

第6章 微分法の応用

34

接線と法線

1 接線、法線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線、法線（接点で接線に垂直）

① 接線の方程式 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

② 法線の方程式 $f'(a) \neq 0$ のとき $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

$f'(a)=0$ のとき $x=a$

2 媒介変数表示の曲線の接線

$x=f(t), y=g(t)$ 上の $t=t_0$ に対応する点における接線の方程式は

$$f'(t_0) \neq 0 \text{ のとき } y-g(t_0)=\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\{x-f(t_0)\}$$

A

323 次の曲線上の与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。

(1) $y=x^2-3x+2$ (1, 0) * (2) $y=x^4-3x^2+4$ (1, 2)

(3) $y=\frac{2x}{1+x}$ (0, 0) *(4) $y=\sqrt{4-x^2}$ $(-\sqrt{3}, 1)$

(5) $y=\cos x$ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *(6) $y=2 \log x$ (e, 2)

324 次の曲線上の与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。

*(1) $3x^2+y^2=12$ (1, -3) (2) $xy=2$ (1, 2)

325 2つの放物線 $y=\frac{x^2}{4}-1$, $y=-\frac{x^2}{4}+1$ の交点における、各々の接線の方程式を求めよ。また、それらは直交することを示せ。

326 次の媒介変数 t で表された曲線について、与えられた t の値に対応する点における接線の方程式を求めよ。

*(1) $\begin{cases} x=2-t \\ y=3+t+t^2 \end{cases}$ ($t=2$) (2) $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin t+1 \end{cases}$ ($t=-\frac{\pi}{6}$)

Aのまとめ 327 次の曲線上の与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。

(1) $y=\sqrt{x+3}$ (0, $\sqrt{3}$) (2) $2x^2-y^2=1$ (1, 1)

2 曲線の共通接線

例題 42 2曲線 $y^2=4x$, $x^2=4y$ の共通接線の方程式を求めよ。

指針 共通接線 それぞれの曲線上の点における接線が一致する。

$y^2=4x$ ①から $2yy'=4$ $x^2=4y$ ②から $2x=4y'$

①上の点 $\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$ [$y_1 \neq 0$], ②上の点 $\left(x_2, \frac{x_2^2}{4}\right)$ における接線は

$$y=\frac{2}{y_1}\left(x-\frac{y_1^2}{4}\right)+y_1 \quad \text{①}' \quad y=\frac{x_2}{2}(x-x_2)+\frac{x_2^2}{4} \quad \text{②}'$$

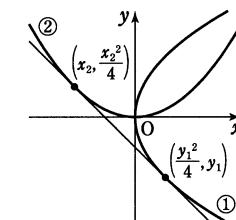
①' と ②' が一致するとき

$$\frac{2}{y_1}=\frac{x_2}{2}, \frac{y_1}{2}=-\frac{x_2^2}{4}$$

よって $x_2=-2, y_1=-2$

ゆえに、共通接線の方程式は $y=-x-1$ 答

$y_1=0$ のとき、①の点 (0, 0) における接線 $x=0$ は②との共通接線とならない。



B

328 次の曲線上に、与えられた点から引いた接線の方程式を求めよ。

(1) $y=x^2+3$ (1, 0) * (2) $y=\sqrt{x}$ (-4, 0)

*(3) $y=\frac{3x}{x+1}$ (8, 4) (4) $y=\frac{e^x}{x}$ (0, 0)

*329 曲線 $y=\log x$ について、次のような接線の方程式を求めよ。

- (1) 傾きが 3 である (2) 点 (0, 1) を通る

*330 2曲線 $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$ の共通接線の方程式と接点の座標を求めよ。

331 2曲線 $y=ax^3$ と $y=3 \log x$ が共有点をもち、その点における2曲線の接線が一致しているとき、定数 a の値を求めよ。また、その共有点における接線の方程式を求めよ。

*332 $0 \leq x < 2\pi$ のとき、2曲線 $y=2 \sin x$, $y=a-\cos 2x$ が接するように、定数 a の値を定めよ。

*333 点 $P(a, 0)$ から曲線 $y=xe^x$ に接線が引けるための a の条件を求めよ。

ヒント 333 接点の座標を (t, te^t) とおき、 t についての方程式を導く。この方程式が実数解をもつことが条件。

35 平均値の定理

1 平均値の定理

- ① 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続、開区間 (a, b) で微分可能ならば、次の条件を満たす c が存在する。

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \quad a < c < b$$

- ② 特に $f(b)=f(a)$ のとき、 $f'(c)=0$ であり、ロルの定理という。

参考 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, a+h]$ で連続、開区間 $(a, a+h)$ で微分可能ならば、次の条件を満たす θ が存在する。

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

これは、上の平均値の定理において $h=b-a$, $\theta=\frac{c-a}{b-a}$ とおき換えることによって得られる。

A

- 334 次の曲線上の 2 点 A, B の間において、直線 AB に平行な接線の接点の座標を求めよ。

(1) $y=x^3$ A(0, 0), B(3, 27) (2) $y=\frac{1}{x}$ A(1, 1), B(3, $\frac{1}{3}$)

- 335 次の関数に、示された区間ににおいて上記要項の平均値の定理を適用するとき、 c の値を求めよ。

(1) $y=x^2-1$ [-1, 2] *(2) $y=\sin x$ [0, π]
 (3) $y=\sqrt{x}$ [1, 9] *(4) $y=\log x$ [1, 2]

- 336 次の関数について、与えられた開区間において $f'(x)=0$ を満たす x が存在することを示せ。

(1) $f(x)=x^3-3x^2$ (0, 3) (2) $f(x)=\cos x$ (0, 3π)
 *(3) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ($\frac{1}{2}$, 3) *(4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ (-1, $\frac{1}{2}$)

Aの
まとめ

- 337 次の関数に、示された区間ににおいて上記要項の平均値の定理を適用するとき、 c の値を求めよ。

(1) $y=\frac{1}{x}$ [1, 2] (2) $y=e^x$ [0, 2]

極限 (平均値の定理の利用)

- 例題 43 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x}$ を求めよ。

指針 差 $f(b)-f(a)$ が含まれる極限 平均値の定理の利用を考える。

解答 $x \rightarrow +0$ であるから、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ としてよい。このとき、 $x < \tan x$

関数 $f(x)=e^x$ はすべての実数 x で微分可能で、 $f'(x)=e^x$ であるから、区間 $[x, \tan x]$ において平均値の定理を用いると $\frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x} = e^c$, $x < c < \tan x$ を満たす実数 c が存在する。 $\lim_{x \rightarrow +0} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} \tan x = 0$ であるから $\lim_{x \rightarrow +0} c = 0$

ゆえに $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^c = 1$ 答

B

- 338 平均値の定理を利用して、次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$	*(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2}$
(3) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$	*(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \{\log(x+3) - \log x\}$

- 339 次の不等式を平均値の定理を用いて証明せよ。

*(1) $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin \beta - \sin \alpha < \beta - \alpha$
 *(2) $0 \leq q < p$, $n \geq 2$ のとき $p^n - q^n < np^{n-1}(p-q)$
 (3) $\frac{1}{e^2} < a < b < 1$ のとき $a - b < b \log b - a \log a < b - a$

- 340 a , k は定数、関数 $f(x)$ は微分可能であるとする。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = k$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+a) - f(x)\}$ を求めよ。

発展

- *341 関数 $f(x)=x^3$ について

$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$, $0 < \theta < 1$, $a > 0$, $h > 0$ を満たす θ を a , h で表せ。また、極限 $\lim_{h \rightarrow +0} \theta$ を求めよ。

ヒント 338 (4) $f(x)=\log x$ とおくと $\log(x+3) - \log x = \frac{3}{c}$, $\frac{1}{x+3} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$

339 (1) $f(x)=\sin x$ (2) $f(x)=x^n$ (3) $f(x)=x \log x$ とおく。

36 関数の値の変化

■ 1 関数の極値 $f(x)$ は連続な関数とする。

- ① 極値 $x=a$ を含む十分小さい開区間において
 $x \neq a$ ならば $f(x) < f(a)$ であるとき $f(a)$ は極大値
 $x \neq a$ ならば $f(x) > f(a)$ であるとき $f(a)$ は極小値
- ② 極値をとる必要条件 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとする。
 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば $f'(a)=0$

注意 $f'(a)=0$ であっても $f(a)$ は極値とは限らない。〔例〕 $f(x)=x^3$

- ③ 極大、極小の判定 $x=a$ の前後で
 $f'(x)$ の符号が正から負に変わらば $f(a)$ は極大値
 $f'(x)$ の符号が負から正に変わらば $f(a)$ は極小値
- 注意 $x=a$ で微分可能である必要はない。〔例〕 $f(x)=|x|$ $x=0$ で極小



342 次の関数は単調に増加または単調に減少することを示せ。

(1) $y=x^3-3x^2+3x$ *(2) $y=2\sin x-3x$

*(3) $y=3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (4) $y=\log x$

343 次の関数の増減を調べよ。

(1) $y=x^4-4x^3+4x^2$ *(2) $y=x\sqrt{4-x^2}$

*(3) $y=\frac{2x}{x^2+1}$ (4) $y=3^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$

■ 次の関数の極値を求めよ。[344, 345]

344 *(1) $y=-x^4+2x^2+2$ (2) $y=x^3e^{-x}$

*(3) $y=-\frac{3x}{x^2+3}$ (4) $y=\frac{\log x}{x}$

*345 (1) $y=|x-2|$ (2) $y=|x^2-4|+3x$ (3) $y=|x-2|\sqrt{x+3}$



346 (1) 次の関数の増減を調べよ。

[1] $y=x-2\log x$ [2] $y=x^5e^{2x}$

(2) 次の関数の極値を求めよ。

[1] $y=x^2-6|x|+5$ [2] $y=|x|\sqrt{x+4}$

極値をもつ条件

例題 44

関数 $f(x)=\frac{x+a}{x^2-1}$ が極大値をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。

指針 極値をもつ条件 $f'(x)$ の符号が変わる x の値が存在する。

解答 $x^2-1 \neq 0$ であるから、定義域は $x \neq \pm 1$

$$f'(x)=\frac{1 \cdot (x^2-1)-(x+a) \cdot 2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+2ax+1}{(x^2-1)^2}$$

$(x^2-1)^2 > 0$ であるから、次のことが成り立つ。

「 $f(x)$ が極大値をもつ。」

$\Leftrightarrow f'(x)$ の符号が正から負に変わらば x の値が存在する。」

$\Leftrightarrow x^2+2ax+1=0 \cdots \text{①}$ が $x=\pm 1$ 以外の異なる実数解をもつ。」

\Leftrightarrow 「①の判別式 D が $D > 0$ かつ $(\pm 1)^2+2a \cdot (\pm 1)+1 \neq 0$ (複号同順) … ②」

$D=4(a^2-1)$ であるから、②より $a < -1, 1 < a$ かつ $a \neq \pm 1$

よって、 $f(x)$ が極大値をもつ条件は $a < -1, 1 < a$ 篇



347 $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、次の関数の増減を調べよ。

(1) $y=e^{-x}\sin x$ *(2) $y=(1+\cos x)\sin x$

348 関数 $y=e^{-x^2}$ の増減を調べよ。また、極値を求めよ。

349 次の関数の極値があれば、それを求めよ。

(1) $y=|x|\sqrt{1-x^2}$ (2) $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$ $\left(\frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi\right)$

*(3) $y=(5x^2-4x-1)e^{4x}$ *(4) $y=(x+2)\sqrt[3]{(x+3)^2}$

*350 次の関数が $x=1$ で極大値 5 をとるとき、定数 a, b の値を求めよ。

(1) $y=\frac{ax^2+2x+b}{x^2+1}$ (2) $y=(ax+b)e^{x-1}$

*351 関数 $f(x)=\frac{x-a}{x^2+x+1}$ が $x=-1$ で極値をとるよう、定数 a を定めよ。

*352 関数 $y=x+\frac{2a}{x}$ の極小値が 2 であるとき、定数 a の値を求めよ。

353 次の関数が極値をもつよう、定数 k の値の範囲を定めよ。

(1) $f(x)=\frac{x^2+k}{x-3}$ *(2) $f(x)=\frac{e^{kx}}{x^2+1}$

37

関数の最大と最小

1 関数の最大と最小

- ① 性質 関数 $f(x)$ が閉区間 $a \leq x \leq b$ で連続であるとき、 $f(x)$ は、その区間で必ず最大値と最小値をもつ。
- ② 求め方 最大値、最小値は $f(x)$ の極値と両端の値 $f(a), f(b)$ とを比較して判断する。増減表を利用するとよい。
- ③ 文章題 [1] 適当な変数を定めて、その変域を確かめておく。
 [2] 最大、最小を求める量を表す関数を作る。
 [3] [2] で求めた関数の最大、最小を求める。[1] の変域に注意。



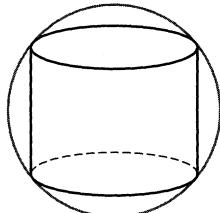
354 次の関数の最大値、最小値とそのときの x の値を求めよ。

$$(1) y = x^3 - 3x \quad (0 \leq x \leq 2) \quad *(2) y = \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} \quad (-1 \leq x \leq 3)$$

$$*(3) y = x\sqrt{9-x^2} \quad (-3 \leq x \leq 3) \quad *(4) y = \cos^3 x + 3 \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$(5) y = \cos^3 x - \sin^3 x \quad (0 \leq x \leq 2\pi) \quad (6) y = \log \frac{x^2+1}{x} \quad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 3\right)$$

- 355 (1) 周の長さが 16 の長方形のうちで、面積が最大のものはどのような長方形か。
- (2) 面積が 16 の長方形のうちで、周の長さが最小のものはどのような長方形か。
- *(3) 半径 4 の円に内接する長方形のうちで、周の長さが最大のものはどのような長方形か。
- *(4) 体積が 16π の直円柱のうちで、表面積が最小のものはどのような直円柱か。
- (5) 半径 4 の球に内接する直円柱のうちで、側面積が最大のものはどのような直円柱か。



Aのまとめ 356 関数 $y = x\sqrt{2x-x^2}$ の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

端がない場合の最大・最小

例題 45 関数 $y = \frac{1-x}{(x+1)^2}$ ($x \geq 0$) の最大値、最小値を求めよ。

指針 最大・最小 定義域は $x \geq 0$ この場合、 $x=0$ のときの y の値と極値を比較するだけでなく、 $\lim_{x \rightarrow \infty} y$ を調べてこれらと比較する必要がある。

解答

$$y' = -\frac{x-3}{(x+1)^3} \text{ から, } y'=0 \text{ とすると } x=3$$

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = 0$$

よって $x \geq 0$ における増減表は右のようになる。

したがって、 $x=0$ のとき最大値 1、 $x=3$ のとき最小値 $-\frac{1}{8}$ 篇

x	0	…	3	…
y'	-		0	+
y	1	↘	− $\frac{1}{8}$	↗



357 次の関数の最大値、最小値とそのときの x の値を求めよ。

$$*(1) y = \frac{x-1}{x^2+1} \quad *(2) y = x + \sqrt{9-x^2} \quad *(3) y = x \log x$$

$$(4) y = e^x + e^{-2x} \quad *(5) y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x-3)^2+4} \quad (6) y = |x|e^x$$

358 関数 $y = x + \frac{a}{x-1}$ ($x > 1$) の最小値が 5 のとき、正数 a の値を求めよ。

*359 関数 $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x^2+1}$ が $x=2$ で最小値 -1 をとるとき、定数 a, b の値を求めよ。このとき、 $f(x)$ の最大値を求めよ。

360 関数 $y = a(x - \sin 2x)$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値が π であるように、定数 a の値を定めよ。

*361 定点 $A(2, 3)$ を通る直線と、 x 軸の正の部分および y 軸の正の部分とが作る三角形の面積 S の最小値を求めよ。

*362 半径 2 の円に外接する二等辺三角形のうちで、面積が最小のものはどのような三角形か。

363 座標平面上に 3 点 $A(0, 3)$, $B(0, 1)$, $P(x, 0)$ をとり、 $\angle APB = \theta$ とする。点 P が x 軸上の正の部分を動くとき、 θ が最大となる点 P の座標、およびそのときの θ の値を求めよ。

38

関数のグラフの概形

1 曲線の凹凸・変曲点

- ① 下に凸 ある区間で, $f''(x) > 0$ ならば曲線 $y=f(x)$ はその区間で下に凸
上に凸 ある区間で, $f''(x) < 0$ ならば曲線 $y=f(x)$ はその区間で上に凸
② 変曲点 $f''(a)=0$ かつ, $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わる。
点 $(a, f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点 $\Rightarrow f''(a)=0$ (逆は不成立)

2 関数のグラフのかき方

- ① 対称性を調べる。 ② 座標軸との共有点などを求める。
③ 減近線を調べる。 ④ 関数の増減や極値、グラフの凹凸や変曲点を調べる。

3 減近線の求め方 関数 $y=f(x)$ のグラフについて

- ① x 軸に垂直な減近線 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ 直線 $x=a$ が減近線
② x 軸に垂直でない減近線 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)-(ax+b)|=0 \Rightarrow$ 直線 $y=ax+b$
注意 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}=a, \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)-ax\}=b$ ならば, $y=ax+b$ が減近線。

4 極値と第2次導関数 $x=a$ を含むある区間で $f''(x)$ が連続であるとき
 $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ [$f''(a)>0$] ならば $f(a)$ は極大値 [極小値]
 $f'(a)=0$ かつ $f''(a)=0$ のとき $x=a$ の前後の $f'(x)$ の符号を調べて判別。

A

364 次の曲線の凹凸を調べ、変曲点の座標を求めよ。

$$*(1) y=x^3-2x^2 \quad *(2) y=xe^{-2x} \quad (3) y=x^2+\cos 2x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

365 次の曲線の減近線の方程式を求めよ。

$$(1) y=2x-\frac{3}{x-2} \quad *(2) y=\frac{x^2}{x+1} \quad *(3) y=x+e^x$$

366 次の関数のグラフをかけ。

$$(1) y=(1-x^2)^3 \quad *(2) y=x+\cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi) \\ (3) y=xe^x \quad *(4) y=x-2\sqrt{x-1}$$

367 第2次導関数を利用して、次の関数の極値を求めよ。

$$(1) y=x^4-2x^2+1 \quad *(2) y=e^x \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

Aの
まとめ

368 次の曲線の凹凸を調べ、変曲点の座標を求め、グラフをかけ。

$$(1) y=\log(x^2+1) \quad (2) y=x \log x \quad (3) y=e^{-\frac{x^2}{3}}$$

関数のグラフ（凹凸、減近線）

例題 46 関数 $y=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$ のグラフをかけ。

指針 関数のグラフ 定義域は実数全体で連続であるから、 x 軸に垂直な減近線はない。増減表のほかに $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x}$ を調べてみる。

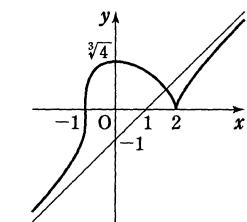
解答 $y'=\frac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}, y''=\frac{-2}{\sqrt[3]{(x+1)^5(x-2)^4}}$ から、増減表は

x	…	-1	…	0	…	2	…
y'	+	/	+	0	-	/	+
y''	+	/	-	-	-	/	-
y	\uparrow	0	\curvearrowleft	$\sqrt[3]{4}$	\curvearrowright	0	\curvearrowleft

となる。また、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}}{x} = 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y-x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2} - x\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)(x-2)^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4} + x \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2} + x^2} = -1 \leftarrow \text{分母・分子を } x^2 \text{ で割る} \end{aligned}$$

よって、減近線は $y=x-1$ ゆえに、グラフは上の図 番



B

*369 次の曲線の減近線の方程式を求めよ。

$$(1) y=\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} \quad (2) y=3x+\sqrt{x^2-x-2}$$

370 次の関数のグラフをかけ。

$$\begin{array}{lll} *(1) y=\frac{3x}{x^2+1} & *(2) y=\frac{x^3}{x^2-1} & (3) y=(x-2)\sqrt{x+1} \\ (4) y=(x+3)\sqrt[3]{(x-2)^2} & *(5) y=e^{\frac{1}{x}} & (6) y=e^x \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi) \\ *(7) y=4 \cos x + \cos 2x \quad (0 \leq x \leq 2\pi) & & \end{array}$$

*371 3次関数 $y=-x^3+6x^2$ のグラフの変曲点を求めよ。また、このグラフが変曲点に関して対称であることを示せ。*372 3次関数 $y=x^3+3ax^2+3bx+c$ のグラフは、 $x=1$ で極小となり、点 $(0, 3)$ が変曲点である。定数 a, b, c の値を求めよ。*373 a が定数のとき、曲線 $y=(x^2+2x+a)e^x$ の変曲点の個数を調べよ。

39 方程式、不等式への応用

1 不等式の証明

- ① 不等式 $f(x) > 0$ の証明は、 $\{f(x)\}$ の最小値 > 0 を示すとよい。そのためには、まず、 $f(x)$ を求め、関数 $f(x)$ の増減を調べる。
- ② $f'(x)$ の符号が判別しづらいときは、次の関係を利用するとよい。
 $a < b$, $f(a) = f(b) = 0$, 区間 (a, b) で $f''(x) < 0$ [上に凸]
 ならば 区間 (a, b) で $f(x) > 0$

2 方程式の解とグラフ

- ① 方程式 $f(x) = 0$ の実数解 \rightarrow 曲線 $y = f(x)$ と x 軸の共有点の x 座標。
- ② 方程式 $f(x) = g(x)$ の実数解 \rightarrow 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の共有点の x 座標。

3 e^x と x^n に関する極限

$x \rightarrow \infty$ のとき、 e^x は x^n に比べて急速に増大し、次のことが成り立つ。

任意の自然数 n に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ (p. 63 の 282 番ヒント参照)

A

374 次のことが成り立つことを証明せよ。

- (1) $x^4 - 4x^3 + 28 > 0$
- *(2) $x > 1$ のとき $x^4 - 4x + 3 > 0$
- *(3) $x > 0$ のとき $\frac{1}{e^x} > 1 - x$
- (4) $x > 0$ のとき $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$
- *(5) $x > 0$ のとき $\log(1+x) < \frac{1+x}{2}$

375 次の方程式の実数解の個数を求めよ。

- (1) $x^4 + 6x^2 - 5 = 0$
- *(2) $x + \cos x = 0$
- (3) $e^x - 2(x+1) = 0$

Aのまとめ 376 (1) $x > 1$ のとき $e^x > ex$ が成り立つことを示せ。

(2) 方程式 $x = 4 \log x$ の実数解の個数を求めよ。

実数解の個数

例題 47

3 次方程式 $x^3 - 3ax^2 + 4 = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。
 ただし、 a は定数とする。

指針 方程式の実数解 文字定数 a が 1 次のときは方程式を $f(x) = a$ の形にして、 $y = f(x)$ のグラフと $y = a$ のグラフの共有点を調べる。

解答

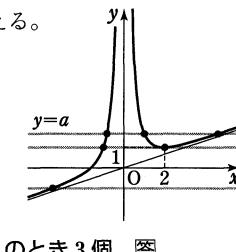
与えられた方程式は $x = 0$ を解にもたないから、 $\frac{x^3 + 4}{3x^2} = a$ と同値。

$y = \frac{x^3 + 4}{3x^2}$ ① と $y = a$ のグラフの共有点を考える。

① のグラフは、 $y' = \frac{x^3 - 8}{3x^3}$, $y'' = \frac{8}{x^4}$,

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(y - \frac{x}{3}\right) = 0$ から右の図のようになる。

したがって、与えられた方程式の異なる実数解の個数は $a < 1$ のとき 1 個, $a = 1$ のとき 2 個, $1 < a$ のとき 3 個



B

377 $x > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$(1) \sin x > x - \frac{x^2}{2} \quad *(2) 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x}$$

378 a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を調べよ。必要なら $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ を用いてもよい。

$$*(1) x^3 - 3ax + 2 = 0 \quad *(2) 2\sqrt{x} - x + a = 0 \quad (3) 2x - 1 = ae^{-x}$$

*379 (1) 方程式 $e^x = ax + b$ が実数解をもつための定数 a , b の条件を求めよ。
 (2) すべての正の数 x について、 $e^x \geq ax^3$ が成り立つように、定数 a の値の範囲を定めよ。

発展

380 [] 内の関数を参考にして次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(1) b \geq a > 0 \text{ のとき } \log b - \log a \geq \frac{2(b-a)}{b+a} \quad [f(x) = \log x - \log a - \frac{2(x-a)}{x+a}]$$

$$(2) 0 < \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad [f(x) = \frac{\sin x}{x}]$$

40 速度と加速度、近似式

1 直線上の運動 数直線上を運動する点の座標 x が時刻 t の関数 $x=f(t)$

$$\begin{array}{ll} \text{① 速度 } v = \frac{dx}{dt} = f'(t) & \text{加速度 } \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t) \\ \text{② 速さ (速度の大きさ) } |v| & \text{加速度の大きさ } |\alpha| \end{array}$$

2 平面上の運動 平面上を運動する点の座標 (x, y) が時刻 t の関数

$$\begin{array}{ll} \text{① 速度 } \vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) & \text{加速度 } \vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) \\ \text{② 速さ } |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} & \text{加速度の大きさ } |\vec{\alpha}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2} \end{array}$$

3 近似式

- ① $|h|$ が十分小さいとき $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$
- ② $|x|$ が十分小さいとき $f(x) \approx f(0) + f'(0)x \rightarrow f(x) - f(0) \approx f'(0)x$

A

*381 数直線上を運動する点Pの座標 x が、時刻 t の関数として $x=t^3-4t$ で表されるとき、 $t=4$ における速度および加速度を求めよ。

382 座標平面上を運動する点の、時刻 t における座標が次の式で表されるとき、この点の速さと加速度の大きさを求めよ。

(1) $x=2t$, $y=t^2+3$ (2) $x=\cos t+1$, $y=\sin t+2$

383 $|x|$ が十分小さいとき、次の関数の近似式を作れ。

(1) $(1+x)^5$ (2) $\frac{1}{1-x}$ (3) $\log(1+2x)$ (4) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

384 次の数の近似値を小数第4位まで求めよ。

(1) $\cos 62^\circ$ (2) $\sqrt[3]{1003.5}$

Aのまとめ

- 385 (1) 地上から物体を、初速度 30 m/s で真上に投げたとき、 t 秒後の高さ $x \text{ m}$ は、 $x=30t-5t^2$ と表される。この物体が地上に落下する直前の速度と加速度を求めよ。
 (2) $|x|$ が十分小さいとき、関数 $\sin x$ の近似式を作れ。また、 $\sin 30.5^\circ$ の近似値を小数第4位まで求めよ。

体積の変化率

例題 48

直円柱形の物体の底面の半径が毎秒 1 cm の割合で、高さが毎秒 5 cm の割合とともに伸びている。この物体の底面の半径が 1 m かつ高さが 2 m になった瞬間ににおける体積の変化の割合を求めよ。

指針 变化率 体積を時刻 t の関数で表し、その導関数、微分係数を考える。

解答 時刻 t (秒) における直円柱形の底面の半径、高さ、体積をそれぞれ r , h , V とすると、これらは、 t の関数である。
 円周率を π としたとき、 $V=\pi r^2 h$ であるから

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left(2r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot h + r^2 \cdot \frac{dh}{dt} \right)$$

条件から $\frac{dr}{dt}=1$, $\frac{dh}{dt}=5$, $r=100$, $h=200$ を代入すると

$$\frac{dV}{dt} = \pi (2 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 200 + 100^2 \cdot 5) = 90000\pi (\text{cm}^3/\text{s}) \quad \square$$

B

*386 上面の半径が 10 cm 、深さが 20 cm の直円錐形の容器に毎秒 3 cm^3 の割合で静かに水を注ぐとき、水の深さが 6 cm の瞬間に水面の高くなる速さと水面の広がる速さを求めよ。

387 水面から 30 m の高さの岸壁から、長さ 58 m の綱で舟を引き寄せている。毎秒 4 m の割合で綱を引っぱるととき、2秒後の舟の速さを求めよ。

*388 半径 a の円Oの周上を点Aから出発して、一定の正の角速度 ω (ラジアン/s) で回転する動点Pがある。Pが円周上を半周する間において、次のものの時刻 t (秒) に対する変化率を求めよ。

- (1) $\triangle OAP$ の面積
- (2) 線分 AP の長さ

389 次の方程式の解の近似値を小数第3位まで求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log 10 = 2.303$ とする。

(1) $\sin x = 0.9 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ (2) $\log_{10} x = 0.3$

*390 方程式 $(x-1)(x-3)=0.02$ の解の近似値を小数第2位まで求めよ。

ヒント 386 水面の半径を $r \text{ cm}$, 水の深さを $h \text{ cm}$ とすると $h=2r$

41 第6章 演習問題

極値と判別式

例題 49

関数 $f(x) = ax + \frac{b}{x} - \log x$ ($x > 0$) が極大値と極小値を 1 個ずつとり、極大値と極小値の和が 0 であるとき、 b を a で表せ。また、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

指針 関数の極値の性質 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ 2 次方程式 $g(x) = 0$ なら、異なる 2 つの実数解 α, β をもつ条件。 D の利用。 $a > 0, \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0, a\beta > 0$

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - x - b}{x^2}$$

$a=0$ のとき、 $f(x)$ は極値を 2 個とらないから $a \neq 0$

$f(x)$ が $x > 0$ において極大値と極小値を 1 個ずつもつ条件は、 $ax^2 - x - b = 0$ が異なる 2 つの正の解 α, β をもつことである。

$$\text{よって } a \neq 0, D = 1 + 4ab > 0, \alpha + \beta = \frac{1}{a} > 0, a\beta = -\frac{b}{a} > 0$$

ゆえに $a > 0, b < 0, 1 + 4ab > 0 \dots \text{①}$

$$\begin{aligned} \text{また } f(\alpha) + f(\beta) &= a(\alpha + \beta) + b\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) - (\log \alpha + \log \beta) \\ &= a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot \frac{1}{a} - \log\left(-\frac{b}{a}\right) = -\log\left(-\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

$$\log\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \text{ から } -\frac{b}{a} = 1 \quad \text{ゆえに } b = -a \quad \text{□}$$

$$\text{また、①から } a > 0, -a < 0, 1 - 4a^2 > 0 \quad \text{ゆえに } 0 < a < \frac{1}{2} \quad \text{□}$$

B

391 関数 $f(x) = 2x + \frac{ax}{x^2 + 1}$ が極大値と極小値をそれぞれ 2 つずつもつよう に、定数 a の値の範囲を定めよ。

*392 関数 $f(x) = \frac{a \sin x}{\cos x + 2}$ ($0 \leq x \leq \pi$) の最大値が $\sqrt{3}$ となるように定数 a の値を定めよ。

*393 一直線をなす海岸の地点 A から海岸線に垂直に 9 km 離れた沖の舟に人がいる。この人が、A から海岸に沿って 15 km 離れた地点 B に最短時間で到着するには、AB 間の A から何 km 離れた地点に上陸すればよいか。ただし、舟の速さを毎時 4 km、人の歩く速さを毎時 5 km とする。

曲線の概形 ($F(x, y)=0$)

例題 50

曲線 $x^2y^2 = x^2 - y^2$ の概形をかけ。

指針 $F(x, y)=0$ の形で表された曲線 $y=f(x)$ の形にする。その前に対称性を利用すると、簡単になる場合がある。

解答 $F(x, y)=x^2y^2 - (x^2 - y^2) = 0$ とおくと $F(x, -y)=F(x, y)$ 、
 $F(-x, y)=F(x, y)$ であるから、曲線 $F(x, y)=0$ は x 軸、 y 軸に関して対称。まず、 $x \geq 0, y \geq 0$ の範囲で考えると $y^2 = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ から $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} > 0$$

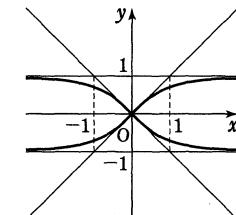
ゆえに、単調に増加する。

$$y'' = -\frac{3}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = \frac{-3x}{\sqrt{(x^2 + 1)^5}} \leq 0$$

よって、上に凸のグラフである。

$$\text{また、} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1 \text{ から、漸近線は直線 } y=1$$

以上により、対称性を考えて、曲線は右の図 □

**B**

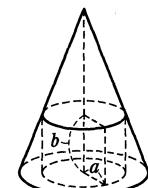
394 次の曲線の概形をかけ。

(1) $y^2 = x^2(4 - x^2)$

(2) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$

*395 曲線が t を媒介変数として $x = 1 + t^2, y = 2 + t - t^2$ と表されているとき、この曲線の $y \geq 0$ の部分を図示せよ。*396 $x > 0$ のとき、不等式 $e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ (n は自然数) を示せ。*397 $a < b$ かつ $a^b = b^a$ を満たす自然数 a, b の値を求めよ。398 右の図のように半径 a 、高さ b の直円柱があり、その上面が直円錐に内接している。(1) 直円錐の体積が最小になるときの直円錐の高さ h を求めよ。

(2) (1) のときの体積を求めよ。



323 接線の方程式、法線の方程式の順に

(1) $y = -x + 1, y = x - 1$

(2) $y = -2x + 4, y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

(3) $y = 2x, y = -\frac{1}{2}x$

(4) $y = \sqrt{3}x + 4, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

(5) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}$

(6) $y = \frac{2}{e}x, y = -\frac{e}{2}x + \frac{e^2}{2} + 2$

324 接線の方程式、法線の方程式の順に

(1) $y = x - 4, y = -x - 2$

(2) $y = -2x + 4, y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

325 交点(2, 0)における接線

(1) $y = x - 2$ (2) $y = -x + 2$

交点(-2, 0)における接線

(1) $y = -x - 2$ (2) $y = x + 2$

[交点における2接線の傾きの積は-1]

326 (1) $y = -5x + 9$ (2) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

(1) $\frac{dx}{dt} = -1, \frac{dy}{dt} = 1 + 2t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$

327 接線の方程式、法線の方程式の順に

(1) $y = \frac{\sqrt{3}}{6}x + \sqrt{3}, y = -2\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

(2) $y = 2x - 1, y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

328 (1) $y = -2x + 2, y = 6x - 6$

(2) $y = \frac{1}{4}x + 1$ (3) $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$,

$y = \frac{1}{27}x + \frac{100}{27}$ (4) $y = \frac{e^2}{4}x$

[$x=a$ に対応する点($a, f(a)$)における接線は $y=f'(a)(x-a)+f(a)$]

これが与えられた点を通る

(1) 接線 $y = 2a(x-a) + a^2 + 3$ が点(1, 0)を通るとすると $0 = 2a(1-a) + a^2 + 3$ から $a = -1, 3$

(2) 接線 $y = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) + \sqrt{a}$ が点(-4, 0)

を通るとから $0 = \frac{1}{2\sqrt{a}}(-4-a) + \sqrt{a}$

[$a > 0$ から $a = 4$ (3)(4)も同様]

329 (1) $y = 3x - 1 - \log 3$ (2) $y = \frac{x}{e^2} + 1$

[(1) $\frac{1}{x} = 3$ から接点 $(\frac{1}{3}, -\log 3)$]

$y = 3(x - \frac{1}{3}) - \log 3$

(2) $y = \frac{1}{a}(x-a) + \log a$ が点(0, 1)を通るから $1 = -1 + \log a$ よって $a = e^2$]

330 $y = -4x - 4; (-2, 4), \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

[$y = x^2, y = \frac{1}{x}$ の接点をそれぞれ

$(x_1, x_1^2), (x_2, \frac{1}{x_2})$ ($x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$)

とおくと、接点における接線の方程式は

$y = 2x_1x - x_1^2, y = -\frac{1}{x_2^2}x + \frac{2}{x_2}$

よって $2x_1 = -\frac{1}{x_2^2}, -x_1^2 = \frac{2}{x_2}$

(別解) $y = x^2$ 上の点(a, a^2)における接線

$y = 2ax - a^2$ が $y = \frac{1}{x}$ と接するから

$\frac{1}{x} = 2ax - a^2$ の判別式が0 よって $a = -2$]

331 $a = \frac{1}{e}, y = \frac{3}{\sqrt[e]{e}}x - 2$

[2曲線の共有点のx座標をpとすると $ap^3 = 3\log p$ また、2曲線の共有点における接線が一致するから $3ap^2 = \frac{3}{p}$]

332 $a = -3, 1, \frac{3}{2}$ [2曲線が同一の点を通

り、その点での微分係数が等しければよい。

 $x=t$ に対応する点において接するとする。

$2\cos t = 2\sin 2t$ を満たすtの値が

$2\sin t = a - \cos 2t$ を満たせばよい]

333 $a \leq -4, 0 \leq a$

[点(t, te^t)における接線の方程式は

$y - te^t = (t+1)e^t(x-t)$ これが $P(a, 0)$

を通るために $-te^t = (t+1)e^t(a-t)$ 整理して $t^2 - at - a = 0$ このtについての2次方程式が実数解をもてばよい]

334 (1) $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ (2) $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

335 (1) $c = \frac{1}{2}$ (2) $c = \frac{\pi}{2}$

(3) $c = 4$ (4) $c = \frac{1}{\log 2}$

336 [(1) $f(x)$ は閉区間[0, 3]で連続、開区間(0, 3)で微分可能、 $f(0) = f(3) = 0$ よって、平均値の定理から。実際 $f'(2) = 0$

(2) $f(0) = f(2\pi) = 1, f'(\pi) = 0$

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) = \frac{5}{2}, f'(1) = 0$

(4) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f'(0) = 0$

337 (1) $c = \sqrt{2}$ (2) $c = \log \frac{e^2 - 1}{2}$

338 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 3

[(1) $f(x) = \cos x$ (2) $f(x) = \sin x$

(3) $f(x) = e^x$ (4) ヒントから

$x(\log(x+3) - \log x) = \frac{3x}{c}$

 $x \rightarrow +\infty$ であるから、 $x > 0$ と考えて

$\frac{3x}{x+3} < \frac{3x}{c} < \frac{3x}{x} (x \rightarrow +\infty)$]

339 [(1) $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ から

$\frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\beta - \alpha} = \cos c < 1, \alpha < c < \beta$

(2) $\frac{p^n - q^n}{p - q} = nc^{n-1}, q < c < p; c^{n-1} < p^{n-1}$

(3) $\frac{\log b - a \log a}{b - a} = \log c + 1, a < c < b;$

$\frac{1}{e^2} < a < c < b < 1$]

340 ak $\left[\frac{f(x+a) - f(x)}{x+a-x} = f'(c),\right.$

$x < c < x+a$ または $x+a < c < x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+a) - f(x)) = \lim_{c \rightarrow \infty} af'(c)$]

341 $\theta = \frac{-3a + \sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2}}{3h} \cdot \frac{1}{2}$

$$(a+h)^3 = a^3 + h \cdot 3(a+h)^2$$

$a > 0, \theta > 0, h > 0$ から

$$a+\theta h = \sqrt{a^2 + ah + \frac{h^2}{3}}$$

342 (1) $y' = 3(x-1)^2 \geq 0$

(2) $y' = 2\cos x - 3$

$-5 \leq 2\cos x - 3 \leq -1$ から $y' < 0$

(3) $y' = \left\{ 3x + \left(\frac{1}{3}\right)x^3 \right\} \log 3 > 0$

(4) $x > 0$ において $y' = \frac{1}{x} > 0$

343 (1) $0 \leq x \leq 1, 2 \leq x$ で単調に増加；

$x \leq 0, 1 \leq x \leq 2$ で単調に減少

(2) $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ で単調に増加；

$-2 \leq x \leq -\sqrt{2}, \sqrt{2} \leq x \leq 2$ で単調に減少

(3) $-1 \leq x \leq 1$ で単調に増加；

$x \leq -1, 1 \leq x$ で単調に減少

(4) $x \geq 0$ で単調に増加, $x \leq 0$ で単調に減少

(2) 定義域は $-2 \leq x \leq 2, y' = \frac{-2(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$

344 (1) $x = \pm 1$ で極大値 3,

$x=0$ で極小値 2

(2) $x=3$ で極大値 $\frac{27}{e^3}$

(3) $x = -\sqrt{3}$ で極大値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x = \sqrt{3}$ で極小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $x=e$ で極大値 $\frac{1}{e}$

345 (1) $x=2$ で極小値 0

(2) $x=\frac{3}{2}$ で極大値 $\frac{25}{4}$,

$x=2$ で極小値 6,

$x=-2$ で極小値 -6

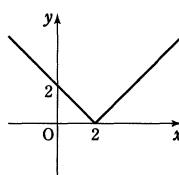
(3) $x=-\frac{4}{3}$ で

極大値 $\frac{10\sqrt{15}}{9}$,

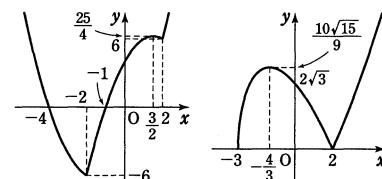
$x=2$ で極小値 0

[増減表をかく。参考図参照]

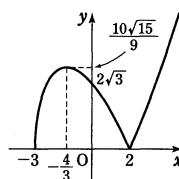
(1) [参考図]



(2) [参考図]



(3) [参考図]



346 (1) [1] $2 \leq x$ で単調に増加,

$0 < x \leq 2$ で単調に減少

[2] $x \geq -\frac{5}{2}$ で単調に増加,

$x \leq -\frac{5}{2}$ で単調に減少

(2) [1] $x=0$ で極大値 5, $x=\pm 3$ で極小値 -4

[2] $x=-\frac{8}{3}$ で極大値 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$.

$x=0$ で極小値 0

347 (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \leq x \leq 2\pi$ で単調に増

加; $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ で単調に減少

(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \leq x \leq 2\pi$ で単調に増加;

$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$ で単調に減少

[1] $y' = -e^{-x}(\sin x - \cos x)$

$= -\sqrt{2} e^{-x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(2) $y' = -\sin^2 x + (1 + \cos x) \cos x$
 $= 2\cos^2 x + \cos x - 1$

348 $x \leq 0$ で単調に増加,

$x \geq 0$ で単調に減少;

$x=0$ のとき極大値 1

[$y = e^{-x^2}$ から $y' = -2xe^{-x^2}$]

$e^{-x^2} > 0$ から $x < 0$ のとき $y' > 0$

$x > 0$ のとき $y' < 0$

また $y'=0$ のとき $x=0$]

349 (1) $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ で極大値 $\frac{1}{2}$,

$x=0$ で極小値 0 (2) 極値なし

(3) $x = -\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{9}{4}e^{-2}$,

$x = \frac{4}{5}$ で極小値 $-e^{\frac{16}{5}}$

(4) $x = -3$ で極大値 0,

$$x = -\frac{13}{5}$$
 で極小値 $-\frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$

[1] $-1 \leq x < 0$ のとき $y = -x\sqrt{1-x^2}$,

$0 \leq x \leq 1$ のとき $y = x\sqrt{1-x^2}$

(4) $y' = \frac{5x+13}{3\sqrt{x+3}}$

$x = -\frac{13}{5}$ と $x = -3$ の前後を調べる]

350 (1) $a=4, b=4$ (2) $a=-5, b=10$

[$y=f(x)$ とおくと $f(1)=5, f'(1)=0$]

351 $a=0$ [$f'(-1)=0$]

352 $a = \frac{1}{2}$ [$y' = \frac{x^2-2a}{x^2}$;

$a < 0$ のとき, $y' = 0$ は実数解をもたない。

$a=0$ のとき, $y=x$ となり極値をもたない。

$a > 0$ のとき $x=\sqrt{2a}$ のとき極小となるから

$\sqrt{2a} + \frac{2a}{\sqrt{2a}} = 2$

353 (1) $k > -9$ (2) $-1 < k < 1$

[1] $f'(x) = \frac{x^2-6x-k}{(x-3)^2}$ $x^2-6x-k=0$ が

$x=3$ 以外の異なる 2 つの実数解をもつ条件

(2) $f'(x) = \frac{e^{kx}}{(x^2+1)^2}(kx^2-2x+k)$

$k=0$ または $kx^2-2x+k=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件]

354 (1) $x=2$ のとき最大値 2;

$x=1$ のとき最小値 -2

(2) $x=2$ のとき最大値 1;

$x=0$ のとき最小値 -1

(3) $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $\frac{9}{2}$;

$x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $-\frac{9}{2}$

(4) $x=0, 2\pi$ のとき最大値 4;

$x=\pi$ のとき最小値 -4

(5) $x=0, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ のとき最大値 1;

$x = \frac{\pi}{2}, \pi$ のとき最小値 -1

(6) $x=3$ のとき最大値 $\log \frac{10}{3}$;

$x=1$ のとき最小値 $\log 2$

355 (1) 1 辺の長さが 4 の正方形

(2) 1 辺の長さが 4 の正方形

(3) 1 辺の長さが $4\sqrt{2}$ の正方形

(4) 直径が 4, 高さが 4 の直円柱

(5) 直径が $4\sqrt{2}$, 高さが $4\sqrt{2}$ の直円柱

356 $x = \frac{3}{2}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$;

$x=0, 2$ のとき最小値 0

357 (1) $x=1+\sqrt{2}$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$;

$x=1-\sqrt{2}$ のとき最小値 $-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

(2) $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $3\sqrt{2}$;

$x=-3$ のとき最小値 -3

(3) 最大値はなし; $x = \frac{1}{e}$ のとき最小値 $-\frac{1}{e}$

(4) 最大値はなし;

$x = \frac{1}{3} \log 2$ のとき最小値 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

(5) 最大値はなし; $x=1$ のとき最小値 $3\sqrt{2}$

(6) 最大値はなし; $x=0$ のとき最小値 0

[1] $y' = \frac{-(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}$

$x=1 \pm \sqrt{2}$ で極値をとる。

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$

(2) 定義域は $-3 \leq x \leq 3$

$y' = \frac{\sqrt{9-x^2}-x}{\sqrt{9-x^2}}, x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ で極値をとる。

(5) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$

$y'=0$ とすると

$\sqrt{(x-3)^2+4} = -(x-3)\sqrt{x^2+1}$

これを解くと $x=1$ ($x=-3$ は不適)

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$

(6) $x > 0$ のとき $y' = (x+1)e^x > 0$

$x < 0$ のとき $y' = -(x+1)e^x$

$x=-1$ で極値をとる。

$x=0$ では、微分可能でないが連続

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty, y \geq 0$

358 $a=4$ [$y' = \frac{(x-1)^2-a}{(x-1)^2}$

$x=1+\sqrt{a}$ で最小値をとる]

359 $a=-\frac{1}{2}, b=-2$;

$x=-\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$

[$f'(2)=0, f(2)=-1$]

360 $a=\pm 2$ [$y=f(x)$ とおく。]

$a>0$ のとき, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) < f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ であるから,

最大値 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi a}{2}$,

$a<0$ のとき最大値 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi a}{2}$

361 最小値 12 [題意の直線は, $m<0$ として, $y-3=m(x-2)$ とおける。]

$S=\frac{1}{2}(2-\frac{3}{m})(3-2m)$]

362 1辺の長さが $4\sqrt{3}$ の正三角形 [Oは円の中心, AB=AC, $\angle BAO=\theta$ ($0<\theta<\frac{\pi}{2}$)],

$\triangle ABC=S$ とするとき $S=\frac{8(1+\sin\theta)^2}{\sin 2\theta}$

$S'=\frac{16(1+\sin\theta)(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)}{\sin^2 2\theta}$]

363 $P(\sqrt{3}, 0), \theta=\frac{\pi}{6}$

[まず, $\tan\theta$ を x で表す。 $\tan\theta$ が最大となる点Pの座標を求めればよい]

364 (1) $x<\frac{2}{3}$ で上に凸, $\frac{2}{3}<x$ で下に凸,

変曲点 $(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27})$

(2) $x<1$ で上に凸, $1<x$ で下に凸,
変曲点 $(1, e^{-2})$

(3) $0<x<\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi< x<\pi$ で上に凸,

$\frac{\pi}{6}< x<\frac{5}{6}\pi$ で下に凸,

変曲点 $(\frac{\pi}{6}, \frac{18+\pi^2}{36}), (\frac{5}{6}\pi, \frac{18+25\pi^2}{36})$

365 (1) $x=2, y=2x$

(2) $x=-1, y=x-1$ (3) $y=x$

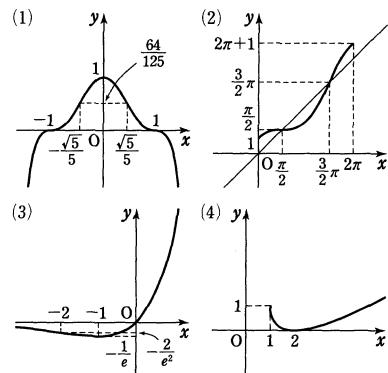
[(1) $\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} y = \mp\infty, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y-2x) = 0$

(2) $y=x-1+\frac{1}{x+1}, \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} y = \pm\infty,$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y-x+1) = 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (y-x) = 0$]

366 (1)~(4) [図]



367 (1) $x=0$ で極大値 1, $x=\pm 1$ で極小値 0

(2) $x=\frac{\pi}{4}$ で極大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$,

$x=\frac{5}{4}\pi$ で極小値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}}$

[(1) $y'=4x(x+1)(x-1), y''=12x^2-4$

(2) $y'=e^x(\cos x - \sin x), y''=-2e^x \sin x$]

368 (1) $x<-1, 1<x$ で上に凸;

$-1<x<1$ で下に凸;

変曲点 $(-1, \log 2), (1, \log 2)$; [図]

(2) $x>0$ で下に凸, 変曲点はなし; [図]

(3) $x<-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}< x$ で下に凸;

$-\frac{\sqrt{6}}{2}< x<\frac{\sqrt{6}}{2}$ (1)

で上に凸; 変曲点

$(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$,

$(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$; [図]

(2)

(3)

369 (1) $y=3, y=-3$

(2) $y=4x-\frac{1}{2}, y=2x+\frac{1}{2}$

[(1) すべての実数 x の値で連続であるから, x 軸に垂直な漸近線はない。]

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} = 3$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = -3$

(2) 定義域 ($x \leq -1, 2 \leq x$) で, この関数は連続であるから, x 軸に垂直な漸近線はない。

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) = 4$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} (y-4x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x-2} - x)$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}+x} = -\frac{1}{2}$

同様に $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} (y-2x) = \frac{1}{2}$]

370 (1)~(7) [図]

[(1) $y' = \frac{-3(x^2-1)}{(x^2+1)^2}, y'' = \frac{6(x^3-3x)}{(x^2+1)^3}$,

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$

(2) 定義域は $x \neq \pm 1$,

$y' = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}, y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$,

$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \infty, \lim_{x \rightarrow -1-0} y = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \infty, \lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y-x) = 0$

(3) 定義域は $x \geq -1$,

$y' = \frac{3x}{2\sqrt{x+1}}, y'' = \frac{3(x+2)}{4(x+1)\sqrt{x+1}}, \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$

(4) $y' = \frac{5x}{3\sqrt[3]{x-2}}, y'' = \frac{10(x-3)}{9(x-2)\sqrt[3]{x-2}}$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$

(5) 定義域は $x \neq 0$,

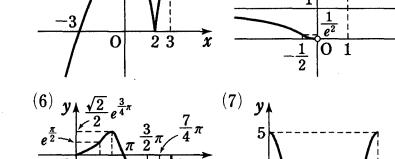
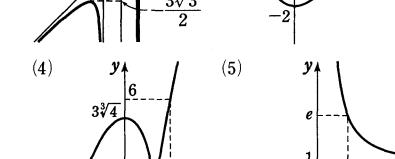
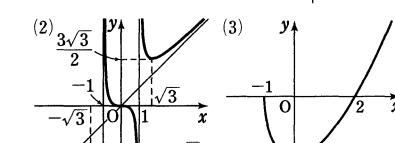
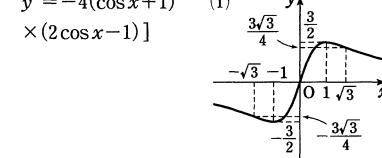
$y' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, y'' = \frac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$,

$\lim_{x \rightarrow 0+0} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0-0} y = 0$,

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y-1) = 1$

(6) $y' = \sqrt{2}e^x \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right), y'' = 2e^x \cos x$

(7) $y' = -4(1+\cos x)\sin x, y'' = -4(\cos x+1)(2\cos x-1)$



371 変曲点 $(2, 16)$
[$f(x) = -x^3 + 6x^2$ とおくと,
 $\frac{f(2+h)+f(2-h)}{2} = f(2)$ を示す]

372 $a=0, b=-1, c=3$
[$x=1$ のとき $y'=0$
 $x=0$ のとき $y''=0, y=3$
逆の味を忘れずにする]

373 $a<3$ のとき 2 個, $a \geq 3$ のとき 0 個
[$y''=(x^2+6x+6+a)e^x$
 $a=3$ のときは, $y''=(x+3)^2e^x$ となり,
 $x=-3$ で $y''=0$ となるが, $x=-3$ の前後で y'' の符号は変化しない]

374 [(1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 28$ とすると
 $f'(x) = 4x^2(x-3)$ $f(x) \geq f(3) = 1 > 0$

(2) $f(x) = x^4 - 4x + 3$ とすると

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4(x-1)(x^2+x+1) > 0 \quad (x>1) \\f(x) &> f(1)=0 \quad (3)(4) \text{ も同様}\end{aligned}$$

$$(5) \quad f(x)=\frac{1+x}{2}-\log(1+x) \text{ とおくと}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}$$

$x=1$ で最小値 $1-\log 2 > 0$ をとる]

375 (1) 2個 (2) 1個 (3) 2個

$$[(1) \quad f(x)=x^4+6x^2-5 \text{ とおくと}]$$

$$f'(x)=4x(x^2+3), \quad f(0)=-5 < 0$$

$$f(1)=2>0, \quad f(-1)=2>0 \quad (2)(3) \text{ も同様}]$$

376 (2) 2個

$$[(1) \quad f(x)=e^x-ex \text{ とおくと}]$$

$$f'(x)=e^x-e$$

$x>1$ のとき $f'(x)>0$ また $f(1)=0$

(2) $f(x)=x-4\log x$ すると $f(x)$ は $x=4$ で極小で $f(4)<0$,

$x>4$ で $f'(x)>0, 0<x<4$ で $f'(x)<0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=+\infty]$$

377 [(1) $f(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$ とおくと]

$$f(0)=0 \quad \text{また}, \quad f'(0)=0, \quad f''(x) \geq 0 \quad \text{から} \\ f'(x)>0$$

$$(2) \quad f(x)=\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right) \text{ とおくと}$$

$$\text{と } f(0)=0 \quad \text{また}, \quad f'(0)=0, \quad f''(x)>0 \quad \text{から} \\ f'(x)>0]$$

378 (1) $a<1$ のとき 1 個,

$a=1$ のとき 2 個, $1<a$ のとき 3 個

(2) $a<-1$ のとき 0 個, $a=-1$ のとき 1 個, $-1<a \leq 0$ のとき 2 個, $0<a$ のとき 1 個

$$(3) \quad a<-\frac{2}{\sqrt{e}} \text{ のとき 0 個, } a=-\frac{2}{\sqrt{e}},$$

$$a \geq 0 \text{ のとき 1 個, } -\frac{2}{\sqrt{e}} < a < 0 \text{ のとき 2 個}$$

$$[(1) \quad f(x)=\frac{x^3+2}{3x} \text{ とすると, 極小値}]$$

$$f(1)=1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)=+\infty$$

$$(2) \quad f(x)=x-2\sqrt{x} \text{ とすると } x \geq 0 \text{ において} \\ f(0)=0, \quad \text{最小値 } f(1)=-1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty$$

$$(3) \quad f(x)=(2x-1)e^x \text{ とおくと}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0, \quad \text{最小値 } f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\sqrt{e}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty]$$

379 (1) $a<0$ または $(a=0, b>0)$ または $(a>0, b \geq a-a \log a)$

$$(2) \quad a \leq \frac{e^3}{27}$$

[(1) $a<0, a=0, a>0$ で場合分け]

$$(2) \quad f(x)=\frac{e^x}{x^3} \text{ とおくと, 最小値は } f(3)]$$

380 [(1) [] 内の関数から

$$f'(x)=\frac{(x-a)^2}{x(x+a)^2} \geq 0 \quad (x>0)$$

$f(a)=0$ から $x \geq a > 0$ で $f(x) \geq 0$

ゆえに $b \geq a$ のとき $f(b) \geq 0$

(2) [] 内の関数から

$$f'(x)=\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$g(x)=x \cos x - \sin x$ とおくと

$g(x)$ は $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ で単調に減少し常に負。

ゆえに $f'(x) < 0$ よって $f(\alpha) > f(\beta)$

381 速度 44, 加速度 24

382 速さ, 加速度の大きさの順に

$$(1) \quad 2\sqrt{1+t^2}, \quad 2 \quad (2) \quad 1, \quad 1$$

383 (1) $1+5x$ (2) $1+x$ (3) $2x$

$$(4) \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$[(1) \quad f(x)=(1+x)^5, \quad f'(x)=5(1+x)^4]$$

$$f(x) \doteq f(0)+f'(0)x=1+5x$$

$$(2) \quad f(x)=\frac{1}{1-x}, \quad f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f(x) \doteq f(0)+f'(0)x=1+x$$

$$(3) \quad f(x)=\log(1+2x), \quad f'(x)=\frac{2}{1+2x}$$

$$f(x) \doteq f(0)+f'(0)x=2x$$

$$(4) \quad f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right), \quad f'(x)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$$

$$f(x) \doteq f(0)+f'(0)x=\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

384 (1) 0.4698 (2) 10.0117

$$[(1) \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{90}\right) \doteq \cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3} \times \frac{\pi}{90}]$$

$$(2) \quad \sqrt[3]{1003.5}=\sqrt[3]{1000+3.5} \doteq \sqrt[3]{1000} + \frac{1}{300} \cdot 3.5$$

385 (1) 速度 -30 m/s , 加速度 -10 m/s^2

(2) $x, 0.5076 \quad [(1) \quad x=30t-5t^2,$

$$\frac{dx}{dt}=30-10t, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-10$$

$x=0$ のとき $30t-5t^2=0$ から $t=0, 6$

$t=6$ のときの $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ を求める

$$(2) \quad \sin x \doteq \sin 0 + \cos 0 \cdot x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right) \doteq \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \times \frac{\pi}{360}$$

386 順に $\frac{1}{3\pi} \text{ cm/s}, 1 \text{ cm}^2/\text{s}$

$$\left[V=\frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad h=2r \text{ から } V=\frac{\pi}{12}h^3 \right.$$

$$\left. \frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2 \frac{dh}{dt}, \quad \frac{dV}{dt}=3 \text{ また } S=\pi r^2=\frac{\pi}{4}h^2 \right]$$

387 5m/s [時刻 t 秒のとき, 舟の岸からの距離を x m, 綱の長さを y m とする

$$\frac{dy}{dt}=-4, \quad x^2+30^2=y^2, \quad y=58-4t$$

これから $\frac{dx}{dt}$ を求める]

388 (1) $\frac{1}{2}a^2\omega \cos \omega t$ (2) $a\omega \cos \frac{\omega t}{2}$

[$\angle \text{AOP}=\omega t$ であるから

$$\triangle \text{OAP}=\frac{1}{2}a^2 \sin \omega t, \quad AP=2a \sin \frac{\omega t}{2}$$

389 (1) 1.115 (2) 1.995

$$\left[(1) \quad x=\frac{\pi}{3}+h, \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right) \doteq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{h}{2} = 0.9 \right]$$

390 0.99, 3.01 [$f(x)=(x-1)(x-3)$ とおき, $f(x)=0.02$ の解を $x=1+h, 3+k$ すると $f(1+h) \doteq f(1)+hf'(1), f(3+k) \doteq f(3)+kf'(3)]$

391 $a>16 \quad [f'(x)=\frac{2x^4-(a-4)x^2+a+2}{(x^2+1)^2}$

$2t^2-(a-4)t+a+2=0$ が異なる 2 つの正の解をもつ条件は $(a-4)^2-4 \cdot 2(a+2)>0,$

$$\frac{a-4}{2}>0, \quad \frac{a+2}{2}>0]$$

392 $a=3 \quad [f'(x)=\frac{a(2 \cos x+1)}{(\cos x+2)^2}]$

$a=0$ のとき $f(x)=0, a>0$ のとき $x=\frac{2}{3}\pi$

で最大値 $\frac{a}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}, a<0$ のとき $x=0, \pi$

で最大値 0]

393 12 km

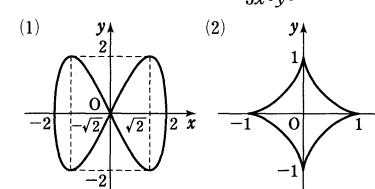
[A から x km の地点に上陸するとすれば,

$$\text{所要時間は } t=\frac{\sqrt{x^2+9^2}}{4}+\frac{15-x}{5} \text{ (時間)}$$

394 (1) [図] (2) [図] [$x \geq 0, y \geq 0$

$$\text{のとき} \quad (1) \quad y'=\frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}, \quad y''=\frac{2x(x^2-6)}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$$

$$(2) \quad y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}<0, \quad y''=\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}>0]$$



395 [図]

[$y \geq 0$ から $-1 \leq t \leq 2$

$$\frac{dx}{dt}=2t,$$

$$\frac{dy}{dt}=1-2t \text{ から増減}$$

表をつくる。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{4t^3}]$$

396 [数学的帰納法で証明。

$$f_n(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

とおくと $\{f_{k+1}(x)\}'=f_k(x), f_{k+1}(0)=0\}$

397 $a=2, b=4$ [$a^b=b^a$ から $b \log a=a \log b$

$$f(x)=\frac{\log x}{x} \text{ とおく}]$$

398 (1) 3b (2) $\frac{9}{4}\pi a^2 b$

[直円錐の底面の半径を r とすると

$$\frac{h}{r}=\frac{b}{r-a} \quad \text{よって, 直円錐の体積 } V \text{ は}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^3}{r-a}$$