

## 第5章 微分法

## 30 導関数の計算

1 微分可能と連続  $f(x)$  が  $x=a$  で微分可能  $\Rightarrow f(x)$  は  $x=a$  で連続

注意 逆は不成立。例  $f(x)=|x|$

$$f(x) \text{ の導関数 } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2 導関数の公式  $f(x), g(x)$  を微分可能な関数とする。

① 基本公式  $\{kf(x)+lg(x)\}' = kf'(x)+lg'(x)$  ( $k, l$  は定数)

② 積の導関数  $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

③ 商の導関数  $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

④ 合成関数の導関数  $y=f(u), u=g(x)$  のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

⑤ 逆関数の導関数  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$  例  $\{(ax+b)^n\}' = n(ax+b)^{n-1} \cdot a$   
例  $x=y^2$  のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

⑥  $x^r$  の導関数  $r$  が有理数 (実数も可) のとき  $(x^r)' = rx^{r-1}$  ( $x>0$ )

## A

284 関数  $f(x)=|x^2-4|$  は  $x=2$  で微分可能でないことを示せ。

285 定義に従って、次の関数を微分せよ。また、 $f'(1)$  を求めよ。

(1)  $f(x)=2x^3$  (2)  $f(x)=\frac{1}{x^2}$  (3)  $f(x)=\sqrt{3x}$

■ 次の関数を微分せよ。[286~290]

286 (1)  $y=x^2+3x+2$  (2)  $y=2x^5-3x^4+7x$  (3)  $y=x^4-4x^2+3$

(4)  $y=(2x+1)(x+3)$  (5)  $y=(x^2+x)(x^4-2)$  (6)  $y=x^2(x+1)$

287 (1)  $y=-\frac{1}{x^4}$  (2)  $y=\frac{x+1}{x-1}$  (3)  $y=\frac{x}{x^2-x+1}$

288 (1)  $y=(2x-1)^4$  (2)  $y=(2x^2+1)^5$  (3)  $y=(x^2+2x+3)^2$

289 (1)  $y=x^{\frac{1}{2}}$  (2)  $y=\sqrt[3]{x^3}$  (3)  $y=\sqrt{x^2-2}$

Aの  
まとめ

290 (1)  $y=(x^4+3x)(x+4)$  (2)  $y=(3x^4-4x-1)^3$

(3)  $y=\frac{1}{(2x^4+5x)^4}$  (4)  $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

## 連続性、微分可能性

## 例題 37

次の関数の  $x=0$  における連続性と微分可能性を調べよ。

$$x \neq 0 \text{ のとき } f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0$$

指針 連続性、微分可能性 定義に従って考える。

連続性  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  すなわち  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$  となるかどうか。

微分可能性  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$  が一定の値に収束するかどうか。

解答  $0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1, 0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$  であるから  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

よって、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$  となるので、 $f(x)$  は  $x=0$  で連続 罫

また  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$

$h \rightarrow 0$  のとき  $\sin \frac{1}{h}$  は振動し、一定の値には収束しない。

よって、 $f(x)$  は  $x=0$  で微分可能でない 罫

## B

291 次の関数を微分せよ。

(1)  $y = x\sqrt{x^2+1}$  (2)  $y = \frac{x}{(1+x^3)^2}$  (3)  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(4)  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$  (5)  $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$  (6)  $y = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$

292 次の関数について、 $\frac{dy}{dx}$  を指定した文字を用いて表せ。

(1)  $x = y^2 + y$  ( $y$  を用いる) (2)  $x = y^3 + 1$  ( $x$  を用いる)

293  $f(x) = x^3 + x$  の逆関数  $f^{-1}(x)$  の  $x=2$  における微分係数を求めよ。

294  $f(x)$  が  $x=a$  で微分可能であるとき、次の極限を  $f'(a)$  などで表せ。

(1)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{h}$  (2)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a-2h)}{h}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(a) - a^3 f(x)}{x-a}$  (4)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(x) - a^2 f(a)}{x-a}$

\*295 次の関数の  $x=0$  における連続性と微分可能性を調べよ。

$$x \neq 0 \text{ のとき } f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0$$

**31** いろいろな関数の導関数

**1** 三角関数の導関数

①  $(\sin x)' = \cos x$     ②  $(\cos x)' = -\sin x$     ③  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

**2** 対数・指数関数の導関数  $a > 0, a \neq 1$  とする。

①  $e$  の定義  $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = 2.71828 \dots$

② 対数関数の導関数

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}, (\log_a|x|)' = \frac{1}{x \log a}, \{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

③ 指数関数の導関数  $(e^x)' = e^x, (a^x)' = a^x \log a$



■ 次の関数を微分せよ。[296~299]

- 296** (1)  $y = 2x - \cos x$     \*(2)  $y = \sin x - \tan x$     (3)  $y = \cos(2x+1)$   
 (4)  $y = \tan 3x$     (5)  $y = \cos(\sin x)$     \*(6)  $y = \sin x^2$   
 (7)  $y = \sin^3 x$     \*(8)  $y = \sqrt{\sin x}$     \*(9)  $y = \sin 3x \cos 5x$   
 (10)  $y = (x^2+1)\sin x$     (11)  $y = \frac{1}{3+\sin x}$     \*(12)  $y = \frac{x^2}{\cos x}$   
 \*(13)  $y = \sin^2 x + \cos 2x$     (14)  $y = \sin^2 x + \cos^2 x$     (15)  $y = \frac{1}{\cos x} + \tan^2 x$
- 297** (1)  $y = \log 4x$     \*(2)  $y = \log(x^2-2)$     (3)  $y = \log \sqrt{x^2-1}$   
 \*(4)  $y = \log_3 4x$     (5)  $y = \log_{10}(3x+1)$     \*(6)  $y = x^3 \log x$   
 (7)  $y = (\log x)^4$     \*(8)  $y = \log|x^2-4|$     (9)  $y = \log \left| \frac{3x+1}{2x-1} \right|$
- 298** (1)  $y = e^{5x}$     \*(2)  $y = e^{2x} + e^{x^2}$     (3)  $y = xe^{-3x}$   
 \*(4)  $y = x^2 e^x$     (5)  $y = 3^{4x}$     \*(6)  $y = 5^{-x}$
- 299** \*(1)  $y = e^x \sin x$     (2)  $y = e^x \tan x$     \*(3)  $y = \sin(\log x)$   
 (4)  $y = \log(\sin x)$     (5)  $y = \log(\log x)$     \*(6)  $y = e^{n \ln x}$

**A** のまとめ **300**  $a$  は 1 でない正の定数とする。次の関数を微分せよ。

- (1)  $y = \sin x \cos x$     (2)  $y = \log_a(x^2-1)$     (3)  $y = \frac{e^x}{x}$

対数微分法

**例題 38** 関数  $y = \frac{(x-3)^4}{(3x+1)^2(x^2-2)^3}$  を微分せよ。

**指針** 対数微分法 まず、両辺の絶対値の自然対数をとる。

**解答** 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = 4\log|x-3| - 2\log|3x+1| - 3\log|x^2-2|$$

両辺を  $x$  について微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{4}{x-3} - \frac{2 \cdot 3}{3x+1} - \frac{3 \cdot 2x}{x^2-2} = \frac{2(-6x^3+35x^2+3x-22)}{(x-3)(3x+1)(x^2-2)}$$

$$y' = y \cdot \frac{2(-6x^3+35x^2+3x-22)}{(x-3)(3x+1)(x^2-2)} = \frac{2(x-3)^3(6x^3-35x^2-3x+22)}{(3x+1)^3(x^2-2)^4} \quad \square$$



**301** 次の関数を微分せよ。ただし、 $a, b$  は定数とする。

- (1)  $y = \sqrt{1+\sin^2 x}$     \*(2)  $y = \sin \sqrt{x^2+x+1}$   
 \*(3)  $y = e^{-ax} \sin bx$     (4)  $y = a^{x^2+1}$  ( $a > 0, a \neq 1$ )  
 (5)  $y = e^{\log x}$     \*(6)  $y = \log_x a$  ( $a > 0$ )  
 \*(7)  $y = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$     (8)  $y = \log \{e^x(1-x)\}$

**302** 対数微分法により、次の関数を微分せよ。

- (1)  $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$     (2)  $y = \frac{(x^2-1)^4}{(x-2)^6(2x+5)^2}$   
 \*(3)  $y = \sqrt[3]{(2x+1)(x^3+1)}$     (4)  $y = \sqrt[5]{\frac{(3x-2)^2}{(x-1)^2(x^2+3)}}$   
 \*(5)  $y = x^{3x}$  ( $x > 0$ )    (6)  $y = (\sin x)^{\log x}$  ( $0 < x < \pi$ )

**303**  $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$  を用いて、次の極限值を求めよ。

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$     (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$   
 \*(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$     (4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

**ヒント 303** (1)  $2x = h$  とおく。 (3)  $-\frac{2}{x} = h$  とおく。

## 32 いろいろな導関数

### 1 高次導関数

$f(x)$  の第  $n$  次導関数 関数  $y=f(x)$  を引き続き  $n$  回微分して得られる関数

### 2 方程式 $F(x, y)=0$ で表された関数の導関数

両辺を  $x$  について微分し、 $\frac{dy}{dx}$  を求める。

### 3 媒介変数で表された関数の導関数

$$x=f(t), y=g(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$



304 次の関数の第 3 次までの導関数を求めよ。

(1)  $y=x^4-5x^3+1$

\* (2)  $y=3x^2+5x$

(3)  $y=\frac{1}{x+2}$

\* (4)  $y=\sin x + \cos x$

\* (5)  $y=\log(2x+1)$

\* (6)  $y=e^x+e^{-x}$

305 次の関数の第  $n$  次導関数を求めよ。

(1)  $y=e^x$

\* (2)  $y=e^{3x}$

(3)  $y=x^{n-1}$

\* (4)  $y=x^{n+1}$

306  $y=x\sqrt{1+x^2}$  のとき、 $(1+x^2)y''+xy'=4y$  が成り立つことを証明せよ。

307 次の関数について、 $\frac{dy}{dx}$  を求めよ。ただし、 $y$  を用いて表してもよい。

(1)  $2x+3y=5$

\* (2)  $y^2=8x$

(3)  $x^2+y^2=9$

\* (4)  $\frac{x^2}{9}-y^2=1$

308 次の関数について、 $\frac{dy}{dx}$  を  $t$  の関数として表せ。

(1)  $x=2t+1, y=t^2$

\* (2)  $x=t-\sin t, y=1-\cos t$

A の  
まとめ

309 (1) 次の関数の第 4 次導関数を求めよ。

[1]  $y=2x^4$

[2]  $y=3^x$

[3]  $y=\sin x$

(2) 次の関数について、 $\frac{dy}{dx}$  を求めよ。

[1]  $x=3\sin t, y=-\cos t$

[2]  $2x^2+3y^2=1$

## パラメータ表示の第 2 次導関数

### 例題 39

関数  $x=2\cos t, y=3\sin t$  について、 $\frac{d^2y}{dx^2}$  を  $t$  で表せ。

指針▶ 第 2 次導関数  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

解答▶  $\frac{dx}{dt} = -2\sin t, \frac{dy}{dt} = 3\cos t$  ゆえに  $\frac{dy}{dx} = -\frac{3\cos t}{2\sin t}$   
 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( -\frac{3\cos t}{2\sin t} \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{3\cos t}{2\sin t} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\tan t} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$   
 $= -\frac{3}{2\sin^2 t} \cdot \left( -\frac{1}{2\sin^2 t} \right) = \frac{3}{4\sin^4 t}$  答



310 次の関数の第 3 次導関数を求めよ。

(1)  $y=\sqrt{2x+1}$

(2)  $y=\tan x$

(3)  $y=e^x \sin x$

(4)  $y=x^3 \log x$

311 次の関数について、 $\frac{dy}{dx}$  を  $t$  で表せ。ただし、 $a, b$  は正の定数とする。

\* (1)  $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, y = \frac{2t}{1-t^2}$

(2)  $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t$

312 次の関数について、 $\frac{dy}{dx}$  を求めよ。ただし、 $y$  を用いて表してもよい。

\* (1)  $xy+y^3=x^2$

(2)  $(y-2)^2=x+5$

(3)  $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=1$

\* (4)  $x=\cos y$

313 次のことが成り立つことを証明せよ。ただし、 $a, b, r$  は定数とする。

(1)  $y=e^{-2x}(a \cos 2x+b \sin 2x)$  のとき  $y''+4y'+8y=0$

\* (2)  $x^2+y^2=r^2$  のとき  $1+(y')^2+yy''=0$

## 発展

\*314 関数  $x=t-\sin t, y=1-\cos t$  について、 $\frac{d^2y}{dx^2}$  を  $t$  で表せ。

ヒント▶ 314 例題 39 参照。

## 33 第5章 演習問題

整式の決定

例題 40

$f(x)$  は 0 でない  $x$  の整式で、次の関係を満たしているものとする。 $(x-1)f''(x)+(2x-3)f'(x)-8f(x)=0$

(1)  $f(x)$  の次数を求めよ。(2)  $f(2)=8$  のとき  $f(x)$  を求めよ。

【指針】 整式の決定 最高次の項を  $ax^n$  ( $a \neq 0$ ) として、まず  $n$  を定める。

- 【解答】 (1)  $f(x)=ax^n+\dots$  ( $a \neq 0$ ) とすると  
 $f'(x)=nax^{n-1}+\dots$ ,  $f''(x)=n(n-1)ax^{n-2}+\dots$   
 これを、与えられた関係式に代入すると  $(2na-8a)x^n+\dots=0$   
 よって  $2na-8a=0$   $a \neq 0$  から  $2n-8=0$  よって  $n=4$  罫
- (2) (1) から  $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$  とおくと  
 $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ ,  $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$   
 これらを与えられた関係式に代入して整理すると  
 $2bx^3+(12a+3b+4c)x^2+(6b+4c+6d)x+(2c+3d+8e)=0$   
 よって、 $b=0$ ,  $12a+3b+4c=0$ ,  $6b+4c+6d=0$ ,  $2c+3d+8e=0$   
 更に、 $f(2)=8$  これらを解いて  $f(x)=x^4-3x^2+2x$  罫

B

315 微分係数を利用して、次の極限を求めよ。ただし、 $a$  は定数とする。

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos^2 x - \cos^2 a}{x - a} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad *(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 \cos x - x^2 \cos a}{x - a}$$

\*316  $x \neq 1$  のとき  $1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$  である。この両辺を微分した結果を利用して、 $1+2 \cdot 2+3 \cdot 2^2+4 \cdot 2^3+\dots+n \cdot 2^{n-1}$  の和を求めよ。

317 次の等式を証明せよ。ただし、 $m, n$  は自然数で、 $m > n$  とする。

$$(1) \frac{d^n}{dx^n} x^m = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$$

$$*(2) \frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (3) \frac{d^n}{dx^n} \log x = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

\*318  $f(x)$  は 0 でない  $x$  の整式で、次の等式を満たしているものとする。

$$xf''(x) + (1-x)f'(x) + 3f(x) = 0, \quad f(0) = 1$$

- (1)  $f(x)$  の次数を求めよ。 (2)  $f(x)$  を求めよ。

微分可能な関数

例題 41

関数  $y=f(x)$  について、 $x \leq 2$  のとき  $f(x)=x+1$ ,  $x > 2$  のとき  $f(x)=ax^2+bx$  とする。関数  $y=f(x)$  が常に微分可能となるように、 $a, b$  の値を定めよ。

【指針】 微分可能 ここでは、 $x=2$  において微分可能となるようにする。

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

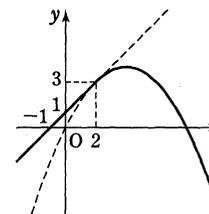
【解答】  $x=2$  で微分可能  $\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{2+h+1-3}{h} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{a(2+h)^2+b(2+h)-3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \left\{ ah + (4a+b) + \frac{4a+2b-3}{h} \right\} \end{aligned}$$

これが 1 に収束するためには  
 $4a+b=1, 4a+2b-3=0$

$$\text{罫 } a = -\frac{1}{4}, b = 2$$



B

\*319 関数  $y=f(x)$  について、 $x \leq 1$  のとき  $f(x)=ax^2+bx$ ,  $x \geq 1$  のとき  $f(x)=2x-5$  とする。関数  $y=f(x)$  が常に微分可能となるように、定数  $a, b$  の値を定めよ。

- \*320 (1) 整式  $f(x)$  を  $(x-k)^2$  で割った余りを  $f(k), f'(k)$  で表せ。  
 (2) この  $f(x)$  が  $(x-k)^2$  で割り切れるための条件を求めよ。  
 (3)  $f(x)=x^3+x^2+ax+b$  が  $(x-1)^2$  で割り切れるように、定数  $a, b$  の値を定めよ。

\*321 関数  $f(x)$  が次の条件を満たすとき、 $f'(x)$  を求めよ。  
 すべての実数  $x, y$  に対して  $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y), f'(0)=1$

\*322 実数全体で定義された関数  $f(x)$  が、第 2 次導関数  $f''(x)$  をもつとする。次のことを示せ。

- (1)  $y=f(x)$  のグラフが直線  $x=a$  に関して対称であれば、 $f'(a)=0$   
 (2)  $y=f(x)$  のグラフが点  $(a, f(a))$  に関して対称であれば、 $f''(a)=0$

- 284  $\left[ \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{|h^2+4h|}{h} \right.$   
 $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h^2+4h}{h} = 4$   
 $\left. \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-(h^2+4h)}{h} = -4 \right]$
- 285 (1)  $f'(x) = 6x^2, f'(1) = 6$   
 (2)  $f'(x) = -\frac{2}{x^3}, f'(1) = -2$   
 (3)  $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}, f'(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\left[ (1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^3 - 2x^3}{h} \right.$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (6x^2 + 6hx + 2h^2)$   
 $(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x-h}{(x+h)^2 x^2}$   
 $= -\frac{2x}{x^4} \quad (3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h\{\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}\}} = \frac{3}{2\sqrt{3x}} \left. \right]$
- 286 (1)  $y' = 2x + 3$  (2)  $y' = 10x^4 - 12x^3 + 7$   
 (3)  $y' = 4x^3 - 8x$  (4)  $y' = 4x + 7$   
 (5)  $y' = 6x^5 + 5x^4 - 4x - 2$  (6)  $y' = 3x^2 + 2x$
- 287 (1)  $y' = \frac{4}{x^5}$  (2)  $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$

- (3)  $y' = -\frac{x^2-1}{(x^2-x+1)^2}$
- 288 (1)  $y' = 8(2x-1)^3$  (2)  $y' = 20x(2x^2+1)^4$   
 (3)  $y' = 4(x+1)(x^2+2x+3)$
- 289 (1)  $y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$  (2)  $y' = \frac{3}{8\sqrt[3]{x^5}}$   
 (3)  $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$
- 290 (1)  $y' = 3x^2 + 14x + 12$   
 (2)  $y' = 12(3x^3-1)(3x^4-4x-1)^2$   
 (3)  $y' = -\frac{4(6x^2+5)}{(2x^3+5x)^5}$   
 (4)  $y' = -\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$
- 291 (1)  $y' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$  (2)  $y' = \frac{1-5x^3}{(1+x^3)^3}$   
 (3)  $y' = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$   
 (4)  $y' = \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$   
 (5)  $y' = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)$   
 (6)  $y' = \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$   
 $\left[ (1) y' = \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right.$   
 (2)  $y' = \frac{1 \cdot (1+x^3)^2 - x \cdot 2(1+x^3) \cdot 3x^2}{(1+x^3)^4}$   
 (4)  $y' = \left[ \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{x-1}{x+1} \right)'$   
 $= \frac{1}{2} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2}$   
 (5) まず分母を有理化する。  
 $y = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2}$   
 (6)  $y = -(x - \sqrt{1+x^2}) = \sqrt{1+x^2} - x \left. \right]$
- 292 (1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y+1}$  (2)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$   
 $\left[ \text{両辺を } x \text{ で微分する。} \right.$   
 (1)  $1 = (2y+1) \frac{dy}{dx}$

- (2)  $1 = 3y^2 \frac{dy}{dx}$  とおくと  $y = \sqrt[3]{x-1}$   
 (別解) 両辺を  $y$  で微分する。]
- 293  $\frac{1}{4}$   
 $\left[ y = f^{-1}(x) \text{ とすると } x = f(y) = y^3 + y \cdots \textcircled{1} \right.$   
 $\frac{dx}{dy} = 3y^2 + 1$   $\textcircled{1}$  から  $x=2$  のとき  $y=1$  ]
- 294 (1)  $3f'(a)$  (2)  $5f'(a)$   
 (3)  $3a^2f(a) - a^3f'(a)$  (4)  $2af(a) + a^2f'(a)$   
 $\left[ (1) \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} \cdot 3 \right.$   
 (2)  $\frac{f(a+3h) - f(a) + f(a) - f(a-2h)}{h}$   
 $= \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} \cdot 3$   
 $- \frac{f(a-2h) - f(a)}{-2h} \cdot (-2)$   
 (3)  $\frac{x^3f(a) - a^3f(a) + a^3f(a) - a^3f(x)}{x-a}$   
 $= \frac{x^3 - a^3}{x-a} \cdot f(a) - \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot a^3$   
 (4)  $\frac{x^2f(x) - a^2f(x) + a^2f(x) - a^2f(a)}{x-a}$   
 (別解)  $g(x) = x^2f(x)$  とおくと  
 (与式)  $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = g'(a)$   
 $g'(x) = 2xf(x) + x^2f'(x) \left. \right]$
- 295 連続, 微分可能  
 $\left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} \right.$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$   $\Rightarrow$   $x=0$  で微分可能。  
 よって,  $x=0$  で連続 ]
- 296 (1)  $y' = 2 + \sin x$   
 (2)  $y' = \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}$   
 (3)  $y' = -2 \sin(2x+1)$  (4)  $y' = \frac{3}{\cos^2 3x}$   
 (5)  $y' = -\cos x \sin(\sin x)$   
 (6)  $y' = 2x \cos x^2$  (7)  $y' = 3 \sin^2 x \cos x$   
 (8)  $y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$   
 (9)  $y' = 3 \cos 3x \cos 5x - 5 \sin 3x \sin 5x$

- (10)  $y' = 2x \sin x + (x^2+1) \cos x$   
 (11)  $y' = -\frac{\cos x}{(3+\sin x)^2}$   
 (12)  $y' = \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}$   
 (13)  $y' = -\sin 2x$  (14)  $y' = 0$   
 (15)  $y' = \frac{\sin x + 2 \tan x}{\cos^2 x}$   
 $\left[ (13) y' = 2 \sin x \cos x - 2 \sin 2x \right.$   
 $= \sin 2x - 2 \sin 2x$   
 (14)  $y' = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x \sin x$   
 (別解)  $y=1$  (定数) から  $y'=0$  ]
- 297 (1)  $y' = \frac{1}{x}$  (2)  $y' = \frac{2x}{x^2-2}$   
 (3)  $y' = \frac{x}{x^2-1}$  (4)  $y' = \frac{1}{x \log 3}$   
 (5)  $y' = \frac{3}{(3x+1) \log 10}$   
 (6)  $y' = 3x^2 \log x + x^2$   
 (7)  $y' = \frac{4(\log x)^3}{x}$  (8)  $y' = \frac{2x}{x^2-4}$   
 (9)  $y' = -\frac{5}{(3x+1)(2x-1)}$   
 $\left[ (3) y = \frac{1}{2} \log(x^2-1) \right]$
- 298 (1)  $y' = 5e^{5x}$  (2)  $y' = 2e^{2x} + 2xe^{x^2}$   
 (3)  $y' = e^{-3x} - 3xe^{-3x}$   
 (4)  $y' = 2xe^x + x^2e^x$   
 (5)  $y' = 4 \cdot 3^{4x} \log 3$  (6)  $y' = -5^{-x} \log 5$
- 299 (1)  $y' = e^x(\sin x + \cos x)$   
 (2)  $y' = e^x \left( \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)$   
 (3)  $y' = \frac{\cos(\log x)}{x}$  (4)  $y' = \frac{\cos x}{\sin x}$   
 (5)  $y' = \frac{1}{x \log x}$  (6)  $y' = \cos x e^{\sin x}$
- 300 (1)  $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$   
 (2)  $y' = \frac{2x}{(x^2-1) \log a}$  (3)  $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$   
 $\left[ (1) \text{ (別解) } y = \frac{1}{2} \sin 2x \text{ から } y' = \cos 2x \right]$
- 301 (1)  $y' = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$   
 (2)  $y' = \frac{(2x+1) \cos \sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

(3)  $y' = -e^{-ax}(a \sin bx - b \cos bx)$

(4)  $y' = 2xa^{x+1} \log a$  (5)  $y' = 1$

(6)  $y' = -\frac{\log a}{x(\log x)^2}$

(7)  $y' = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$  (8)  $y' = \frac{x}{x-1}$

302 (1)  $y' = -\frac{(5x^2+14x+5)(x+1)}{(x+2)^4(x+3)^5}$

(2)  $y' = -\frac{2(7x^2+32x-11)(x^2-1)^3}{(x-2)^7(2x+5)^3}$

(3)  $y' = \frac{8x^3+3x^2+2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2(x^3+1)^2}}$

(4)  $y' = -\frac{2(3x^3-4x^2+2x+3)}{5\sqrt[5]{(3x-2)^3(x-1)^7(x^2+3)^6}}$

(5)  $y' = 3x^{3x}(\log x + 1)$

(6)  $y' = \frac{(\sin x)^{\log x - 1}(\sin x \cdot \log(\sin x) + x \log x \cdot \cos x)}{x}$

[(1)  $\log|y| = 2\log|x+1| - 3\log|x+2| - 4\log|x+3|$  から

$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}$

$= -\frac{5x^2+14x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)}$  (2) も同様

(3)  $\log|y| = \frac{1}{3}(\log|2x+1| + \log|x^3+1|)$

から  $\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{2x+1} + \frac{3x^2}{x^3+1}\right)$  (4) も同様

(5)  $x > 0$  のとき  $x^{3x} > 0$  から  $\log y = 3x \log x$

$\frac{y'}{y} = 3 \log x + 3x \cdot \frac{1}{x} = 3 \log x + 3$

(6)  $0 < x < \pi$  のとき  $(\sin x)^{\log x} > 0$  から

$\log y = \log x \cdot \log(\sin x)$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \cdot \log(\sin x) + \log x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$

303 (1)  $e^2$  (2) 1 (3)  $\frac{1}{e^2}$  (4)  $\frac{1}{e}$

[(1) ヒントから  $(1+h)^{\frac{2}{h}} = \{(1+h)^{\frac{1}{h}}\}^2$

(2)  $\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$  (3) ヒントから

$\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = (1+h)^{-\frac{2}{h}} = \{(1+h)^{\frac{1}{h}}\}^{-2}$

(4)  $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^x$

$-\frac{1}{x+1} = h$  とおくと

$(1+h)^{-1-\frac{1}{h}} = \frac{\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\}^{-1}}{1+h}$

304 (1)  $y' = 4x^3 - 15x^2$ ,  $y'' = 12x^2 - 30x$ ,

$y''' = 24x - 30$

(2)  $y' = 6x + 5$ ,  $y'' = 6$ ,  $y''' = 0$

(3)  $y' = -\frac{1}{(x+2)^2}$ ,  $y'' = \frac{2}{(x+2)^3}$ ,

$y''' = -\frac{6}{(x+2)^4}$

(4)  $y' = \cos x - \sin x$ ,  $y'' = -\sin x - \cos x$ ,

$y''' = -\cos x + \sin x$

(5)  $y' = \frac{2}{2x+1}$ ,  $y'' = -\frac{4}{(2x+1)^2}$ ,

$y''' = \frac{16}{(2x+1)^3}$

(6)  $y' = e^x - e^{-x}$ ,  $y'' = e^x + e^{-x}$ ,

$y''' = e^x - e^{-x}$

305 (1)  $y^{(n)} = e^x$  (2)  $y^{(n)} = 3^n e^{3x}$

(3)  $y^{(n)} = 0$  (4)  $y^{(n)} = (n+1)!x$

306  $\left[ y' = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}, y'' = \frac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right]$  を

左辺に代入]

307 (1)  $-\frac{2}{3}$  (2)  $\frac{4}{y}$  (3)  $-\frac{x}{y}$  (4)  $\frac{x}{9y}$

308 (1)  $\frac{dy}{dx} = t$  (2)  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

[(1)  $\frac{dx}{dt} = 2$ ,  $\frac{dy}{dt} = 2t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$  を利用]

309 (1) [1]  $y^{(4)} = 48$

[2]  $y^{(4)} = (\log 3)^4 3^x$  [3]  $y^{(4)} = \sin x$

(2) [1]  $\frac{dy}{dx} = \frac{\tan t}{3}$  [2]  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y}$

310 (1)  $y''' = \frac{3}{(2x+1)^2 \sqrt{2x+1}}$

(2)  $y'' = \frac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x}$

(3)  $y'' = 2e^x(\cos x - \sin x)$

(4)  $y'' = 6 \log x + 11$

[(1)  $y' = \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$y'' = -\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = -(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

$y''' = (-1) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(2x+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2 = 3(2x+1)^{-\frac{5}{2}}$

(2)  $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y'' = \frac{2 \cos x \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$

$y''' = \frac{2 \cos x \cdot \cos^3 x - 2 \sin x \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x)}{\cos^6 x}$

$= \frac{2 \cos^2 x + 6 \sin^2 x}{\cos^4 x}$  (3) (4) も同様]

311 (1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2+1}{2t}$

(2)  $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \tan t$

[(1)  $\frac{dx}{dt} = \frac{4t}{(1-t^2)^2}$ ,  $\frac{dy}{dt} = \frac{2t^2+2}{(1-t^2)^2}$

(2)  $\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t$ ,

$\frac{dy}{dt} = 3b \sin^2 t \cos t$ ]

312 (1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x+3y^2}$

(2)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(y-2)}$  (3)  $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(4)  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$

[(1)  $y+x \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x$

(2)  $2(y-2) \cdot \frac{dy}{dx} = 1$  (3) (4) も同様]

313 [(1)  $y'$ ,  $y''$  を求めて左辺に代入し, 右

辺を導く

(2)  $2x+2yy'=0$  をもう一度  $x$  で微分]

314  $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}$

[(1)  $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ ,  $\frac{dy}{dt} = \sin t$  から

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx}$

$= \frac{d}{dt} \left( \frac{\sin t}{1 - \cos t} \right) \cdot \frac{1}{1 - \cos t}$ ]

315 (1)  $-\sin 2a$  (2) 1

(3)  $-a^c \sin a - 2a \cos a$

[(1)  $f(x) = \cos^2 x$  とおくと

(与式)  $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

$f'(x) = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$

(2)  $f(x) = e^x$  とおくと

(与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$

$f'(x) = e^x$  から  $f'(0) = 1$

(3)  $\frac{a^2 \cos x - x^2 \cos a}{x - a}$

$= \frac{a^2 \cos x - a^2 \cos a + a^2 \cos a - x^2 \cos a}{x - a}$

$= \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \cdot a^2 - \frac{x^2 - a^2}{x - a} \cdot \cos a$ ]

316  $n2^{n+1} - (n+1)2^{n+1}$

[等式の両辺を  $x$  で微分すると

$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2}$ ,  $x$  に 2 を代入

(別解) 数学Bの数列を利用

$S = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n-1}$  から

$S - 2S$  を利用]

317 [(1)~(3) 数学的帰納法を用いる

(1)  $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} x^m$

$= \frac{d}{dx} m(m-1) \dots (m-k+1) x^{m-k}$

$= m(m-1) \dots (m-k+1)(m-k) x^{m-k-1}$

(2)  $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \cos x = \frac{d}{dx} \cos \left( x + \frac{k\pi}{2} \right)$

$= -\sin \left( x + \frac{k\pi}{2} \right) = \cos \left( x + \frac{(k+1)\pi}{2} \right)$

(3)  $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \log x = \frac{d}{dx} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$

$= (-1)^{k-1} (k-1)! \frac{-kx^{k-1}}{x^{2k}} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ ]

318 (1) 3 (2)  $-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$

[(1)  $f(x)$  の最高次の項を  $ax^n$  ( $a \neq 0$ ) とす

ると,  $xf''(x) + (1-x)f'(x) + 3f(x)$  の最高

次の項は  $(-n+3)ax^n$  ゆえに  $-n+3=0$

(2)  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$  とおくと

$(9a+b)x^2 + (4b+2c)x + c + 3 = 0$ ]

319  $a=5, b=-8$ [ $x=1$  において微分可能であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow -0} \left( ah + 2a + b + \frac{a+b+3}{h} \right)$$

これが2になるためには

$$2a+b=2, a+b+3=0]$$

320 (1)  $f'(k)x + f(k) - kf'(k)$ 

$$(2) f'(k)=0, f(k)=0$$

$$(3) a=-5, b=3$$

$$[(1) f(x) = (x-k)^2 Q(x) + px + q \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = 2(x-k)Q(x) + (x-k)^2 Q'(x) + p$$

$$f(k) = pk + q, f'(k) = p$$

この連立方程式を  $p, q$  について解く

$$(2) p=0 \text{ かつ } q=0$$

$$(3) (2) \text{ から } f'(1)=0, f(1)=0]$$

321  $f'(x) = x^2 + 1$  [ $x=y=0$  を与式に代入して

$$f(0)=0, f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} x(x+h)]$$

322 [(1)  $f(a+x) = f(a-x)$  …… ① から

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x)-f(a)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a-x)-f(a)}{-x} \cdot (-1) = -f'(a)$$

$$(2) f(a+x) - f(a) = f(a) - f(a-x) \dots \textcircled{2}$$

$$f'(a+x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+x+h)-f(a+x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-x-h)-f(a-x)}{-h} \quad (\textcircled{2} \text{ より})$$

$$= f'(a-x) \quad \text{よって}$$

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(a+x)-f'(a)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(a-x)-f'(a)}{-x} \cdot (-1) = -f''(a)$$

(別解) (1) ① の両辺を  $x$  で微分すると

$$f'(a+x) = -f'(a-x)$$

$$x=0 \text{ を代入すると } f'(a) = -f'(a)$$

(2) ② の両辺を  $x$  で2回微分すると

$$f''(a+x) = -f''(a-x)$$

$$x=0 \text{ を代入すると } f''(a) = -f''(a)]$$