

第4章 極 限

22 数列の極限

1 数列の極限

- ① 収束 一定の値 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 極限值 α
- ② 発散 $\left\{ \begin{array}{l} \text{正の無限大に発散} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{極限は } \infty \\ \text{負の無限大に発散} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{極限は } -\infty \\ \text{振動 (上のいずれでもない)} \quad \text{極限はない} \end{array} \right.$

2 数列の極限の性質 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β, k, l は定数) のとき

- ① $\lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n + lb_n) = k\alpha + l\beta$ ② $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha\beta$
- ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$) ④ $a_n \leq b_n$ (または $a_n < b_n$) $\Rightarrow \alpha \leq \beta$
- ⑤ $a_n \leq b_n$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$
- ⑥ $a_n \leq c_n \leq b_n$ かつ $\alpha = \beta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$

3 極限の計算

- ① 分数式は、分母の最高次の項で、分母・分子を割る。
- ② 無理式は、分母または分子の有理化を行う。
- ③ 極限が直接求めづらい場合は、不等式を利用する (2) の ⑥ を利用)。



■ 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。[202, 203]

- 202 * (1) $3n+2$ (2) $4-2n^2$ *(3) $\frac{3}{n}$ (4) $3-\frac{5}{n^3}$
 (5) $2(-1)^n$ (6) $3n(-1)^n$ *(7) $(-1)^{n+2}$ *(8) $\frac{3(-1)^n}{2n}$

- 203 * (1) 3^n (2) $(-3)^n$ (3) $(-\frac{1}{3})^n$ (4) $\frac{(-2)^n}{3^n}$
 (5) $\sqrt{2n-1}$ *(6) $\log_{10} n$ *(7) $\sin n\pi$ *(8) $\cos n\pi$

204 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -4$ のとき、次の極限を求めよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4a_n$ *(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 5b_n)$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 3b_n}{a_n + 3b_n}$

205 次の事柄は正しいか。正しくないものは反例をあげよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ のとき
 [1] $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$ *[2] $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ *[3] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ のとき
 [4] $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ [5] $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ *[6] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ のとき
 *[7] $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$ *[8] $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ *[9] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ のとき
 *[10] $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ [11] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$ *[12] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

206 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。[206, 207]

- * (1) $\frac{3n+1}{n}$ (2) $\frac{2n}{4n-3}$ (3) $\frac{3n-5}{2n+3}$
 *(4) $\frac{n^2-2n}{n+1}$ *(5) $\frac{2n+1}{3n^2+n^3}$ *(6) $\frac{2n^2+3n-1}{5n^2-2n+3}$

207 (1) $3n^2-2n$ *(2) $4n-n^3$ (3) $2n^3-3n^2+4$

*208 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。[208, 209]

- (1) $(n+1)^2-n^2$ (2) $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$ (3) $(n+1)-n$
 (4) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}}$ (6) $n-\sqrt{n^2+1}$

- 209 (1) $\sqrt{\frac{2n-1}{n+1}}$ *(2) $\frac{\sqrt{4n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{9n}}$ *(3) $\frac{2n}{\sqrt{n^2-n}+n}$
 (4) $n-\sqrt{n}$ *(5) $n^2-\sqrt{n^3}$ (6) $\sqrt{n^2+1}-n^2$

▲の 210 次の極限を求めよ。
 まとめ

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n^2+1}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n^2-2)}{1-2n^3}$
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3-n^2)$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n}-n^2)$
 (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3})$ (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-\sqrt{n^2+3})$

例題 27 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \dots + n \cdot 1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}$ を求めよ。

指針 分母・分子が数列の和の極限 $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$ の公式を利用する。

解答

$$\begin{aligned} \text{(分子)} &= \sum_{k=1}^n k(n-k+1) = -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1) \sum_{k=1}^n k \\ &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \\ \text{(分母)} &= \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{ゆえに (与式)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2} \quad \square \end{aligned}$$

B

211 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{3n+1}}{n} \quad * (2) \frac{n}{\sqrt{4n+3} - \sqrt{n+3}} \quad * (3) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{9n+1} - \sqrt{n+1}} \\ (4) \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-n} \quad * (5) \sqrt{n^2+4n} - n \quad * (6) \frac{1}{n - \sqrt{n^2+2n}} \end{aligned}$$

***212** 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+2) + \dots + n \cdot 2n}{n^3}$$

213 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の例を、それぞれ1つずつあげよ。

- (1) すべての n について $a_n > 5$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$
 (2) 各項が互いに異なり、数列 $\{a_n\}$ は収束しないが $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 1$

***214** 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ について、次の事柄は正しいか。正しくないものは、その反例をあげよ。ただし、 α は定数とする。

- (1) 数列 $\{a_n + b_n\}$ が収束するとき、数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ は収束する。
 (2) 数列 $\{a_n b_n\}$ が収束するとき、数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ は収束する。
 (3) $b_n < a_n < c_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - b_n) = 0$ ならば、数列 $\{a_n\}$ は収束する。
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$
 (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

例題 28 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos n$ を求めよ。

指針 数列の極限の性質 $a_n \leq c_n \leq b_n$ で $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow A$ ならば $c_n \rightarrow A$
 ここでは、 $-1 \leq \cos n \leq 1$ を利用する。

解答 任意の n に対して、常に $-1 \leq \cos n \leq 1$ が成り立つ。

$$\text{ゆえに } -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos n \leq \frac{1}{n}$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos n = 0 \quad \square$$

B

215 a_n, b_n, c_n が次の関係を満たすとき、 a_n, b_n, c_n の極限を求めよ。

$$[1] 0 < a_n < \frac{1}{n} \quad [2] 1 - \frac{2}{n} < b_n < 1 + \frac{3}{n}$$

$$[3] n - \frac{4}{n} < c_n < n + \frac{5}{n}$$

216 次の極限を求めよ。ただし、 θ は定数とする。

$$* (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \quad * (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1}$$

発展

***217** 数列 $\{a_n\}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n+5}{2a_n+1} = 3$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

218 数列 $\{a_n\}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n-1)a_n = -6$ のとき、次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$$

ヒント **217** $b_n = \frac{a_n+5}{2a_n+1}$ とおいて、 a_n を b_n で表す。

$$\mathbf{218} \quad (1) a_n = \frac{1}{3n-1} \cdot (3n-1)a_n$$

(参考) 一般に $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n B_n = (\text{定数})$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$

(2) (1)の結果を利用する。

23 無限等比数列

1 無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限

$$\left. \begin{array}{l} r=1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1 \\ |r| < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \\ r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \\ r \leq -1 \text{ のとき } \text{極限はない (振動)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{収束} \\ \\ \\ \text{発散} \end{array}$$

注意 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は $-1 < r \leq 1$ である。



219 次の無限等比数列の極限を調べよ。

- (1) 2, 4, 8, 16, …… (2) 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, ……
 *(3) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots$ *(4) 1, $-\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, \dots$

220 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

- (1) 5^n *(2) $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ (3) $\left(\frac{6}{5}\right)^n$
 (4) $\left(-\frac{5}{6}\right)^n$ *(5) $\left(-\frac{6}{5}\right)^n$ (6) $(-1)^{2n}$

221 次の極限を調べよ。

- *(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 3^n}{4^n}$ *(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{5^n - 1}$ *(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{2^n + 3^n}$
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n}{2^n - 1}$ (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (8^n - 9^n)$ *(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(-2)^n + 2^{2n}\}$

***222** 次の数列が収束するような x の値の範囲を求めよ。また、そのときの極限値を求めよ。

- (1) 数列 $\{(x+2)^n\}$ (2) 数列 $\{(2x)^n\}$



223 (1) 次の極限を調べよ。

[1] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 2 \cdot 3^n}{3^n + 2^n}$ [2] $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(-5)^n - 2^{3n}\}$

(2) 数列 $\{(x-3)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。

極限で表された関数のグラフ

例題 29 関数 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|(1-x^n)}{1+x^n}$ のグラフをかけ。

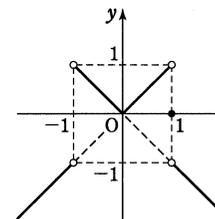
指針 極限で表された関数 x^n の極限は $|x| < 1$, $x = \pm 1$, $|x| > 1$ で場合分け。

解答 $|x| < 1$ のとき $y = \frac{|x|(1-0)}{1+0} = |x|$ $x=1$ のとき $y = \frac{1 \cdot (1-1)}{1+1} = 0$

$x=-1$ のとき $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \{1 - (-1)^n\}}{1 + (-1)^n}$ で y の値は存在しない。

$|x| > 1$ のとき $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x| \left(\frac{1}{x^n} - 1 \right)}{\frac{1}{x^n} + 1}$
 $= \frac{|x|(0-1)}{0+1} = -|x|$

よって、グラフは右の図のようになる。図



224 次の数列が収束するような x の値の範囲を求めよ。

- *(1) $\{(x^2 - 2x - 1)^n\}$ (2) $\left\{\left(\frac{2x}{1+x}\right)^n\right\}$ (3) $\{(\log_{10} x)^n\}$

***225** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+r^{2n}}$ を、次の各場合について調べよ。

- (1) $|r| < 1$ (2) $|r| = 1$ (3) $|r| > 1$

226 次の極限を調べよ。

- *(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1} - 1}{r^{2n} + 1}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r + r^{n+1}}$

227 次の関数のグラフをかけ。

- (1) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{x^{2n} + 1}$ *(2) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^n}$ ($x \neq -1$)

228 次の条件で定義される数列 $\{a_n\}$ の第 n 項とその極限を求めよ。

- *(1) $a_1 = 0, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}a_n$ (2) $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n - 4$
 (3) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n - 3}$ *(4) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{4}{3}a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n$
 *(5) $a_1 = 2, na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$ *(6) $a_1 = 10, a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$ (極限のみ)

24 無限等比級数

1 無限等比級数 $a+ar+ar^2+\dots+ar^{n-1}+\dots$ の収束・発散

① $a \neq 0$ のとき $|r| < 1$ ならば収束し、その和は $\frac{a}{1-r}$

$|r| \geq 1$ ならば発散する。

② $a = 0$ のとき 収束し、その和は 0

注意 無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ の級数が収束する必要十分条件は $a=0$ または $-1 < r < 1$



229 次の無限等比級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

* (1) $1 + \sqrt{3} + 3 + \dots$ * (2) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$

(3) $0.2 + 0.18 + 0.162 + \dots$ (4) $\sqrt{3} - 3 + 3\sqrt{3} - \dots$

* (5) $-2 + 2 - 2 + \dots$ * (6) $(3 + \sqrt{2}) - (2\sqrt{2} - 1) + \dots$

230 次の無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また、そのときの和を求めよ。

* (1) $1 + 2x + 4x^2 + \dots$ (2) $2 - x + \frac{x^2}{2} - \dots$

(3) $x + x(3-x) + x(3-x)^2 + \dots$ * (4) $(3-x) + x(3-x) + x^2(3-x) + \dots$

231 数直線上を原点から出発した点Pが次のように移動する。点Pが近づく点の座標を求めよ。

(1) 正の向きに、 $1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots$ と移動し続ける。

* (2) 正の向きに 1 、負の向きに $\frac{1}{5}$ 、正の向きに $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ 、負の向きに $\left(\frac{1}{5}\right)^3, \dots$ と移動し続ける。

232 次の循環小数を分数に直せ。

(1) $0.\dot{7}$ (2) $0.6\dot{1}$ * (3) $0.\dot{3}\dot{6}$ * (4) $0.250\dot{4}$

A の
まとめ

233 (1) 無限等比級数 $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \dots$ の和を求めよ。

(2) 循環小数 $0.1\dot{2}\dot{3}$ を分数で表せ。

円の面積の総和

例題 30

1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC の内接円を O_1 とし、円 O_1 に外接し、辺 AB, AC と接する円を O_2 とする。以下、このように辺 AB, AC に接する円を次々に作るとき、すべての円の面積の和を求めよ。

指針 無限等比級数の応用 半径 r_n と r_{n+1} の間の関係を求める。

解答

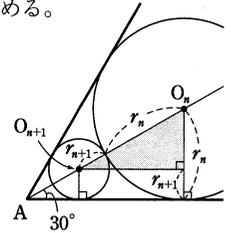
円 O_n の半径を r_n 、面積を S_n とすると

右の図から $(r_n + r_{n+1}) \sin 30^\circ = r_n - r_{n+1}$

よって $r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n$ したがって $S_{n+1} = \frac{1}{9}S_n$

また、 $r_1 = \frac{3}{2} \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから $S_1 = \frac{3}{4}\pi$

ゆえに、円の面積の総和は、 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{3}{4}\pi}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{27}{32}\pi$ 圏



***234** ある無限等比級数の和が 16、第 2 項が -5 のとき、初項と公比を求めよ。

***235** 無限等比級数 $1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots$ の和 S と、この無限等比級数の第何項までの和との差が初めて $\frac{1}{10000}$ より小さくなるか。

236 次の無限等比級数が収束するような定数 x の値の範囲とその和を求めよ。

* (1) $x + x(x^2 - x - 1) + x(x^2 - x - 1)^2 + x(x^2 - x - 1)^3 + \dots$

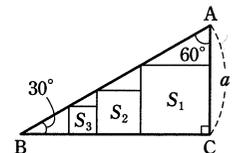
(2) $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \cos^4 x + \dots$

237 次の無限等比級数で表される関数 $f(x)$ のグラフをかけ。

(1) $f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots$ * (2) $f(x) = x + \frac{x}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} + \dots$

***238** ある球を床に落とすと、常に落ちる高さの $\frac{3}{5}$ まではね返るといふ。この球を 10 m の高さから落として静止するまでに、上下する総距離は幾らか。

***239** $A=60^\circ, B=30^\circ, AC=a$ である直角三角形 ABC 内に、右の図のように正方形 S_1, S_2, S_3, \dots が限りなく並んでいる。このとき、すべての正方形の面積の和を求めよ。



無限級数

1 収束・発散の定義 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の第 n 項までの部分和を S_n とする。

- ① 数列 $\{S_n\}$ が収束するとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束
- ② 数列 $\{S_n\}$ が発散するとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

2 無限級数の和の性質 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する無限級数とする。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} (ka_n + lb_n) = kS + lT$ (k, l は定数)

3 級数と数列の収束・発散の関係

- ① 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (逆は不成立。例 $a_n = \frac{1}{n}$)
- ② 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない \Rightarrow 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

B

240 次の無限級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

- (1) $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+3)} + \dots$
- * (2) $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} + \dots$
- (3) $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}+2} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} + \dots$

241 次の無限級数の和を求めよ。

- * (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} \right)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{5^n}$ * (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \sin \frac{n\pi}{2}$
- * (4) $\left(2 - \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{2}{9} - \frac{3}{8} \right) + \left(\frac{2}{27} - \frac{3}{16} \right) + \left(\frac{2}{81} - \frac{3}{32} \right) + \dots$
- (5) $2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{9} \right) - \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{27} \right) - \left(\frac{3}{16} - \frac{2}{81} \right) - \dots$

242 次の無限級数は発散することを証明せよ。

- * (1) $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \dots$ (2) $2 - 4 + 6 - 8 + \dots$

ヒント 242 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないならば、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

無限級数の和

例題 31

無限級数 $1 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \frac{1}{16} + \dots$ の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

指針

$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + \dots$ 部分 S_n が 1 つの式で表せないときは S_{2n}, S_{2n-1} などを求めて、両者の極限が一致するかを調べる。一致しないときは発散。なお、収束しないときは機械的に順序を入れ替えてはいけない。

解答

この級数の第 $(2n-1)$ 項は $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 、第 $2n$ 項は $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ であるから、

部分和 $S_{2n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
 $= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

ここで $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ また、 $S_{2n-1} = S_{2n} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ から

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{11}{4} - 0 = \frac{11}{4}$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \frac{11}{4}$ ㊦ 無限級数は収束して、その和は $\frac{11}{4}$

発展

***243** 次の無限級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

- (1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots$ (2) $3 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - \frac{7}{3} + \frac{7}{3} - \frac{9}{4} + \dots$

***244** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを用いて、無限級数 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ が発散することを証明せよ。

***245** $|r| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ を利用して、次の無限級数の和を求めよ。

- (1) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots$ (2) $1 - \frac{3}{3} + \frac{5}{9} - \frac{7}{27} + \frac{9}{81} - \dots$

ヒント

244 $T_n \leq S_n$ のとき、 $T_n \rightarrow +\infty$ ならば $S_n \rightarrow +\infty$

(参考) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ の収束・発散については、p. 63 の問題 281 のヒント参照。

245 部分 S_n は $S_n - rS_n$ として求める。

(参考) 「 $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ 」は、p. 63 の問題 282 のヒント参照。

26 関数の極限

1 関数の極限の性質 (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ とする。

① $\lim_{x \rightarrow a} \{kf(x) + lg(x)\} = k\alpha + l\beta$ (k, l は定数)

② $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$ ③ $\beta \neq 0$ のとき $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$

注意 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ のときの極限も上の①~③が成り立つ。

2 片側からの極限

① $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha$ のとき $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$

② $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ のとき $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は存在しない。



■ 次の極限を調べよ。[246~251]

- 246** (1) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x)$ *(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ (3) $\lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{2t + 7}$
- *(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x}$ *(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$
- 247** (1) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ *(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x-2}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
- 248** (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$ *(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - 3\right)$ (3) $\lim_{x \rightarrow -1} \left\{2 - \frac{1}{(x+1)^2}\right\}$
- ***249** (1) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{2x^2 + 3x}{|x|}$ (5) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{2x^2 + 3x}{|x|}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{|x|}$
- 250** (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+2}$ *(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{1+x^2}$
- *(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (5^x - 3^x)$ *(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{x+2}{2x-3}$

Aの
まとめ

- 251** (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x^2 - 9}{|x-3|}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{x}{x-5}$ (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-5}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 2-0} [x]$

−∞ の関数の極限

例題 32

次の極限を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 2x} + 3x)$$

指針 関数の極限 $x \rightarrow -\infty$ のときは、 $x = -t$ とおき $t \rightarrow +\infty$ を考える。

解答 $x = -t$ とおくと、 $x \rightarrow -\infty$ のとき、 $t \rightarrow +\infty$ よって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 2x} + 3x) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{9t^2 - 2t} - 3t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{9t^2 - 2t} - 3t)(\sqrt{9t^2 - 2t} + 3t)}{\sqrt{9t^2 - 2t} + 3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-2t}{\sqrt{9t^2 - 2t} + 3t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{9 - \frac{2}{t}} + 3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \quad \square \end{aligned}$$



***252** 次の極限を調べよ。ただし、 a は定数とする。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x-a}{x^2-1}$ (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (7^x + 4^x)^{\frac{1}{x}}$

■ 次の極限を求めよ。[253~255]

- 253** (1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3} + 2x}{x+1}$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x}$
- 254** (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}}$ *(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+1})$
- 255** (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x} - x)$ *(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x} + x)$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+x} + \sqrt{2x^2-x}}$ (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$
- 256** 次の等式が成り立つように、定数 a, b の値を定めよ。
- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} = 1$ *(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(a+1)x + b}{\sqrt{x+3} - 2} = 8$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 4}{x+3} = 5$ *(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - bx) = 4$

***257** 次の条件を満たす整式 $f(x)$ を求めよ。

- (1) [1] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ [2] $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 6$ [3] $f(x)$ は 3 次式
- (2) [1] $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2-4} = 3$ [2] $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-4} = 3$

27

三角関数と極限

1 関数の極限の性質 (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ とする。

- ① x が a に近いとき $f(x) \leq g(x)$ ならば $\alpha \leq \beta$
 ② x が a に近いとき $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$

2 三角関数に関する極限 角の単位はラジアン

- ① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が基本 ② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$



*258 次の極限を調べよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x$ (2) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} \cos x$ (3) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} \tan x$
 (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ (5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{2}{x}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \tan \frac{1}{x}$

259 次の極限を求めよ。

- * (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-2x)}{x}$
 *(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}$ *(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{\tan x}$

260 次の極限を求めよ。

- * (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$ *(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan 2x}{x}$

261 次の極限を () のようにおき換えて求めよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \sin \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} = t \right)$ (2) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \quad (x - \pi = t)$

Aの
まとめ

262 次の極限を求めよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

極限の応用

例題 33

半径 r の円 O の周上に定点 A と動点 P がある。 P から A における接線に垂線 PH を下ろす。 P が円周上を A に限りなく近づくと、 $\frac{PA}{PA}$, $\frac{AH^2}{PH}$ の極限を求めよ。

指針 極限の応用 変数をうまく定めて、極限を求めるものを式で表す。

解答

 $\angle POA = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とすると

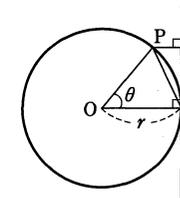
$$\widehat{PA} = r\theta, \quad PA = 2r \sin \frac{\theta}{2}, \quad AH = r \sin \theta, \quad PH = r(1 - \cos \theta)$$

$$\text{ゆえに } \frac{\widehat{PA}}{PA} = \frac{r\theta}{2r \sin \frac{\theta}{2}}, \quad \frac{AH^2}{PH} = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r(1 - \cos \theta)}$$

 P が円周上を A に限りなく近づくと、 $\theta \rightarrow +0$ から、極限は

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{r\theta}{2r \sin \frac{\theta}{2}} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{r \cdot \frac{\theta}{2}}{r \sin \frac{\theta}{2}} = 1 \quad \text{答}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r(1 - \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow +0} r(1 + \cos \theta) = 2r \quad \text{答}$$



*263 次の極限を求めよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 4x}{x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{4x}$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{4x}$

264 次の極限を求めよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x}$ *(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^\circ}{x}$ *(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$
 *(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x}$ *(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}$ (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x - 3} \sin \frac{1}{x}$

265 等式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+1} + b}{\sin x} = 2$ が成り立つような定数 a, b の値を求めよ。

*266 半径 r の円 O の周上に定点 A と動点 P がある。 A における接線上に $AQ = AP$ であるような点 Q を OA に関して P と同じ側にとる。 P が円周上を A に限りなく近づくと、 $\frac{PQ}{AP}$ の極限を求めよ。

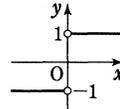
28 関数の連続性

1 関数の連続の定義

$f(x)$ は $x=a$ で連続 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在し、かつ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

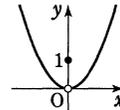
① $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在しなければ連続でない。

例 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = -1$



② $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在しても、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ ならば連続でない。

例 $f(x) = \begin{cases} x^2 (x \neq 0) \\ 1 (x = 0) \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$ から $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$



2 連続関数の性質

- ① 閉区間で連続な関数は、その閉区間で、最大値および最小値をもつ。
- ② 中間値の定理 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、 $f(a) \neq f(b)$ ならば、 $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して「 $f(c) = k, a < c < b$ 」を満たす数 c が少なくとも1つある。



- *267 次の関数 $f(x)$ について、 $x=0$ における連続、不連続を調べよ。
 - (1) $f(x) = x^2 - 2x$ (2) $f(x) = \begin{cases} x-2 & (x \geq 0) \\ 2-x & (x < 0) \end{cases}$ (3) $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \neq 0) \\ 3 & (x = 0) \end{cases}$
 - (4) $f(x) = \sqrt{3x}$ (5) $f(x) = [2x]$ (6) $f(x) = |x|$
- *268 $x \neq 0$ のとき $f(x) = \frac{1}{x} \sin x, f(0) = 1$ である関数 $f(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ。
- *269 関数 $y = f(x)$ [$x \leq 2$ のとき $f(x) = x^2, x > 2$ のとき $f(x) = ax + 1$] がすべての区間で連続になるように、 a の値を定めよ。
- 270 次の関数は最大値、最小値をもつか。もしもつならばその値を求めよ。
 - (1) $f(x) = |2x - 3|$ ($-1 \leq x \leq 2$) (2) $f(x) = x^2 - x$ ($0 < x < 2$)
- 271 次の方程式は与えられた区間に実数解をもつことを示せ。
 - (1) $2^x - 3x - 5 = 0$ $[4, 5]$ (2) $1 - x \cos x = 0$ $[\pi, 2\pi]$



272 次の関数の $x=0$ における連続、不連続を調べよ。

$x \neq 0$ のとき $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{|x|}, f(0) = 0$

定義域と連続・不連続

例題 34

関数 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2(1-x^n)}{1+|x|^n}$ のグラフをかき、定義域をいえ。

また、その定義域において不連続となることがあれば、その x の値を求めよ。

指針

極限で表された関数 定義域は極限値が存在するような x の値の範囲である。まず、収束条件から定義域を求める。

解答

$-1 < x < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ であるから $y = x^2$

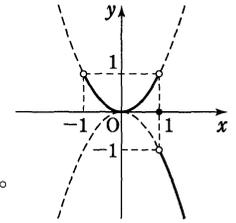
$x = 1$ のとき $y = 0$

$1 < x$ のとき $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2(1-x^n)}{1+x^n} = -x^2$

$x = -1$ のとき $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-1)^n}{2}$ から極限値はない。

$x < -1$ のとき $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 \{1/(-x)^n - (-1)^n\}}{1/(-x)^n + 1}$ から極限値はない。

グラフは右の図 (定義域は $x > -1$)。不連続となる x の値は $x = 1$ 図



273 次の関数の定義域をいえ。また、定義域における連続性を調べよ。

(1) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

(2) $f(x) = \sqrt{6x-x^2}$

(3) $f(x) = x - [x]$

(4) $f(x) = \log_2 \frac{x}{x+2}$

*274 $x \leq 0$ のとき $f(x) = 1, 0 < x < \pi$ のとき $f(x) = \frac{ax^2}{1-\cos x}, x \geq \pi$ のとき $f(x) = b$ である関数 $f(x)$ が、すべての区間で連続になるように、定数 a, b の値を定めよ。

275 次の関数のグラフをかき、定義域をいえ。また、その定義域において、不連続となることがあれば、その x の値を求めよ。

(1) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1-x^n)}{1+|x|^n}$

(2) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n x$

*276 (1) $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ の実数解は、どんな連続2整数の間にあるか。
(2) 3次方程式は、少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。



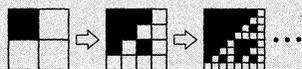
274 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = b$ となるように a, b の値を定める。

29 第4章 演習問題

文章題 (ぬりつぶし)

例題 35

1辺の長さが1の正方形Pがある。Pを下のように4等分した左上の正方形1つを黒くぬる。次に残りの3つの正方形をそれぞれ4等分し、それぞれの左上の正方形1つを黒くぬる。これをくり返したとき、黒い部分の面積の総和を求めよ。



【指針】文章題 題意を正しく把握する。1回目の操作から次の操作に移るときどのように加わるかを見つけ出す。

【解答】

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 1 \quad \square$$

B

*277 数直線上の区間 $[0, 1]$ を10等分して、7つを取り出す。残りの3つのうち2つをそれぞれ10等分して、それぞれから7つずつ取り出す。これをくり返したとき、取り出した区間の長さの総和を求めよ。

*278 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2} + ax^{2n+1} + bx^2}{x^{2n+1}}$ がすべての x について連続であるように、定数 a, b の値を定めよ。

*279 数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1=2, a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ を満たすものとする。

(1) $0 < a_n < 3$ を示せ。 (2) $3 - a_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (3 - a_1)$ を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ を示せ。

280 関数 $y = \frac{1}{x+1}$ のグラフ上の点をP、原点をOとする。点Pを通り、線分OPに垂直な直線を引き、その直線と x 軸との交点をQとする。Pが第1象限にあるグラフに沿ってOから限りなく遠ざかるとき、 $\triangle OPQ$ の面積はどのような値に近づくか。

無限級数の発散、はさみうちによる極限

例題 36

- (1) 無限級数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ が発散することを示せ。
 (2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$ を求めよ。

【指針】 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の発散 $a_n \geq b_n$ を満たす $\{b_n\}$ を見つけ、 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の発散を示す。

はさみうちの利用 $p_n \leq a_n \leq q_n$ で $p_n \rightarrow \alpha, q_n \rightarrow \alpha$ (α は定数) となる p_n, q_n を見つける。

【解答】

(1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$ に対して、各項がそれ以下の級数を考える。

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \dots \\ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \dots + \frac{2^{k-1}}{2^k} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \rightarrow \infty$$

よって、もとの無限級数も発散する。 □

(2) $n \geq 2$ のとき $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \geq 1 \cdot 2 \cdot 3^{n-2}$ よって

$$0 < \frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^n}{1 \cdot 2 \cdot 3^{n-2}} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 0 \quad \text{から} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \quad \square$$

発展

281 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は無限大に発散することを用いて、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ が発散することを示せ。

*282 二項定理から、不等式 $(1+2)^n \geq 1+2n+2n(n-1)$ が成り立つ。これを利用して、数列 $\left\{\frac{n}{3^n}\right\}$ の極限を求めよ。

283 次の数列の極限を調べよ。

(1) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{6}, 1, \frac{7}{8}, \dots$ (2) $1, 2, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{1}{7}, \dots$

【ヒント】 281 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ から $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

(参考) 一般に $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ は $k \leq 1$ のとき発散し、 $k > 1$ のとき収束する。

282 (参考) 一般に十分大きい n に対して $n^k < l^n < n!$ (k, l は1より大きい定数) 例えば $k=2, l=3$ とすると、 $n \geq 10$ に対して $n^2 < 3^n < n!$

$$\text{また、} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$$

- 202 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) 0 (4) 3
 (5) 振動 (6) 振動 (7) 振動 (8) 0
- 203 (1) ∞ (2) 振動 (3) 0 (4) 0
 (5) ∞ (6) ∞ (7) 0 (8) 振動
- 204 (1) 8 (2) -16 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{7}{5}$

- 205 [1] 正しい
 [2] 正しくない (反例) $a_n=2n$, $b_n=n$
 [3] 正しくない (反例) $a_n=2n$, $b_n=n$

- [4] 正しい [5] 正しい
 [6] 正しくない (反例) $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{2n}$
 [7] 正しい [8] 正しい [9] 正しい
 [10] 正しくない (反例) $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n^2$
 [11] 正しくない (反例) $a_n=-\frac{1}{n}$, $b_n=n$
 [12] 正しい

206 (1) 3 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{2}$

(4) ∞ (5) 0 (6) $\frac{2}{5}$

$\left[(1) \frac{3+\frac{1}{n}}{1} (4) \frac{n-2}{1+\frac{1}{n}} (5) \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n}+1} \right]$

207 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) ∞

$\left[(1) n^2\left(3-\frac{2}{n}\right) (2) n^3\left(\frac{4}{n^2}-1\right) \right]$

208 (1) ∞ (2) 0 (3) 1 (4) 0 (5) ∞ (6) 0

$\left[(1) 2n+1 (2) \frac{-1}{n(n+1)} (3) 1 \right]$

(4) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (5) $\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}}{3}$

(6) $\frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}$

209 (1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1

(4) ∞ (5) ∞ (6) $-\infty$

$\left[(1) \sqrt{\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}} (2) \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{9}} \right]$

(3) $\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}$ (4) $n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(5) $n^2\left(1-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$ (6) $n^2\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}-1\right)$

210 (1) 0 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) ∞

(4) $-\infty$ (5) 0 (6) 0

211 (1) 0 (2) ∞ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 2 (5) 2

(6) -1 [分子, 分母の有理化]

(1) $\frac{-1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n+1}}$ (2) $\frac{\sqrt{4n+3}+\sqrt{n+3}}{3}$

(3) $\frac{\sqrt{n}(\sqrt{9n+1}+\sqrt{n+1})}{8n}$

$=\frac{\sqrt{1}\cdot\left(\sqrt{9+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{8}$

(4) $\frac{4n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}}=\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$

(5) $\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n+n}}$ (6) $\frac{n+\sqrt{n^2+2n}}{-2n}$

212 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{5}{6}$

$\left[(1) \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} \right]$

(2) $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k(n+k)=\frac{1}{n^3}\left(n\sum_{k=1}^n k+\sum_{k=1}^n k^2\right)$
 $=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(5n+1)$

213 (1) $a_n=5+\frac{1}{n}$

(2) $a_n=(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

214 (1) 正しくない: $a_n=n$, $b_n=3-n$

(2) 正しくない: $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^n$

(3) 正しくない:

$a_n=n$, $b_n=n-\frac{1}{n}$, $c_n=n+\frac{1}{n}$

(4) 正しい

(5) 正しくない: $a_n=n^2$, $b_n=n^2+n$

[(4) $b_n=a_n-(a_n-b_n)$ であり, $\{a_n\}$, $\{a_n-b_n\}$ はともに収束する]

215 $\lim_{n\rightarrow\infty} a_n=0$, $\lim_{n\rightarrow\infty} b_n=1$, $\lim_{n\rightarrow\infty} c_n=\infty$

216 (1) 0 (2) 0 (3) 0

$\left[(3) 0\leq\frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2+1} \right]$

217 $\frac{2}{5}$ $\left[b_n=\frac{a_n+5}{2a_n+1}$ とおくと $\lim_{n\rightarrow\infty} b_n=3$

ゆえに $\lim_{n\rightarrow\infty} a_n=\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{5-b_n}{2b_n-1}=\frac{5-3}{2\cdot 3-1}$

218 (1) 0 (2) -2

$\left[(1) \lim_{n\rightarrow\infty} a_n=\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{3n-1}\cdot(3n-1)a_n \right]$

$=\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{3n-1}\cdot\lim_{n\rightarrow\infty} (3n-1)a_n=0\cdot(-6)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(3n-1)a_n + a_n\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (3n-1)a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -6+0$

219 (1) ∞ (2) 0 (3) 0 (4) 振動

220 (1) ∞ (2) 0 (3) ∞

(4) 0 (5) 振動 (6) 1

221 (1) ∞ (2) 0 (3) 1

(4) 振動 (5) $-\infty$ (6) ∞

[2] 分母・分子を 5^n で割る

(5) $8^n - 9^n = 9^n \left\{ \left(\frac{8}{9} \right)^n - 1 \right\}$

222 (1) (x の値の範囲) $-3 < x \leq -1$

(極限值) $-3 < x < -1$ のとき 0,
 $x = -1$ のとき 1

(2) (x の値の範囲) $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$

(極限值) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ のとき 0,
 $x = \frac{1}{2}$ のとき 1

223 (1) [1] 2 [2] $-\infty$ (2) $2 < x \leq 4$

224 (1) $1 - \sqrt{3} \leq x < 0, 2 < x \leq 1 + \sqrt{3}$

(2) $-\frac{1}{3} < x \leq 1$ (3) $\frac{1}{10} < x \leq 10$

[1] $-1 < x^2 - 2x - 1 \leq 1$

(2) $-1 < \frac{2x}{1+x} \leq 1$ (3) $-1 < \log_{10} x \leq 1$

225 (1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0

226 (1) $r \leq -1, 1 < r$ のとき r ;

$|r| < 1$ のとき -1 ; $r=1$ のとき 0

(2) $r < -1, 1 < r$ のとき $1-r$;

$|r| < 1$ のとき $\frac{1}{1-r}$; $r=1$ のとき 1;

$r=-1$ のとき極限はない

[1] [1] $r > 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = +\infty$ である

から (与式) $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r - \frac{1}{r^{2n}}}{1 + \frac{1}{r^{2n}}} = r$

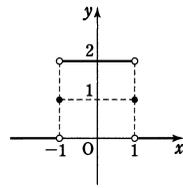
[2] $r=1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1$ であるから

(与式) $= \frac{1-1}{1+1} = 0$

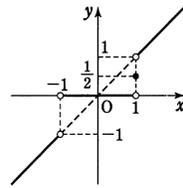
同様に $|r| < 1, r=-1, r < -1$ を考える]

227 (1) [図] (2) [図]

(1)



(2)



[問題 226 と同様。

(1) $x^2=1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n}=1$ から $y=1$

$x^2 > 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty$ から $y=0$

$0 \leq x^2 < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$ から $y=2$]

228 第 n 項, 極限の順に

(1) $a_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}, \frac{2}{3}$

(2) $a_n = 2 + 3^{n-1}, \infty$

(3) $a_n = \frac{2}{1 - (-3)^n}, 0$

(4) $a_n = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}, \frac{5}{2}$

(5) $a_n = 3n - 1, \infty$ (6) 4

[3] $\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} = -3b_n + 2$

(4) $a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} (a_2 - a_1) = \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$

ゆえに $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} (n \geq 2)$

(5) $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ から

$\frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n} \left(= \frac{a_1}{1} + \frac{1}{1} \right)$

(別解) $b_n = \frac{a_n}{n}$ とおくと $b_1 = 2,$

$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(6) $\log_2 a_{n+1} = \log_2 2\sqrt{a_n}$

$\log_2 a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} (\log_2 a_n - 2)$

$\log_2 a_n = \left(\log_2 \frac{5}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 2$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 a_n = 2$]

229 (1) 発散 (2) 収束, $\frac{2}{3}$ (3) 収束, 2

(4) 発散 (5) 発散 (6) 収束, $\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$

[1] (公比) $\sqrt{3} > 1$

(2) $-1 < (\text{公比}) < \frac{1}{2} < 1$

(3) $-1 < (\text{公比}) < \frac{9}{10} < 1$

(4) (公比) $-\sqrt{3} < -1$ (5) (公比) -1

(6) (公比) $\frac{-(2\sqrt{2}-1)}{3+\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} = -0.414\dots$]

230 順に (1) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}; \frac{1}{1-2x}$

(2) $-2 < x < 2; \frac{4}{2+x}$

(3) $x=0, 2 < x < 4; \frac{x}{x-2}$

(4) $-1 < x < 1, x=3; \frac{3-x}{1-x}$

[収束する条件は (初項)=0 または |公比| < 1]

231 (1) $x=2$ (2) $x=\frac{5}{6}$

[1] $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$

(2) $1 - \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5} \right)^2 - \left(\frac{1}{5} \right)^3 + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{5} \right)}$

232 (1) $\frac{7}{9}$ (2) $\frac{11}{18}$ (3) $\frac{4}{11}$ (4) $\frac{139}{555}$

[1] $0.7 = 0.7 + 0.07 + 0.007 + \dots = \frac{0.7}{1 - 0.1}$

(2) $0.6\dot{1} = 0.6 + \frac{0.01}{1 - 0.1}$ (3) $0.3\dot{6} = \frac{0.36}{1 - 0.01}$

(4) $0.250\dot{4} = 0.2 + \frac{0.0504}{1 - 0.001}$]

233 (1) $2 - \sqrt{2}$ (2) $\frac{61}{495}$

[1] 公比は $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ から和は $\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$

(2) $0.1\dot{2}\dot{3} = 0.1 + \frac{0.023}{1 - 0.01}$]

234 初項 20, 公比 $-\frac{1}{4}$

[初項を a , 公比を r とすると,

$\frac{a}{1-r} = 16 \dots\dots \textcircled{1}, ar = -5 \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ から $a = 16(1-r)$ を $\textcircled{2}$ に代入。

$16r^2 - 16r - 5 = 0$ から $r = -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}$ (不適)]

235 第 5 項

$\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{7}} - \frac{1 \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{7}} < \frac{1}{10000} \text{ から} \right]$

236 (1) $-1 < x \leq 0, 1 < x < 2; -\frac{x}{x^2 - x - 2}$

(2) $x = n\pi$ (n は整数) を除く実数全体;

$\frac{\cos x}{1 + \cos x}$ [(1) (初項) $x=0$ または

(公比) $-1 < x^2 - x - 1 < 1$

(2) (初項) $\cos x = 0$ または

(公比) $-1 < -\cos x < 1$]

237 (1) [図] (2) [図]

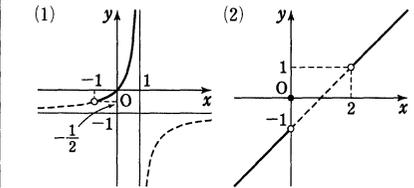
[1] $x=0, -1 < x < 1$ のとき収束,

和は $f(x) = \frac{x}{1-x}$

(2) $x=0, -1 < \frac{1}{1-x} < 1$ のとき収束,

和は $x=0$ のとき $f(x)=0$;

$x < 0, 2 < x$ のとき $f(x)=x-1$]



238 40 m [球は往復運動をするから

$10 + 2 \left\{ 10 \cdot \frac{3}{5} + 10 \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^3 + \dots \right\}$]

239 $\frac{3(2\sqrt{3}-1)}{11} a^2$

[S_n の1辺の長さを

a_n とすると, 図から

$\tan 30^\circ = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}}$

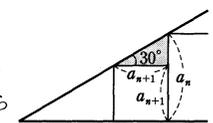
ゆえに $a_{n+1} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a_n, a_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a$

求める値は, 初項 a_1^2 , 公比 $\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2} \right)^2$ の

無限等比級数の和]

240 (1) 収束, $\frac{5}{12}$ (2) 収束, 2 (3) 発散

[第 n 項を a_n , 部分和を S_n とする



(1) $a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right)$,
 $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$
 (2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$
 $= 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$, $S_n = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$

(3) 分母を有理化すると
 $a_n = -\frac{1}{2}(\sqrt{n} - \sqrt{n+2})$
 $S_n = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})$

241 (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{5}{12}$ (3) $-\frac{3}{10}$
 (4) 0 (5) 0

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{3} \right)^{4k-3} \sin \frac{(4k-3)\pi}{2} \right.$
 $\left. + \left(-\frac{1}{3} \right)^{4k-2} \sin \frac{(4k-2)\pi}{2} \right.$
 $\left. + \left(-\frac{1}{3} \right)^{4k-1} \sin \frac{(4k-1)\pi}{2} + \left(-\frac{1}{3} \right)^{4k} \sin \frac{4k\pi}{2} \right\}$
 $= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{3} \right)^{4k-3} + 0 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{4k-1} + 0 \right\}$
 (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ (5) $2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$

242 [第n項を a_n とする (1) $n \rightarrow \infty$ のとき
 $a_n = \frac{n}{2n-1} \rightarrow \frac{1}{2}$ ($\neq 0$)
 であるから無限級数は発散する
 (2) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot 2n$
 $n \rightarrow \infty$ のとき, $\{a_n\}$ は発散する (振動) から, 無限級数も発散する]

243 (1) 収束, $\frac{5}{2}$ (2) 発散
 [部分和を S_n などと表す. $n \rightarrow \infty$ のとき
 (1) $S_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^{k-1}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \rightarrow \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$,
 $S_{2n-1} = S_{2n} - \frac{1}{2^n} \rightarrow \frac{5}{2}$
 (2) $S_{2n-1} \rightarrow 3$,
 $S_{2n} = S_{2n-1} - \frac{2(n+1)+1}{n+1} \rightarrow 1$]

244 $\left[S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right]$ とおくと
 $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ から $T_n \leq S_n$

245 (1) 4 (2) $\frac{3}{8}$ [部分和を S_n とする.]

(1) $S_n - \frac{1}{2}S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$
 よって $S_n = 4 - \frac{1}{2^{n-2}} - 2 \cdot \frac{n}{2^n}$
 (2) $S_n = \frac{3}{8} \left\{ 1 - (4n+1) \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}$

246 (1) 0 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 3

(4) -3 (5) $-\frac{3}{2}$ (6) -1

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-3}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x-1}$

247 (1) 6 (2) $\frac{3}{4}$ (3) 1

(1) $\lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} + 3)$ (2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2 + \sqrt{x} + 2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$

248 (1) ∞ (2) ∞ (3) $-\infty$

249 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) 極限はない

(4) 3 (5) -3 (6) 極限はない

250 (1) 0 (2) 3 (3) $-\infty$ (4) 0

(5) ∞ (6) -1

251 (1) 12 (2) $\frac{1}{6}$ (3) -6 (4) $-\infty$

(5) 1 (6) 1

252 (1) 極限はない (2) $a > 1$ のとき ∞ ,

$a = 1$ のとき $\frac{1}{2}$, $a < 1$ のとき $-\infty$

(3) 7 $\left[(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \infty \right]$

(3) $7^x < 7^x + 4^x < 2 \cdot 7^x$ から
 $7 < (7^x + 4^x)^{\frac{1}{x}} < 2 \cdot 7^{\frac{x}{x}}$

253 (1) $\frac{3}{2}$ (2) -1

(1) $\frac{(\sqrt{x^2+3})^2 - (2x)^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3} - 2x)} = \frac{3(1-x)}{\sqrt{x^2+3} - 2x}$

(2) 3^x で分母・分子を割る]

254 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) 1 [(1) 分母, 分子を

\sqrt{x} で割る (2) まず有理化]

255 (1) 2 (2) -2 (3) $-\frac{1}{2}$

(4) -1 [(1) まず, 有理化

(2) $x = -t$ とおくと $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t^2 - 4t} - t)$

(3) $x = -t$ とおくと (別解) $x < 0$ のとき,
 $\sqrt{x^2} = -x$ から, 次のように変形できる。

(与式) $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{2 - \frac{1}{x}}}$

256 (1) $a = -1, b = 0$ (2) $a = 1, b = -2$

(3) $a = 0, b = 5$ (4) $a = 8, b = 1$

[(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$ から $b = -a - 1$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \{(a+1)x + b\} = 0$

$b = -a - 1$ を代入して, 分母を有理化する。

(3) 分母, 分子を x で割る。

(与式の左辺) $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b + \frac{4}{x}}{1 + \frac{3}{x}}$

(4) $b \leq 0$ は不適。 $b > 0$ のとき

(与式の左辺) $=$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax - (bx)^2}{\sqrt{x^2 + ax + bx}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-b^2)x + a}{\sqrt{1 + \frac{a}{x} + b}}$

よって $1 - b^2 = 0, \frac{a}{1+b} = 4$

257 (1) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

(2) $f(x) = 3x^2 - 12$

[(1) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおくと

[1] により $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ から $d = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + bx + c) = 3$ から $c = 3$

[2] により $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ から $b = -3a - 1$

$\frac{f(x)}{x-3} = \frac{(ax^2 - x)(x-3)}{x-3} = ax^2 - x$

$\lim_{x \rightarrow 3} (ax^2 - x) = 9a - 3 (=6)$

(2) [1] から $f(x)$ は 2 次式で, 2 次の係数は 3

[2] から $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$]

258 (1) -1 (2) 0 (3) 極限はない

(4) 極限はない (5) 1 (6) 極限はない

259 (1) 5 (2) $\frac{1}{3}$ (3) -2

(4) $\frac{1}{2}$ (5) 2 (6) -1

[(5), (6) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ を利用]

260 (1) 0 (2) 2 (3) $-\frac{1}{6}$ (4) -1

[(1)-(3) 分母・分子に $1 + \cos x$ を掛ける

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{\cos 2x} \right)$

261 (1) 2 (2) -1 [(1) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{t}$

(2) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t}$

262 (1) 1 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 3 (4) 1

263 (1) 0 (2) 4 (3) $\frac{1}{4}$ (4) 0

[(1) $0 \leq |\sin 4x| \leq 1$ から $0 \leq \left| \frac{\sin 4x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$

(2) $\frac{\sin 4x}{x} = \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4$

(3) $\frac{1}{x} = t$ とおくと $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{4}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{4}}{\frac{t}{4}} \cdot \frac{1}{4}$

(4) $0 \leq \left| \sin \frac{1}{4x} \right| \leq 1$ から $0 \leq \left| x \sin \frac{1}{4x} \right| \leq |x|$

264 (1) π (2) $\frac{\pi}{180}$ (3) 1 (4) 2

(5) $-\pi$ (6) 1 [(1) $\frac{\sin \pi x}{x} = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \pi$

(2) $x^\circ = \frac{\pi}{180}x$ であるから

$\frac{\sin x^\circ}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{180}x}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x} \cdot \frac{\pi}{180}$

(3) $\sin x = t$ とおくと $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$

(4) $\frac{x \tan x}{1 - \cos x} = \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{\cos x (1 - \cos^2 x)}$
 $= \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1 + \cos x}{\cos x}$

(5) $x - 1 = t$ とおくと $-\frac{\sin \pi t}{t} = -\pi \cdot \frac{\sin \pi t}{\pi t}$

(6) $\frac{1}{x} = t$ とおくと

$\frac{1}{t-3t^2} \sin t = \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{1-3t} \quad (t \rightarrow 0)$

265 $a = 4, b = -1$ [(分母) $\rightarrow 0$ であるから

(分子) $\rightarrow 0$ よって $1+b=0$

ゆえに $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{(\sqrt{ax+1}+1)\sin x} = 2$

266 $\frac{1}{2r}$ [$\angle POA = \theta$ とおくと $\widehat{AP} = r\theta$,

$AP = 2r \sin \frac{\theta}{2}$, $PQ = 2AP \sin \frac{\theta}{4}$]

267 (1) 連続 (2) 不連続 (3) 不連続

(4) 連続 (5) 不連続 (6) 連続

[$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ が存在するか, また

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ が成り立つか調べる。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ (2) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -0} f(x)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ (4) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0)$

(5) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -0} f(x)$

(6) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$]

268 [$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $f(0) = 1$]

269 $a = \frac{3}{2}$ [$f(2) = 4$, $\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = 2a + 1$]

270 (1) $x = -1$ のとき最大値 5,

$x = \frac{3}{2}$ のとき最小値 0

(2) 最大値はない, $x = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$

271 [(左辺) $= f(x)$ とおくと $f(x)$ は連続

(1) $f(4) = -1$, $f(5) = 12$

(2) $f(\pi) = \pi + 1 > 0$, $f(2\pi) = -2\pi + 1 < 0$]

272 不連続 [$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 + 3x}{x} = 3$,

$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2 + 3x}{-x} = -3$]

273 (1) 定義域 $x = 1, -1$ を除く実数全体
定義域全体において連続

(2) 定義域 $0 \leq x \leq 6$ 定義域全体で連続

(3) 定義域 実数全体

n を整数とすると $x = n$ で不連続;

$x = n$ を除く実数全体で連続

(4) 定義域 $x < -2, 0 < x$ 定義域全体で連続

274 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\pi^2}{4}$

[$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{ax^2}{1 - \cos x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pi-0} \frac{ax^2}{1 - \cos x} = b$]

275 (1) [図]; 定義域 $x > -1$,

$x = 1$ において不連続

(2) [図]; 定義域 $x \neq \frac{3}{2}\pi + 2l\pi$ (l は整数),

$x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ (m は整数) において不連続

[(1) $|x| < 1$ のとき $y = x$,

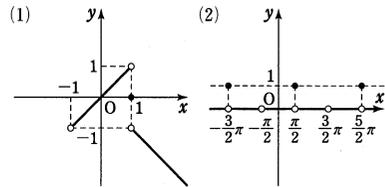
$x = 1$ のとき $y = 0$, $x > 1$ のとき $y = -x$

(2) まず, $0 \leq x < 2\pi$ において考える。

$x = \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin x = 1$ から $y = 1$;

$x = \frac{3}{2}\pi$ のとき, $\sin x = -1$ から, y は定義

されない; 他の区間においては, $|\sin x| < 1$ であるから $y = 0$]



276 (1) -2 と -1 , -1 と 0 , 1 と 2 の間

[(1) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ とおくと, $f(x)$ は連続で $f(-2) < 0$, $f(-1) > 0$, $f(0) < 0$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$

(2) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく。

$a > 0$ のとき, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $a < 0$ の場合も同様]

277 $\frac{7}{8}$ [$\frac{7}{10} + \frac{7 \cdot 2}{10^2} + \frac{7 \cdot 2^2}{10^3} + \dots$]

278 $a = 0$, $b = 1$

[$x < -1$, $1 < x$ のとき $f(x) = x^2 + ax$;

$x = 1$ のとき $f(x) = \frac{1+a+b}{2}$;

$x = -1$ のとき $f(x) = \frac{1-a+b}{2}$;

$-1 < x < 1$ のとき $f(x) = bx^2$]

279 [(1) 数学的帰納法で示す。 $0 < a_k < 3$ と

仮定すると $3 - a_{k+1} = 2 - \sqrt{1 + a_k}$,

$1 < \sqrt{1 + a_k} < 2$ から (2) $3 - a_n$

$= 2 - \sqrt{1 + a_{n-1}} = \frac{3 - a_{n-1}}{2 + \sqrt{1 + a_{n-1}}} \leq \frac{1}{3}(3 - a_{n-1})$

(3) $0 < 3 - a_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (3 - a_1)$

280 $\frac{1}{2}$ [$P\left(t, \frac{1}{t+1}\right)$ ($t > 0$) とおくと

$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \left\{ t + \frac{1}{t(t+1)^2} \right\} \cdot \frac{1}{t+1}$

$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{t}{t+1} + \frac{1}{t(t+1)^3} \right\}$]

281 [ヒントから $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$]

282 0 [$3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2n + 2n(n-1)$

から $\frac{n}{3^n} \leq \frac{n}{1+2n^2}$]

283 (1) 1 (2) 極限はない

[$n \rightarrow \infty$ のとき

(1) $a_{2n-1} = \frac{2n-1}{2n} \rightarrow 1$, $a_{2n} = 1 \rightarrow 1$

(2) $a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} \rightarrow 0$,

$a_{2n} = \frac{2n}{2n-1} \rightarrow 1$]