第1章　複素数平面

1　複素数平面

1　複素数平面　複素数 $\alpha=a+bi$ を座標平面上の点 $(a,\ b)$ で表した平面

① **複素数の実数倍**　$\alpha\neq0$ のとき

3点 $0,\ \alpha,\ \beta$ が一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\beta=k\alpha$ となる実数 k がある

② **複素数の加法，減法**　点の平行移動や平行四辺形の頂点として表される。

2　共役な複素数　$\alpha=a+bi$ のとき，共役な複素数 $\overline{\alpha}$ は $\overline{\alpha}=a-bi$

① **対称**　点 α と実軸，原点，虚軸に関して対称な点はそれぞれ $\overline{\alpha},\ -\alpha,\ -\overline{\alpha}$

② **実数・純虚数**　α が実数 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\alpha}=\alpha$　　α が純虚数 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\alpha}=-\alpha,\ \alpha\neq0$

③ **和・差・積・商**　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta},\ \overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta},\ \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta},\ \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

3　絶対値　複素数 $\alpha=a+bi$ に対して $|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}$

① **性質**　$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha},\ |\alpha|=|-\alpha|=|\overline{\alpha}|$　② 2点 $\alpha,\ \beta$ 間の距離 $|\beta-\alpha|$

A

1　次の点を複素数平面上に記せ。

A$(2+3i)$，B$(1-i)$，C$(-2+4i)$，D$(-3-2i)$，E(3)，F$(-2i)$

***2**　$\alpha=2+4i,\ \beta=x-3i,\ \gamma=2+yi,\ \delta=3+i$ とする。

(1)　3点 $0,\ \alpha,\ \beta$ が一直線上にあるとき，実数 x の値を求めよ。

(2)　4点 $0,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ が一直線上にあるとき，実数 $x,\ y$ の値を求めよ。

3　$\alpha=1-i,\ \beta=2+3i$ であるとき，次の複素数を表す点を図示せよ。

(1)　$\alpha+\beta$　　(2)　$\alpha-\beta$　　*(3)　$3\alpha+2\beta$　　(4)　$-2\alpha+\beta$

***4**　複素数 $3-2i$ を表す点と実軸，原点，虚軸に関して対称な点の表す複素数を，それぞれ求めよ。

5　次の複素数の絶対値を求めよ。

*(1)　$3+4i$　　(2)　$1-2i$　　(3)　$5i$　　*(4)　$\dfrac{1+3i}{2-i}$

6　次の2点 $\alpha,\ \beta$ 間の距離を求めよ。

*(1)　$\alpha=2+3i,\ \beta=1-2i$　　(2)　$\alpha=2i,\ \beta=-4$

Aのまとめ

7　$\alpha=1+2i,\ \beta=3-i$ のとき，複素数 $3\alpha-2\beta$ を表す点を図示せよ。また，2点 $\alpha,\ \beta$ 間の距離を求めよ。

絶対値の値

例題 1　$\alpha,\ z$ は複素数で $|z-\alpha|=|1-\overline{\alpha}z|$ のとき，$|z|$ の値を求めよ。ただし，$|\alpha|\neq1$

指針　**複素数の絶対値**　$|z|^2=z\overline{z}$ を利用する。

解答　$|z-\alpha|=|1-\overline{\alpha}z|$ であるから

$$|z-\alpha|^2=|1-\overline{\alpha}z|^2$$

よって　$(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}=(1-\overline{\alpha}z)\overline{(1-\overline{\alpha}z)}$

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=(1-\overline{\alpha}z)(1-\alpha\overline{z})$$

整理すると　$(1-\alpha\overline{\alpha})z\overline{z}-(1-\alpha\overline{\alpha})=0$

ゆえに　$(1-|\alpha|^2)(|z|^2-1)=0$

$|\alpha|\neq1$ であるから　$|z|^2=1$

したがって　$\boldsymbol{|z|=1}$　答

B

8　$z=2+i$ のとき，$\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^2$ の値を求めよ。

***9**　複素数 z が，$2z+\overline{z}=1-2i$ を満たすとき，次の値を求めよ。

(1)　$2\overline{z}+z$　　(2)　z

***10**　(1)　$|z|=3$ かつ $|z+2|=4$ を満たす複素数 z について，$z+\overline{z}$ の値を求めよ。

(2)　$|z+1|=2|z-2|$ を満たす複素数 z について，$|z-3|$ の値を求めよ。

***11**　複素数 $\alpha,\ \beta$ について，次のことを証明せよ。

(1)　$\alpha\overline{\beta}$ が実数でないとき，$z=\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$ は純虚数

(2)　$\alpha\overline{\alpha}=1$ のとき，$z=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ は実数

12　$\alpha,\ \beta$ を複素数とし，$\alpha\neq0$ とするとき，次のことを証明せよ。

$\overline{\alpha}\beta$ が実数 $\Longleftrightarrow$ $\beta=k\alpha$ となる実数 k がある

13　複素数 $\alpha,\ \beta$ について，次の等式を証明せよ。

(1)　$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2(|\alpha|^2+|\beta|^2)$

(2)　$|\alpha|=1$ のとき　$|\alpha-\beta|=|1-\alpha\overline{\beta}|$

*(3)　$|\alpha|=|\beta|=|\alpha+\beta|=1$ のとき $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$

***14**　$|\alpha|=|\beta|=2,\ \alpha+\beta+3=0$ のとき，$\alpha^2+\beta^2$ の値を求めよ。

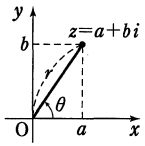
2 複素数の極形式と乗法，除法

1 極形式

① $z \neq 0$ のとき　$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$

ただし，$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$

② 偏角　$\theta=\arg z$　　一般に $\arg z=\theta_0+2n\pi$（n は整数）



2 複素数の積，商　$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とする。

① **積**　$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

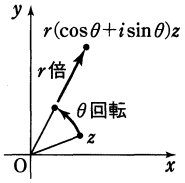
$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2$

② **商**　$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$，$\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$

3 複素数平面上の回転

点 $r(\cos\theta+i\sin\theta)z$ は，点 z を原点を中心として θ だけ回転し，原点からの距離を r 倍に拡大・縮小した点



A

15 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

*(1) $3+\sqrt{3}\,i$　　(2) $2-2i$　　*(3) $3i$　　(4) -4

16 次の2つの複素数 α，β について，積 $\alpha\beta$ と商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

*(1) $\alpha=2+2\sqrt{3}\,i$，$\beta=1+i$　　(2) $\alpha=\sqrt{3}+i$，$\beta=1-\sqrt{3}\,i$

***17** (1) 点 $z=\sqrt{3}+i$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点を表す複素数を求めよ。

(2) 2点 $(1+i)z$，$\dfrac{z}{1+\sqrt{3}\,i}$ は，点 z をどのように移動した点であるか。

(3) 3点 O(0)，A$(2-i)$，B が OA=3OB かつ $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$ を満たしているとき，点Bを表す複素数を求めよ。

Aのまとめ

18 $\alpha=\sqrt{3}-i$，$\beta=1+i$ のとき，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $-\pi\leqq\theta<\pi$ とする。

また，点 $\alpha\beta$ は点 β をどのように移動した点であるか。

対称移動（直線）

例題 2　0を表す点をO，$1+i$ を表す点をAとする。点 z を直線OAに関して対称移動した点を w とするとき，w を z を用いて表せ。

指針　**直線に関する対称移動**　$1+i$ の偏角を θ とする。点 z を次の順で移動する。

① 原点を中心として $-\theta$ だけ回転（直線OAが実軸に重なる）

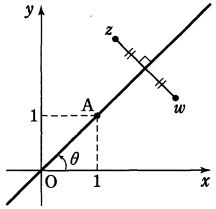
② 実軸に関して対称移動（共役な複素数をとる）

③ 原点を中心として θ だけ回転（直線OAがもとの位置に戻る）

解答　$1+i$ の偏角を θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とすると　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ とすると，点 z を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数は　$\dfrac{z}{\alpha}$

点 $\dfrac{z}{\alpha}$ を実軸に関して対称移動した点は　点 $\overline{\left(\dfrac{z}{\alpha}\right)}$



点 w は，点 $\overline{\left(\dfrac{z}{\alpha}\right)}$ を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点であるから

$$w=\alpha\overline{\left(\frac{z}{\alpha}\right)}=\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\overline{z}=\left[\cos\left\{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}+i\sin\left\{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\right]\overline{z}=i\overline{z}$$　答

B

19 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}\,i}$　　*(2) $\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}$　　*(3) $3\left(\sin\dfrac{\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$

***20** $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i}$ を計算することで，$\sin\dfrac{\pi}{12}$ と $\cos\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

***21** 点 z を原点の周りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したのち，実軸の方向に1，虚軸の方向に1だけ平行移動した点が z に一致するような複素数 z を求めよ。

22 $\alpha=2-\sqrt{3}\,i$，$\beta=6+\sqrt{3}\,i$ について，点 β を点 α の周りに次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

*(1) $\dfrac{\pi}{3}$　　(2) $\dfrac{\pi}{2}$

***23** A$(1+\sqrt{3}\,i)$ について，点 $z=4-2\sqrt{3}\,i$ を直線OAに関して対称に移動した点を表す複素数を求めよ。ただし，Oは原点とする。

3 ド・モアブルの定理

1 ド・モアブルの定理

n が整数のとき $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

2 n 乗根 (n は自然数)

① 1の n 乗根 $z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$, $z_k={z_1}^k$

② 複素数平面上で，点 z_k は単位円に内接する正 n 角形の各頂点である。
特に，点1は頂点の1つである。

参考 0でない複素数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ の n 乗根 z_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$
は $z_k=\sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\dfrac{\theta}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\theta}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}\right)\right\}$

A

24 次の式を計算せよ。

(1) $\left(\cos\dfrac{\pi}{18}+i\sin\dfrac{\pi}{18}\right)^{12}$　(2) $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{6}$

(3) $\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)^{-3}$　(4) $\left\{2\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\right\}^{4}$

25 次の式を計算せよ。

*(1) $(1+i)^7$　(2) $(1-i)^{-10}$

(3) $\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{8}$　*(4) $(-\sqrt{3}+i)^{-6}$

26 ド・モアブルの定理を用いて，次の等式を証明せよ。

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$, $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

*(2) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$, $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

27 $z^4=1$ を満たす z の値を，ド・モアブルの定理を用いて解け。

28 次の方程式を解け。

(1) $z^6=-1$　*(2) $z^3=8i$

(3) $z^2=-1-\sqrt{3}\,i$　*(4) $z^4=8(-1+\sqrt{3}\,i)$

Aのまとめ

29 (1) $z=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}\,i}$ のとき，z^9 の値を求めよ。

(2) 方程式 $z^4=-8-8\sqrt{3}\,i$ を解け。

n 乗の値

例題 3 n が自然数のとき，$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ の値を求めよ。

指針 **ド・モアブルの定理** (複素数)^n の形であるから，極形式に直して計算する。

解答

$$(\text{与式})=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n+\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n$$
$$=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}\times n\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\times n\right)\right\}+\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\times n\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\times n\right)\right\}$$
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\times n\right)$$

よって，**m を自然数として　$n=8m$ のとき 2；**
$n=8m-1$, $8m-7$ のとき $\sqrt{2}$；$n=8m-2$, $8m-6$ のとき 0；
$n=8m-3$, $8m-5$ のとき $-\sqrt{2}$；$n=8m-4$ のとき -2 答

B

30 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{(1+i)^6}$　*(2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^8$　(3) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i}\right)^{10}$　*(4) $\left(\dfrac{5-i}{2-3i}\right)^8$

***31** n が自然数のとき，$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n$ の値を求めよ。

***32** 次の数が実数となる最小の自然数 n を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^n$　(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i\right)^{2n}$

33 複素数 z が，$z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ を満たすとき，z を θ で表せ。

また，n が自然数のとき，$z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$ を証明せよ。

34 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とおくと $z^n=1$ の解は $1,\ \omega,\ \omega^2,\ \cdots\cdots,\ \omega^{n-1}$ であることを示せ。ただし，n は自然数とする。

35 $\omega=\cos\dfrac{\pi}{10}+i\sin\dfrac{\pi}{10}$ のとき，次の値を求めよ。

*(1) $\omega^{19}+\omega^{18}+\cdots\cdots+\omega+1$　(2) $\omega^{19}\omega^{18}\cdots\cdots\omega\cdot 1$

***36** 方程式 $z^8+z^4+1=0$ の解を求めよ。

4 複素数と図形 (1)

1 内分点，外分点　A(α)，B(β)，C(γ) とする。

① 線分 AB を $m:n$ に内分または外分する点を表す複素数は

内分点 $\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$　　外分点 $\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$　　特に中点 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

② △ABC の重心を表す複素数は　$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

2 方程式の表す図形

① $|z-\alpha|=r$　点 α を中心とする半径 r の円

② $|z-\alpha|=|z-\beta|$　2 点 α，β を結ぶ線分の垂直二等分線

A

***37**　2 点 A($4+2i$)，B($-1+7i$) を結ぶ線分 AB に対して，次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 3：2 に内分する点，2：3 に内分する点，中点

(2) 3：2 に外分する点，2：3 に外分する点

38　次の 3 点 α，β，γ を頂点とする三角形の重心を表す複素数を求めよ。

(1) $\alpha=0$，$\beta=3+2i$，$\gamma=6+i$　　*(2) $\alpha=2+i$，$\beta=5-i$，$\gamma=-4-4i$

39　次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形を描くか。

(1) $|z+2|=3$　　*(2) $|z+2-3i|=1$　　*(3) $|\bar{z}-i|=2$

*(4) $|z+1|=2|z-2|$　　(5) $3|z|=|z+8i|$　　*(6) $3|z-i|=2|z-1|$

(7) $|z-3|=|z-i|$　　(8) $|z|=|z+4|$　　*(9) $|z-3+i|=|z+1|$

***40**　点 z が，原点Oを中心とする半径 1 の円上を動くとき，次の条件を満たす点 w はどのような図形を描くか。

(1) $w=z+i$　　(2) $w=\dfrac{iz+4}{2}$

(3) 点 $3i$ と点 z を結ぶ線分の中点 w

A のまとめ

41　(1) A($1+3i$)，B($-2+5i$)，C($2-2i$) について，△ABC の重心を表す複素数を求めよ。

(2) 次の方程式は，複素数平面上でどのような図形を描くか。

(ア) $|z+2i|=|z-3|$　　(イ) $2|z-3|=|z+4i|$

図形の変換

例題 4　複素数 z が $|z|=2$ を満たすとき，$w=\dfrac{2z+1}{z-1}$ で与えられる点 w はどのような図形を描くか。

指針　**軌跡**　z を w で表し，与えられた等式に代入する。$|z|^2=z\bar{z}$ などを利用。

解答　$w=\dfrac{2z+1}{z-1}$ から　$z=\dfrac{w+1}{w-2}$

$|z|=2$ であるから　$\left|\dfrac{w+1}{w-2}\right|=2$　　よって　$|w+1|=2|w-2|$

両辺を平方すると　$|w+1|^2=4|w-2|^2$

よって　$(w+1)(\bar{w}+1)=4(w-2)(\bar{w}-2)$

整理すると　$w\bar{w}-3w-3\bar{w}+5=0$　　ゆえに　$(w-3)(\bar{w}-3)=4$

すなわち　$|w-3|^2=4$　から　$|w-3|=2$

したがって，点 w は**点 3 を中心とする半径 2 の円**を描く。答

B

***42**　三角形の各辺の中点が $\alpha=1+2i$，$\beta=2+3i$，$\gamma=3+i$ であるとき，この三角形の 3 つの頂点を表す複素数を求めよ。

43　△ABC の辺 BC の中点を M とするとき，$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ であることを，複素数平面を利用して証明せよ。

44　次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形を描くか。

*(1) $z+\bar{z}=4$　　(2) $z-\bar{z}=6i$

(3) $|z-i|=|iz-1|$　　*(4) $z\bar{z}+iz-i\bar{z}=3$

45　点 z が，原点Oを中心とする半径 1 の円上を動くとき，次の点 w はどのような図形を描くか。

(1) $w=\dfrac{1+i}{z}$　　(2) $w=\dfrac{1-iz}{1-z}$　　*(3) $w=\dfrac{6z-1}{2z-1}$

***46**　z が複素数で $z+\dfrac{1}{z}$ が実数となるような点 z はどのような図形を描くか。

47　z が複素数で $\dfrac{(i-1)z}{i(z-2)}$ が実数となるような点 z はどのような図形を描くか。

48　複素数 z が $|z|\leqq 1$，$(1-i)z+(1+i)\bar{z}\geqq 2$ を同時に満たすとき，点 z の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

5 複素数と図形 (2)

1 半直線のなす角　異なる3点を A(α), B(β), C(γ) とする。

① $\angle\beta\alpha\gamma=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$

② 3点 A, B, C が一直線上にある $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数 (偏角が 0 または π)

③ 2直線 AB, AC が垂直に交わる $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数 $\left(\text{偏角が } \pm\dfrac{\pi}{2}\right)$

注意　$\angle\beta\alpha\gamma$ は，半直線 AC が半直線 AB となす向きを考えた角。0 以上 π 以下の向きを考えない角は，$\angle$BAC と表す。

A

49 次の3点について，$\angle$BAC の大きさを求めよ。

(1) A($1+2i$), B(3), C($7+8i$)　*(2) A($\sqrt{3}+i$), B($6i$), C($3\sqrt{3}+5i$)

***50** $\alpha=5-i$, $\beta=3+i$, $\gamma=2+2i$ の3点 α, β, γ は一直線上にあることを示せ。

***51** $\alpha=2+i$, $\beta=4+4i$, $\gamma=-1+3i$ を表す複素数平面上の点を，それぞれ A, B, C とする。直線 AB と直線 AC は垂直に交わることを示せ。

A のまとめ

52 A($5-i$), B($3+i$), C($x+2i$) が次の条件を満たすように，実数 x の値を定めよ。

(1) 3点 A, B, C が一直線上にある　(2) AB$\perp$AC

B

53 複素数平面上の異なる4点 A(α), B(β), C(γ), D(δ) について以下を示せ。

2直線 AB, CD が垂直に交わる $\iff$ $\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が純虚数

***54** 原点を O，$\alpha=2-i$, $\beta=3+(2a-1)i$ を表す点をそれぞれ A, B とする。2直線 OA, OB のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ となるように，実数 a の値を定めよ。

55 異なる3つの複素数 α, β, γ が次の関係を満たすとき，3点 A(α), B(β), C(γ) を頂点とする $\triangle$ABC はどのような三角形か。

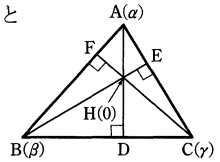
(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{3}\,i$　*(2) $\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$　*(3) $\alpha=-i$, $\beta=3i$, $\gamma=2\sqrt{3}+i$

複素数による垂心の証明

例題 5　$\triangle$ABC において，各頂点から対辺に下ろした3つの垂線が1点Hで交わることを複素数を用いて示せ。ただし，A(α), B(β), C(γ), H(0) とし，$\alpha\beta\gamma\neq0$ とする。

指針　**垂心**　HB$\perp$CA, HC$\perp$AB から HA$\perp$BC を示す。
$\bar{z}=-z$, $z\neq0$ $\iff$ z は純虚数　を利用する。

解答



B, C から対辺に下ろした2つの垂線の交点をHとすると

HB$\perp$CA から $\dfrac{\beta}{\alpha-\gamma}$ は純虚数である。

すなわち $\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha-\gamma}\right)}=-\dfrac{\beta}{\alpha-\gamma}$

ゆえに $\bar{\beta}\alpha-\bar{\beta}\gamma=\beta\bar{\gamma}-\beta\bar{\alpha}$ …… ①

HC$\perp$AB から $\dfrac{\gamma}{\beta-\alpha}$ は純虚数である。すなわち $\overline{\left(\dfrac{\gamma}{\beta-\alpha}\right)}=-\dfrac{\gamma}{\beta-\alpha}$

ゆえに $\bar{\gamma}\beta-\bar{\gamma}\alpha=\gamma\bar{\alpha}-\gamma\bar{\beta}$ …… ②

①, ② を辺々加えて $(\bar{\beta}-\bar{\gamma})\alpha=(\gamma-\beta)\bar{\alpha}$

ゆえに $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\gamma-\beta}\right)}=-\dfrac{\alpha}{\gamma-\beta}$

よって $\dfrac{\alpha}{\gamma-\beta}$ は純虚数となり，HA$\perp$BC となる。終

B

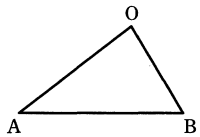
***56** 複素数平面上の2点 A, B を表す複素数をそれぞれ $\alpha=\sqrt{3}-4i$, $\beta=5\sqrt{3}+4i$ とする。

(1) 線分 OA を1辺とする正三角形の他の頂点を表す複素数を求めよ。

(2) 線分 AB を1辺とする正三角形の他の頂点を表す複素数を求めよ。

(3) 線分 AB を1辺とする正方形の他の2つの頂点を表す複素数を求めよ。

***57** 右の図のような $\triangle$OAB の外側へ2つの正方形 OACD と OBEF を作るとき，線分 DF の中点Mについて，OM$\perp$AB であることを証明せよ。

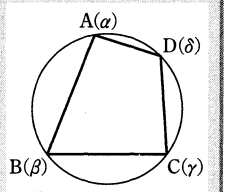


***58** 複素数平面上の異なる3点 O(0), A(α), B(β) について，次の等式が成り立つとき，三角形 OAB はどのような三角形か。

(1) $\alpha^2+\beta^2=0$　(2) $\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2=0$

四角形が円に内接する条件（複素数）

例題 6　右の図のように，4点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) を頂点とする四角形 ABCD が円に内接している。このとき，$\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\div\dfrac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}$ は実数であることを証明せよ。



指針 **四角形が円に内接する**　同じ弧に対する円周角が等しい。
$\angle ACB=\angle ADB$

解答　円周角の定理から　$\angle ACB=\angle ADB$

よって　$\arg\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\arg\dfrac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}$　すなわち　$\arg\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}-\arg\dfrac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}=0$

ゆえに　$\arg\left(\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\div\dfrac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}\right)=0$　したがって，$\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\div\dfrac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}$ は実数である。

検討　この命題の逆も成り立つ。一般に次のことがいえる。
一直線上にない4点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) について

4点 A，B，C，D が同一円周上にある $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\div\dfrac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}$ が実数

B

***59**　複素数平面上の異なる3点 O(0)，A(α)，B(β) について，等式 $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0$ が成り立つとき，OA⊥OB であることを証明せよ。

***60**　複素数平面上の異なる3点 α，β，γ が一直線上にあるとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)=0$$

***61**　異なる4つの複素数 α，β，γ，δ を表す点を，それぞれ A，B，C，D とする。2つの等式 $\alpha+\gamma=\beta+\delta$，$\delta-\alpha=i(\beta-\alpha)$ が成り立つとき，四角形 ABCD は正方形であることを証明せよ。

62　単位円上の異なる3点 A(α)，B(β)，C(γ) と，円上にない点 H(z) について，等式 $z=\alpha+\beta+\gamma$ が成り立つとき，H は △ABC の垂心であることを証明せよ。

***63**　複素数平面上に，4点 $z_1=-1$，$z_2=1-i$，$z_3=3+i$，$z_4=-\dfrac{1}{3}+3i$ をとる。4点 z_1，z_2，z_3，z_4 は同一円周上にあることを証明せよ。

6　第1章　演習問題

絶対値の最大・最小（複素数）

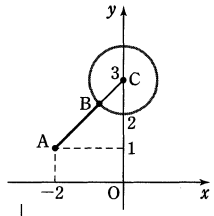
例題 7　(1) $|z-3i|=1$ のとき，$|z-i+2|$ の最小値を求めよ。
(2) $|z|=1$ のとき，$|z^2-z+1|$ の最小値を求めよ。

指針 **絶対値の最大・最小**　(1) $3i$ を中心として半径1の円を動く。

(2) $|z|=1 \to |z^2-z+1|=|z|\left|z-1+\dfrac{1}{z}\right|=\left|z+\dfrac{1}{z}-1\right|$

↘ $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおける。

解答　(1) $|z-3i|=1$ から点 z は点 C($3i$) を中心として半径1の円周上を動く。$|z-i+2|$ は，この円 C の周上の点 z と点 A($-2+i$) との距離であるから，求める最小値は，線分 AC と円 C の周との交点を B とすると，線分 AB の長さである。



よって $|3i-(-2+i)|-1=|2+2i|-1=\mathbf{2\sqrt{2}-1}$ 答

(2) $|z|=1$ から　$|z^2-z+1|=\left|z\left(z-1+\dfrac{1}{z}\right)\right|=\left|z+\dfrac{1}{z}-1\right|$

また，$|z|=1$ から $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおける。

$\left|z+\dfrac{1}{z}-1\right|=|\cos\theta+i\sin\theta+\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)-1|=|2\cos\theta-1|$

よって，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 **0**　答

B

64　次の式を計算せよ。ただし，n は自然数とする。

(1) $\left(\dfrac{3+i}{2-i}\right)^{10}$　　*(2) $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}\right)^{100}$　　(3) $\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}}\right)^{n}$

***65**　$|z|=1$ を満たす z に対して，次の式の値の最大値を求めよ。
(1) $|z+2i-3|$　　(2) $|z^2+3z|$　　(3) $|z^2+z+1|$

***66**　n は自然数とする。$z+\dfrac{1}{z}=1$ のとき，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ の値を求めよ。

***67**　複素数平面上の単位円の周を3等分する任意の3点 z_1，z_2，z_3 について，$\dfrac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}{z_1z_2z_3}$ の値を求めよ。

直線に関する対称

例題 8 異なる2点 A(z), B(w) と，原点Oと異なる定点 C(γ) の間に，等式 $\dfrac{z}{\gamma}=\overline{\left(\dfrac{w}{\gamma}\right)}$ が成り立つとき，2点 A，B の位置関係をいえ。

指針 **等式を満たす点**　与えられた等式から，両辺の絶対値と偏角に着目する。

解答 等式の両辺の絶対値と偏角について　$\left|\dfrac{z}{\gamma}\right|=\left|\overline{\left(\dfrac{w}{\gamma}\right)}\right|$，$\arg\left(\dfrac{z}{\gamma}\right)=\arg\overline{\left(\dfrac{w}{\gamma}\right)}$

$\left|\dfrac{z}{\gamma}\right|=\dfrac{|z|}{|\gamma|}$，$\left|\overline{\left(\dfrac{w}{\gamma}\right)}\right|=\left|\dfrac{w}{\gamma}\right|=\dfrac{|w|}{|\gamma|}$ であるから　$|z|=|w|$　　ゆえに　OA=OB

また，$\arg\overline{\left(\dfrac{w}{\gamma}\right)}=-\arg\left(\dfrac{w}{\gamma}\right)$ であるから　$\arg\left(\dfrac{z}{\gamma}\right)=-\arg\left(\dfrac{w}{\gamma}\right)$

ゆえに，点Aと点Bは直線 OC に関して反対側にあって　∠AOC=∠BOC

したがって，直線 OC は二等辺三角形 OAB の底辺 AB を垂直に2等分する。

すなわち，**2点 A，B は，直線 OC に関して対称な位置にある。** 答

B

***68** O(0)，A(14)，B(9+12i) とする △OAB について，垂心H，外心Kを表す複素数を求めよ。

69 定点 γ ($\neq 0$) と原点Oを結ぶ直線に関して，点 z と対称な点を w とするとき，$w=\dfrac{\gamma^2}{|\gamma|^2}\cdot\overline{z}$ が成り立つことを証明せよ。

***70** 異なる4点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) について，$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=|\delta|$，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ を満たすとき，A，B，C，D を頂点とする四角形は長方形であることを証明せよ。

71 a，b を実数とし，n を0以上の整数とする。複素数平面上の点 $P_n(x_n+y_ni)$ を $x_0=1$，$y_0=0$，$x_{n+1}+y_{n+1}i=(ax_n-by_n)+(bx_n+ay_n)i$ によって定める。このとき，次の条件 [1]，[2] がともに成り立つような (a, b) をすべて求めよ。

[1] $P_0=P_6$　　[2] P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 は相異なる

ヒント **69** 点 γ が実軸上にくるように，Oを中心とした回転移動を考える。
71 $x_{n+1}+y_{n+1}i=(a+bi)(x_n+y_ni)$ に着目する。

方程式の解と複素数平面

例題 9 方程式 $x^3+px+q=0$ は虚数解 $r\pm 3i$ と1つの実数解をもち，複素数平面上でこれらの解を表す3点は半径 $\dfrac{15}{4}$ の同一円周上にある。このとき，p，q，r を求めよ。ただし，p，q，r は実数で $r>1$ とする。

指針 **方程式の解が同一円周上**　3次方程式の解→解と係数の関係を利用。
3つの解を表す点が同一円周上→2点の垂直二等分線が円の中心を通る。

解答 実数解を α とすると，解と係数の関係から　$(r+3i)+(r-3i)+\alpha=0$，
$(r+3i)(r-3i)+(r-3i)\alpha+\alpha(r+3i)=p$，$(r+3i)(r-3i)\alpha=-q$

これらを整理すると

$\alpha=-2r$ … ①，$p=r^2+9+2r\alpha=-3r^2+9$ … ②，

$q=-\alpha(r^2+9)=2r(r^2+9)$ … ③

3つの解 α，$r\pm 3i$ は同一円周上にあることから，円の中心 β は実軸上にある。

よって　$|\alpha-\beta|=\dfrac{15}{4}$ … ④，$|r\pm 3i-\beta|=\dfrac{15}{4}$ … ⑤

①，④から　$2r+\beta=\pm\dfrac{15}{4}$ …⑥　　⑤から　$(r-\beta)^2+9=\dfrac{225}{16}$

よって　$r-\beta=\pm\dfrac{9}{4}$ … ⑦

⑥，⑦，$r>1$ から　$\boldsymbol{r=2}$　　このとき，②，③から　$\boldsymbol{p=-3}$，$\boldsymbol{q=52}$ 答

発展

72 方程式 $x^2-2x+2=0$ の2つの解を α，β とし，方程式 $x^2+2px-1=0$ の2つの解を γ，δ とする。複素数平面上で，4点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) が同一円周上にあるとき，実数 p の値を求めよ。

***73** 方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は虚数解 $1\pm 3i$ と1つの実数解をもち，複素数平面上でこれらの解を表す3点は半径5の同一円周上にある。ただし，$c>0$ である。このとき，a，b，c の値を求めよ。

***74** a，b は実数とし，4次方程式 $(x^2+2ax+b)(x^2+x+1)=0$ は相異なる4つの解をもつものとする。複素数平面上で，これらの4つの解を表す点がちょうど正方形の4頂点になるような a，b の値をすべて求めよ。

ヒント **72** α，β は共役な複素数であるから，線分 AB の垂直二等分線（実軸）上に円の中心がある。γ，δ は実数であるから CD は円の直径。

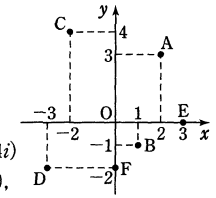
答と略解

1 問題の要求している答の数値，図などを記載し，略解・略証は［　］に入れて付した。

2 ［　］の中には，本文にない文字でも断らずに用いている場合もあるので注意してほしい。

3 ［　］の中は答案形式ではないので，諸君が独力で考え，完全な答案にしてほしい。

1 〔図〕



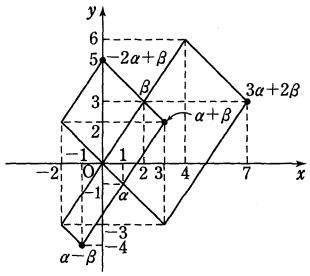
2 (1) $x=-\frac{3}{2}$

(2) $x=-9,\ y=\frac{2}{3}$

［(1) $x-3i=k(2+4i)$

(2) $2+yi=l(x-3i)$, $3+i=m(x-3i)$］

3 〔図〕



4 順に $3+2i,\ -3+2i,\ -3-2i$

5 (1) 5 (2) $\sqrt{5}$ (3) 5 (4) $\sqrt{2}$

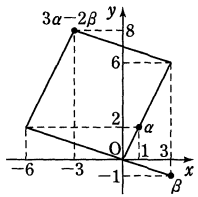
6 (1) $\sqrt{26}$ (2) $2\sqrt{5}$

7 〔図〕，$\sqrt{13}$

8 $\frac{32}{5}$ $\left[z+\frac{1}{z}\right.$

$=2+i+\frac{1}{2+i}$

$\left.=\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i\right]$



9 (1) $1+2i$ (2) $\frac{1}{3}-2i$

［(1) $2\bar{z}+z=\overline{2z+\bar{z}}$

(2) 条件式と(1)の連立方程式］

10 (1) $z+\bar{z}=\frac{3}{2}$ (2) $|z-3|=2$

［(1) $|z+2|^2=16$ から $(z+2)(\bar{z}+2)=16$

(2) $|z+1|^2=4|z-2|^2$ から

$(z+1)(\bar{z}+1)=4(z-2)(\bar{z}-2)$

$z\bar{z}-3(z+\bar{z})+5=0$ から $(z-3)(\bar{z}-3)=4$］

11 ［(1) $\bar{z}=\overline{\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta}=\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}=-z$

$\alpha\bar{\beta}$ が実数ではないから $\alpha\bar{\beta}\neq\overline{\alpha\bar{\beta}}$ $(=\bar{\alpha}\beta)$

よって $z\neq0$ (2) $\alpha\bar{\alpha}=1$ から $\bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$

よって $z=\alpha+\frac{1}{\alpha}=\alpha+\bar{\alpha}$ から

$\bar{z}=\overline{\alpha+\bar{\alpha}}=\bar{\alpha}+\alpha=z$］

12 ［$\bar{\alpha}\beta$ が実数のとき $\alpha\bar{\beta}=\bar{\alpha}\beta$

よって $\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}=\frac{\beta}{\alpha}$ から $\frac{\beta}{\alpha}$ は実数 $(=k)$

逆に $\beta=k\alpha$ のとき $\frac{\beta}{\alpha}=k$ (実数) であるから

$\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}=\frac{\beta}{\alpha}$ よって $(\overline{\bar{\alpha}\beta}=)\alpha\bar{\beta}=\bar{\alpha}\beta$］

13 ［(1) $(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})+(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$

$=2(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta})$ (2) $|\alpha-\beta|^2-|1-\alpha\bar{\beta}|^2$

$=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-(1-\alpha\bar{\beta})(1-\bar{\alpha}\beta)$

$=\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-1-\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}$，$\alpha\bar{\alpha}=1$

(3) $|\alpha+\beta|^2=1$ から $(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=1$

$\bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$，$\bar{\beta}=\frac{1}{\beta}$ を代入して整理］

14 1 ［$\alpha+\beta+3=0$ から $\alpha+\beta=-3$ …… ①

また $\bar{\alpha}+\bar{\beta}=-3$

$\alpha\bar{\alpha}=4$，$\beta\bar{\beta}=4$ から $\bar{\alpha}=\frac{4}{\alpha}$，$\bar{\beta}=\frac{4}{\beta}$

よって $\frac{4}{\alpha}+\frac{4}{\beta}=-3$ ① から $\alpha\beta=4$ … ②

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ に ①，② を代入］

15 (1) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(2) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

(3) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(4) $4(\cos\pi+i\sin\pi)$

16 (1) $\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$,

$\frac{\alpha}{\beta}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

(2) $\alpha\beta=4\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$,

$\frac{\alpha}{\beta}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

17 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

(2) $(1+i)z$：原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍に拡大した点；

$\frac{z}{1+\sqrt{3}i}$：原点を中心として $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を $\frac{1}{2}$ 倍に縮小した点

(3) $\frac{1+2\sqrt{3}}{6}+\frac{2-\sqrt{3}}{6}i$，$\frac{2\sqrt{3}-1}{6}-\frac{2+\sqrt{3}}{6}i$

$\left[(1)\ \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{3}+i)\right]$

18 $\alpha\beta=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$,

$\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right\}$；

点 $\alpha\beta$ は，点 β を原点を中心として $-\frac{\pi}{6}$ 回転し，原点からの距離を 2 倍に拡大した点

$\left[\alpha=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right.$,

$\left.\beta=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$

19 (1) $\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi$

(2) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\left[(2)\ 3+\sqrt{3}i=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right.$,

$1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$

$\left.(3)\ \sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\right]$

20 $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\left[\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right.$

$\left.\text{また}\ \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\right]$

21 i $\left[z=z\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)+1+i\right]$

22 (1) $1+2\sqrt{3}i$ (2) $2-2\sqrt{3}+(4-\sqrt{3})i$

$\left[(1)\ (\beta-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)+\alpha\right]$

23 $-5+\sqrt{3}i$

$\left[1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right.$ から直線

OA と x 軸のなす角は $\frac{\pi}{3}$ 求める複素数は

$\left.\overline{z\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$

24 (1) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (2) 1

(3) $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ (4) $8+8\sqrt{3}i$

25 (1) $8-8i$ (2) $\frac{1}{32}i$

(3) $-\frac{81}{2}+\frac{81\sqrt{3}}{2}i$ (4) $-\frac{1}{64}$

26 ［(1) ド・モアブルの定理から

$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos2\theta+i\sin2\theta$

また，$(\cos\theta+i\sin\theta)^2$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta+(2\sin\theta\cos\theta)i$

(2) (1)と同様］

27 $z=\pm1,\ \pm i$

［$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ とおくと

$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=\cos0+i\sin0$

よって $r^4=1$，$4\theta=0+2\pi k$ (k は整数)］

28 (1) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i,\ \pm i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$

(2) $z=\pm\sqrt{3}+i,\ -2i$

(3) $z=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$

(4) $z=\pm(\sqrt{3}+i),\ \pm(1-\sqrt{3}i)$

［(1) $r^6(\cos6\theta+i\sin6\theta)=\cos\pi+i\sin\pi$］

29 (1) -1 (2) $z=\pm(1+\sqrt{3}i),\ \pm(\sqrt{3}-i)$

[(2) $r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$
$=16\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$]

30 (1) $\frac{1}{8}i$ (2) $-\frac{1}{32}+\frac{\sqrt{3}}{32}i$
(3) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (4) 16 [(4) $\frac{5-i}{2-3i}=1+i$]

31 n が 3 の倍数のとき 2，n が 3 の倍数でないとき -1 [(与式)$=2\cos\left(\frac{2}{3}\pi\times n\right)$
$n=3m$, $3m-1$, $3m-2$ で場合分け]

32 (1) $n=12$ (2) $n=6$
[(2) $2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$ が実数となる]

33 $z=\cos\theta\pm i\sin\theta$ [(前半) 条件式の両辺に z を掛けて，z についての 2 次方程式を解く
(後半) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき
$z^n+\frac{1}{z^n}=\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos(-n\theta)$
$+i\sin(-n\theta)=2\cos n\theta$
$z=\cos\theta-i\sin\theta$ のとき
$z=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ 以下同様]

34 [解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ [$r>0$] とおくと $r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\cos 0+i\sin 0$ から
$r^n=1$, $n\theta=0+2\pi\times k$ (k は整数)
よって $z=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)$
$=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=\omega^k$
$0\leqq\theta<2\pi$ では $k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$]

35 (1) 0 (2) -1
[(1) $\omega^{20}=1$ により $\omega^{20}-1=0$ であるから
$(\omega-1)(\omega^{19}+\omega^{18}+\cdots\cdots+\omega+1)=0$, $\omega\neq 1$
(2) $\omega^{19}\omega^{18}\cdots\cdots\omega\cdot 1=\omega^{190}=\omega^{20\cdot 9+10}=\omega^{10}$]

36 $z=\pm\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, $\pm\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$,
$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$, $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$
[$(z^4)^2+z^4+1=0$ から $z^4=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$]

37 (1) 順に $1+5i$, $2+4i$, $\frac{3}{2}+\frac{9}{2}i$
(2) 順に $-11+17i$, $14-8i$

38 (1) $3+i$ (2) $1-\frac{4}{3}i$

39 (1) 点 -2 を中心とする半径 3 の円
(2) 点 $-2+3i$ を中心とする半径 1 の円
(3) 点 $-i$ を中心とする半径 2 の円
(4) 点 3 を中心とする半径 2 の円
(5) 点 i を中心とする半径 3 の円
(6) 点 $-\frac{4}{5}+\frac{9}{5}i$ を中心とする半径 $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ の円
(7) 2 点 3，i を結ぶ線分の垂直二等分線
(8) 2 点 0，-4 を結ぶ線分の垂直二等分線
(9) 2 点 $3-i$，-1 を結ぶ線分の垂直二等分線
[(3) $|\overline{z-i}|=2$
(6) $\left(z+\frac{4-9i}{5}\right)\overline{\left(z+\frac{4-9i}{5}\right)}=\frac{72}{25}$]

40 (1) 点 i を中心とする半径 1 の円
(2) 点 2 を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円
(3) 点 $\frac{3}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円
[(2) $z=\frac{2w-4}{i}$ (3) $w=\frac{z+3i}{2}$]

41 (1) $\frac{1}{3}+2i$
(2) (ア) 2 点 $-2i$，3 を結ぶ線分の垂直二等分線
(イ) 点 $4+\frac{4}{3}i$ を中心とする半径 $\frac{10}{3}$ の円

42 2，$4i$，$4+2i$ [三角形の 3 つの頂点を表す複素数を z_1，z_2，z_3 とすると
$\frac{z_1+z_2}{2}=\alpha$, $\frac{z_2+z_3}{2}=\beta$, $\frac{z_3+z_1}{2}=\gamma$]

43 [辺 BC を実軸上にとり，M を原点とする。点 A，B，C を表す複素数をそれぞれ，α，$-b$，b (b は実数) とすると
$AB^2+AC^2=|\alpha+b|^2+|\alpha-b|^2$
$=(\alpha+b)(\overline{\alpha}+b)+(\alpha-b)(\overline{\alpha}-b)$]

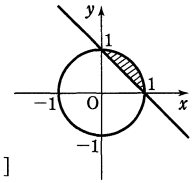
44 (1) 点 2 を通り実軸に垂直な直線
(2) 点 $3i$ を通り虚軸に垂直な直線 (3) 実軸
(4) 点 i を中心とする半径 2 の円

45 (1) 原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円
(2) 2 点 1，i を結ぶ線分の垂直二等分線
(3) 点 $\frac{11}{3}$ を中心とする半径 $\frac{4}{3}$ の円

46 原点を中心とする半径 1 の円または原点を除く実軸
[$z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}$ から $(z-\overline{z})\left(1-\frac{1}{z\overline{z}}\right)=0$]

47 点 $1+i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円。ただし，点 2 を除く [$\overline{\left(\frac{(i-1)z}{i(z-2)}\right)}=\frac{(i-1)z}{i(z-2)}$
から $\{z-(i+1)\}\overline{\{z-(i+1)\}}=2$]

48 [図] 斜線部分。ただし，境界線上の点を含む [$|z|\leqq 1$ から点 z は原点を中心とし，半径 1 の円の周上または内部にある。また，$z=x+yi$ (x，y は実数) として
$(1-i)z+(1+i)\overline{z}\geqq 2$
に代入すると $x+y\geqq 1$]



49 (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$
[(1) $\frac{7+8i-(1+2i)}{3-(1+2i)}=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$]

50 [$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{3}{2}$]

51 [$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=i$ よって $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$]

52 (1) $x=2$ (2) $x=8$
[$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{8-x+(2-x)i}{4}$]

53 [C(γ) を A(α) に移す平行移動によって，D(δ) が D′(δ') に移るとすると
$\delta'=\delta+(\alpha-\gamma)$ よって $\frac{\delta'-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$]

54 $a=-4$, 1 [r_1，r_2 を実数として
$\beta=r_1\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\alpha$ または
$\beta=r_2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\alpha$]

55 (1) $\angle A=\frac{\pi}{2}$，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，$\angle C=\frac{\pi}{6}$ の直角三角形 (2) $\angle C=\frac{\pi}{2}$，CA=CB の直角二等辺三角形 (3) 正三角形

56 (1) $\frac{5}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i$ または $-\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{7}{2}i$
(2) $-\sqrt{3}+6i$ または $7\sqrt{3}-6i$
(3) $-8+\sqrt{3}+(4\sqrt{3}-4)i$,
$-8+5\sqrt{3}+(4\sqrt{3}+4)i$ または
$8+\sqrt{3}-(4\sqrt{3}+4)i$, $8+5\sqrt{3}+(4-4\sqrt{3})i$
[(1) 他の頂点を P(γ) とすると
$\gamma=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha$
(2) 他の頂点を P(γ) とすると
$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$
(3) AB を 1 辺とする正方形を ABDC とし，C(γ)，D(δ) とすると
$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$, $\delta=\gamma+(\beta-\alpha)$]

57 [O(0)，A(α)，B(β)，D(z_1)，F(z_2)，M(z) とすると $\frac{z_1}{\alpha}=-i$, $\frac{z_2}{\beta}=i$, $z=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{\beta-\alpha}{2}i$
したがって $\frac{z}{\beta-\alpha}=\frac{1}{2}i$]

58 (1) 辺 AB を斜辺とする直角二等辺三角形
(2) 辺 OA を斜辺とする直角二等辺三角形
[(1) $(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)=0$ から $\alpha=\pm i\beta$
(2) 両辺を β^2 で割ると
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+2=0$ よって $\frac{\alpha}{\beta}=1\pm i$]

59 [$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0$ から $\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}=-\frac{\beta}{\alpha}$]

60 [異なる 3 点 α，β，γ が一直線上 $\Longrightarrow$
$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数 $\Longrightarrow$ $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}$]

61 [$\alpha+\gamma=\beta+\delta$ から $\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\beta+\delta}{2}$
2 つの対角線は中点で交わるから平行四辺形
$\delta-\alpha=i(\beta-\alpha)$ から $\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}=i$ よって AD⊥AB
また $\left|\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$ から AD=AB]

62 [AH⊥BC $\Longleftrightarrow$ $\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}$ が純虚数 $\Longleftrightarrow$
$\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}+\overline{\left(\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\right)}=0$ かつ $\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\neq 0$
そこで，右端を示す。$z=\alpha+\beta+\gamma$ から
$z-\alpha=\beta+\gamma$ また $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ から
$\overline{\beta}=\frac{1}{\beta}$, $\overline{\gamma}=\frac{1}{\gamma}$ を利用]

63 [$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{7+6i}{5}$, $\frac{z_3-z_4}{z_2-z_4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7+6i}{5}$
よって $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\div\frac{z_3-z_4}{z_2-z_4}=2$ (実数)]

64 (1) $32i$ (2) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(3) mは0以上の整数とする。$n=3m+1$ のとき $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$n=3m+2$ のとき $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$n=3m$ $(m\geqq 1)$ のとき 1

$\left[(1)\ \frac{3+i}{2-i}=1+i\quad (2)\ \frac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right.$

$\left.(3)\ \frac{\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right]$

65 (1) $\sqrt{13}+1$ (2) 4 (3) 3

[(1) 点 $A(3-2i)$ と円周上の点までの距離 (2) $|z^2+3z|=|z+3|$ から点 -3 と円周上の点までの距離 (3) $|z|=1$ から $|z^2+z+1|=\left|z+\frac{1}{z}+1\right|=|2\cos\theta+1|$]

66 mを0以上の整数とすると
$n=6m$ $(m\geqq 1)$ のとき 2,
$n=6m+1$, $6m+5$ のとき 1,
$n=6m+2$, $6m+4$ のとき -1,
$n=6m+3$ のとき -2

$\left[z+\frac{1}{z}=1\ \cdots\cdots\ ①\ から\ \bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}=1\ \cdots\cdots\ ②\right.$

①−② から $\frac{(z-\bar{z})(z\bar{z}-1)}{z\bar{z}}=0$

① から z は実数ではないから $|z|=1$

よって $z=\cos\theta+i\sin\theta$ ① から $\left.\theta=\pm\frac{\pi}{3}\right]$

67 -1 [$z_1=\cos\theta+i\sin\theta$ とすると

z_2, z_3 は $\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$ および $\cos\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$

加法定理から $z_2+z_3=-\cos\theta-i\sin\theta=-z_1$
よって $z_1+z_2+z_3=0$]

68 $H\left(9+\frac{15}{4}i\right)$, $K\left(7+\frac{33}{8}i\right)$

[$H(9+ai)$ (aは実数) とおくと $OH\perp AB$ から $\frac{14-(9+12i)}{9+ai}$ は純虚数。$K(z)$ とおくと
$OK=KA$ から $z+\bar{z}=14$ … ①
$OK=KB$ から $(9-12i)z+(9+12i)\bar{z}=225$ … ②
①，② から $\bar{z}$ を消去]

69 [$\arg\gamma=\theta$ とする。点zを原点の周りに $-\theta$ 回転した点 $z(\cos\theta-i\sin\theta)$ を実軸に関して対称移動すると $\bar{z}(\cos\theta+i\sin\theta)$ これを更に原点の周りに θ 回転すると $\bar{z}(\cos\theta+i\sin\theta)^2$ となり，これが点wである。ここで $\frac{\gamma}{|\gamma|}=\cos\theta+i\sin\theta$]

70 [4点A，B，C，Dは原点Oを中心とする半径 $|\alpha|$ の円周上にあり $\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{\gamma+\delta}{2}$
$\alpha+\beta=0$ のとき，線分AB，CDは円の直径
$\alpha+\beta\neq 0$ のとき，線分ABの中点と線分CDの中点は原点Oに関して対称な位置にある。
このとき，線分AC，BD（または線分AD，BC）は円の直径]

71 $(a,\ b)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

[$x_{n+1}+y_{n+1}=(a+bi)(x_n+y_ni)$ から
$x_n+y_ni=(a+bi)^n(x_0+y_0i)=(a+bi)^n$
$P_6=P_0$ から $(a+bi)^6=1$
$\{(a+bi)^3+1\}\{(a+bi)^3-1\}=0$
$P_3\neq P_0$ から $(a+bi)^3+1=0$
$\{(a+bi)+1\}\{(a+bi)^2-(a+bi)+1\}=0$
$P_2\neq P_0$ から $(a+bi)^2-(a+bi)+1=0$
$a+bi=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ このとき [2] を満たす]

72 $p=-\frac{1}{2}$ [ヒントから円の中心は
$\frac{\gamma+\delta}{2}=-p$，半径は $\frac{|\gamma-\delta|}{2}=\sqrt{p^2+1}$
点 $1+i$ は円周上の点であるから
$|(1+i)-(-p)|=\sqrt{p^2+1}$]

73 $a=6$, $b=-6$, $c=80$
[実数解をαとすると解と係数の関係から
$2+\alpha=-a$, $10+2\alpha=b$, $10\alpha=-c$
α, $1\pm 3i$ は同一円周上にあるから，円の中心βは実軸上にある。
よって $|\alpha-\beta|=5$, $|1\pm 3i-\beta|=5$]

74 $(a,\ b)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{3},\ 4\pm\sqrt{3}\right)$
(複号同順) [$x^2+2ax+b=0$ の2解が実数になる場合と虚数になる場合に分けて考える]