Big]$