第７章

積分法

§ 7.1

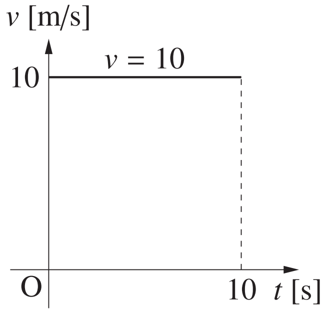
速度と変位

一定の速度のまま運動する物体の移動距離は，その物体の速度に時間をかければ求めることができる．では，速度が一定でない物体の移動距離はどのように求めればよいだろうか．ここではその方法について学んでいこう．

7.1.1　速度が一定の場合

■$v-t$ グラフの囲む面積は移動距離を表す

ある時刻（$t = 0$ とする）から 10 秒後（$t = 10$ とする）まで，一定の速度 10 [m/s]（$v = 10$ とする）で走っている人がいるとする．右図は，横軸に時間（t），縦軸に速度（v）をとり，この関係をグラフ（$v-t$ グラフという）にしたものである．



この人が，ある時刻から 10 秒の間に移動する距離は

（速度）×（時間）=（距離）

であったから

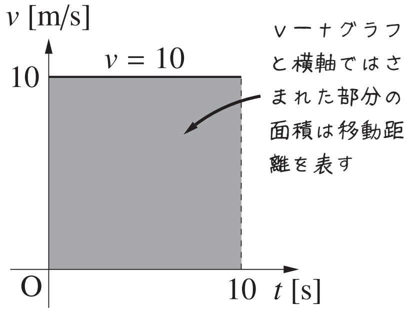
10 [m/s] × 10 [s] = 100 [m]

と計算できる．

この移動する距離 100 [m] は，右図の網掛け部分で示してあるように，$0 \leqq t \leqq 10$ で

「$v-t$ グラフと横軸ではさまれた部分の面積」

で表されることに注意しよう．



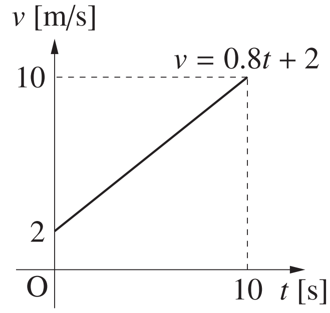
7.1.2　速度が変化する場合

■速度が変化する場合の $v-t$ グラフと移動距離

では次に，速度が時間とともに変化していく場合について考えてみよう．

たとえば，ある時刻 $(t=0)$ の速度 2 [m/s] から一定の割合で速度を上げ，10 秒後 $(t=10)$ には速度 10 [m/s] となる場合には，時刻 t と速度 v の関係は

$$v = 0.8t + 2$$



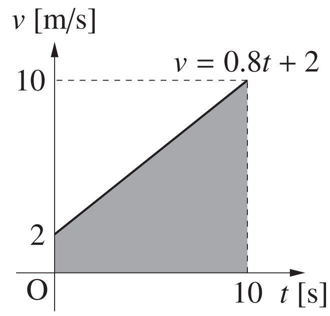
と表され，この $v-t$ グラフは右図のようになる．しかし，この場合は『速度が一定の場合』(p.299) ではないので，単純に(速度) × (時間)で移動距離を求めることはできない．

では，どのように移動距離を求めればよいのかというと，結論を先にいってしまえば，さきほどと同じように

「$v-t$ グラフと横軸ではさまれた部分の面積」

が移動距離を表す．つまり，右図の台形の面積

$$(2\ [\mathrm{m/s}] + 10\ [\mathrm{m/s}]) \times 10\ [\mathrm{s}] \times \frac{1}{2} = 60\ [\mathrm{m}]$$



が移動距離となる．

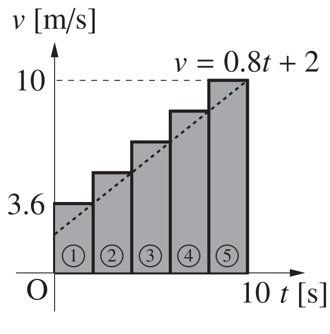
さて，それではなぜ

「$v-t$ グラフと横軸ではさまれた部分の面積」

が移動距離を表すのかについて，以下で考えていこう．

■5 分割する場合

そのためにまず，一定の割合で速度を上げる運動ではなく，段階的に速度を上げる運動を考えよう．右図は，速度 3.6 [m/s] から速度 10 [m/s] まで，2 [s] ごとに 1.6 [m/s] ずつ，段階的に速度を上げた場合の $v-t$ グラフである．



このような運動ならば，部分的に速度が一定となるので，移動距離は各部分の長方形の面積を足し合わせることにより

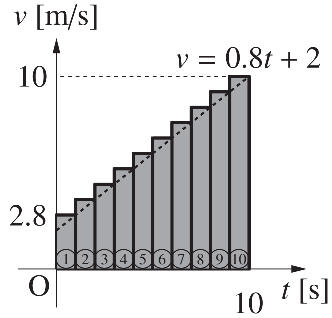
$$\underbrace{2\ [\mathrm{s}] \times 3.6\ [\mathrm{m/s}]}_{①} + \underbrace{2\ [\mathrm{s}] \times 5.2\ [\mathrm{m/s}]}_{②} + \underbrace{2\ [\mathrm{s}] \times 6.8\ [\mathrm{m/s}]}_{③}$$
$$+ \underbrace{2\ [\mathrm{s}] \times 8.4\ [\mathrm{m/s}]}_{④} + \underbrace{2\ [\mathrm{s}] \times 10\ [\mathrm{m/s}]}_{⑤} = 68\ [\mathrm{m}]$$

と計算できる．

しかし，この移動距離は本来求めたい，速度が $v = 0.8t + 2$ で表される運動の移動距離ではない．なぜなら，速度を切り上げて一定としているので，本来の運動より移動距離が大きくなってしまうからである．

■10 分割する場合

そこで，精度を上げるために，より段階を細かくした運動を考えよう．右図は，速度 2.8 [m/s] から速度 10 [m/s] まで，1 [s] ごとに 0.8 [m/s] ずつ，段階的に速度を上げた場合の $v-t$ グラフである．

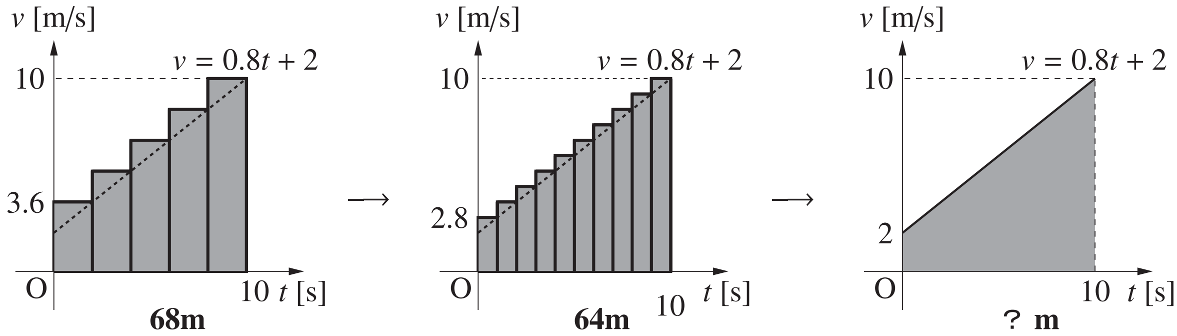


さきほどと同じように，移動距離は各部分の長方形の面積を足し合わせることにより

$$\underbrace{1\times 2.8}_{①}+\underbrace{1\times 3.6}_{②}+\underbrace{1\times 4.4}_{③}+\underbrace{1\times 5.2}_{④}+\underbrace{1\times 6}_{⑤}$$
$$+\underbrace{1\times 6.8}_{⑥}+\underbrace{1\times 7.6}_{⑦}+\underbrace{1\times 8.4}_{⑧}+\underbrace{1\times 9.2}_{⑨}+\underbrace{1\times 10}_{⑩}= 64[\mathrm{m}]$$

とわかる．

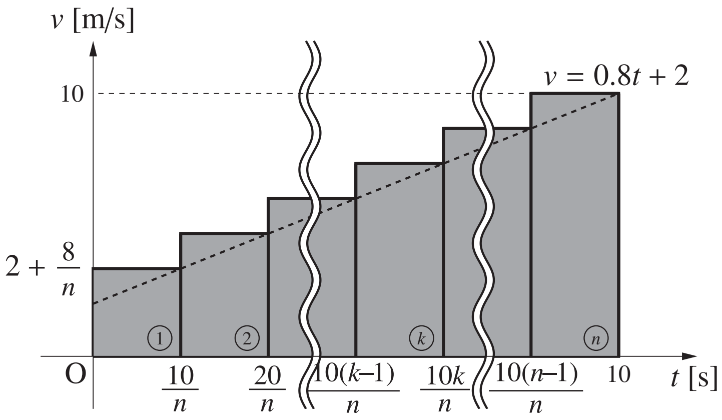
この値も本来求めたい移動距離とは異なるのだが，段階を細かくすることにより，より本来の運動に近づいたと考えられる（下図も参照）．



このように，段階を細かくすることによってより正しい値に近づくのであれば，もっと上手工夫して計算したい．それを次に考えてみよう．

■n 分割する場合の極限

$v = 0.8t + 2$ から，速度は 1[s] ごとに 0.8[m/s] ずつ増加するのがわかる．まず，下図のように，時刻 0 [s] から 10 [s] までを位置を n 等分する．そして，一区間である $\dfrac{10}{n}$ [s] ごとに，$0.8\times\dfrac{10}{n} = \dfrac{8}{n}$ [m/s] ずつ段階的に速度を上げる $v-t$ グラフを考える．



このとき，移動距離は各長方形の面積を足し合わせることにより

$$\underbrace{\frac{10}{n}\times\left(2+\frac{8}{n}\right)}_{\textcircled{1}}+\underbrace{\frac{10}{n}\times\left(2+2\cdot\frac{8}{n}\right)}_{\textcircled{2}}+\underbrace{\frac{10}{n}\times\left(2+3\cdot\frac{8}{n}\right)}_{\textcircled{3}}+\cdots$$

$$\cdots+\underbrace{\frac{10}{n}\times\left(2+k\cdot\frac{8}{n}\right)}_{\textcircled{k}}+\cdots+\underbrace{\frac{10}{n}\times\left(2+n\cdot\frac{8}{n}\right)}_{\textcircled{n}}$$

これを $\sum$ 記号で表すと[*1]，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{10}{n}\times\left(2+k\cdot\frac{8}{n}\right)\right\}$ となる．以下，これを計算すると

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{10}{n}\times\left(2+k\cdot\frac{8}{n}\right)\right\} &= \frac{10}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+k\cdot\frac{8}{n}\right)\\
&= \frac{10}{n}\sum_{k=1}^{n}2+\frac{80}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\\
&= \frac{10}{n}\cdot 2n+\frac{80}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \qquad \leftarrow \textstyle\sum \text{ の公式を使った}\\
&= 20+\frac{40(n+1)}{n}
\end{aligned}$$

となる．この式の n に 5 や 10 を代入すれば，さきほど求めた 68 [m] や 64 [m] になる．

さて，段階をどんどん細かくしていくということは，「n 等分」である n の値をどんどん大きくしていくということに他ならない．つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{20+\frac{40(n+1)}{n}\right\}$ という極限値が求めるべき値である．これを計算すると

$$\lim_{n\to\infty}\left\{20+\frac{40(n+1)}{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{20+40\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}=60\ [\mathrm{m}]$$

となる．この値は，p.300 で台形の面積として求めた移動距離と一致していることを確認しよう．

[*1] $\sum$ 記号と，その計算方法については FTEXT数学 B『数列』を参照のこと．$\sum$ 記号を未修の場合には計算過程は理解できなくてよいので，移動距離は $v-t$ グラフで囲まれる面積で表される，という結論だけ抑えておこう．

§ 7.2
定積分

前の節では，ある区間でのグラフを n 等分して長方形でをつくり足し合わせ，その極限として全体の面積を考える操作を考えた．この操作は区分求積とよばれる．ここでは一般の関数での区分求積を考えていこう．

7.2.1 定積分の定義

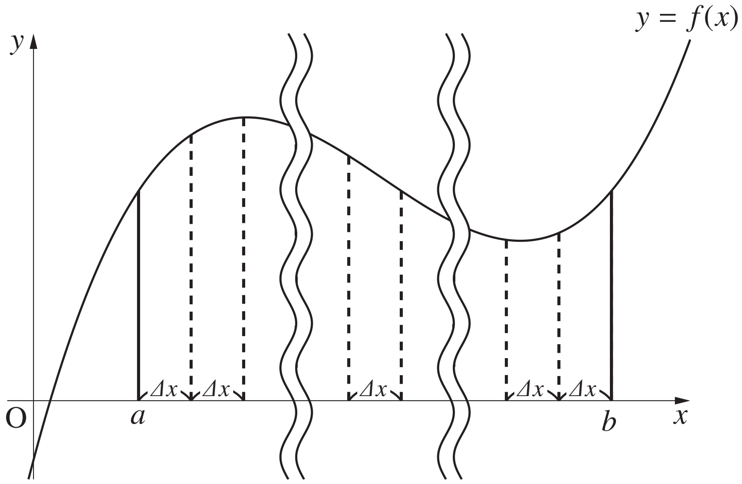
■定積分の定義

関数 $y = f(x)$ において，$f(x)$ の a から b までの定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を次のように定義する．

STEP1：**区間を n 等分する**

下図のように，$y = f(x)$ の区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分し，細かい区間に分ける．

このとき細かい区間の幅 $\varDelta x$ は，a から b までの長さ $b - a$ を n 等分したものなので，$\varDelta x = \dfrac{b-a}{n}$ となる．



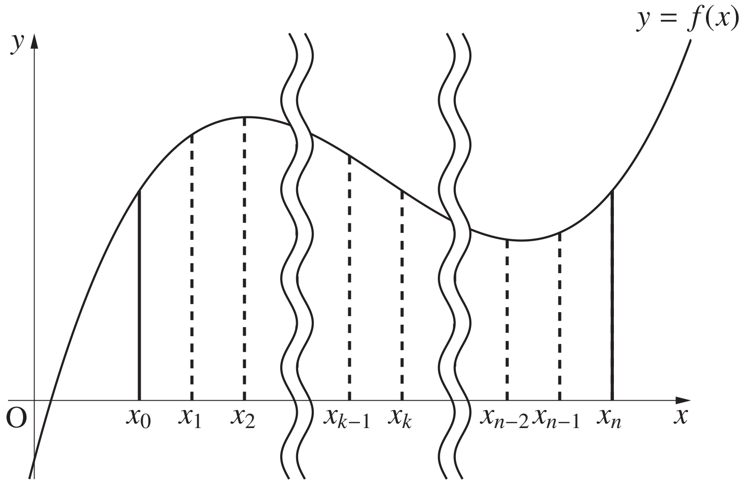
STEP2：**区間の境界の座標を求める**

まず，$a = x_0$ とおき，左から順に各区間の境界の x 座標を x_1，x_2，$\cdots$ とおいていく．

このようにおくと，$x_0 = a$，$x_1 = a + \varDelta x$，$x_2 = a + 2\varDelta x$，$\cdots$ となるので，境界 x_k の値は

$$x_k = a + k\varDelta x$$

となる．

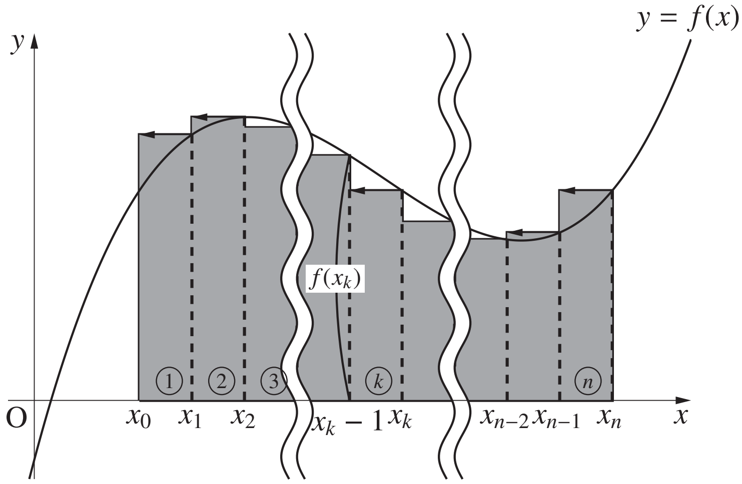


STEP3：境界ごとに長方形を作りその面積を足し合わせる

各区間の右側の境界から左側の境界に向かって，下図のように x 軸に平行な線分を書き，全部で n 個の長方形を作る．左から k 番目の長方形の面積は，幅が $\varDelta x$，高さが $f(x_k)$ なので，$f(x_k)\varDelta x$ であるから，すべての長方形の面積は

$$f(x_1)\varDelta x + f(x_2)\varDelta x + f(x_3)\varDelta x + \cdots + f(x_n)\varDelta x$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$$

と表される．



STEP4：極限をとる

最後に **STPE3** で得られた長方形の面積の総和 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$ に対して極限 $\lim\limits_{n\to\infty}$ をとり，この値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書く．つまり

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$$

と定義する．

定積分の定義

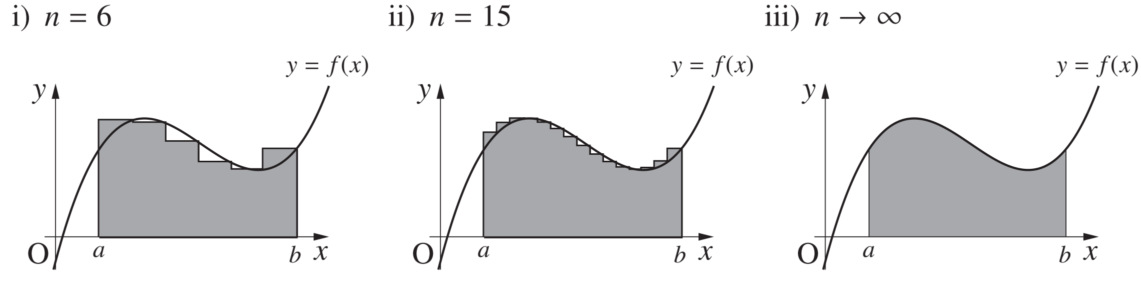
関数 $f(x)$ に関して，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$$

と定義する[*2]．ただし，$x_k = a + k\varDelta x$，$\varDelta x = \dfrac{b-a}{n}$ である．

この式は丸暗記するようなものではない．p.303 からSTEP を追って学んできたことを考え，少々時間がかかっても意味を考え自力で導き出せるようになるのが大切である．

分割を細かくしていくことによって，長方形の様子は下図のように変化していく．だんだんと曲線で囲まれた部分の面積を表すようになるのがわかるだろう．



■定積分の表記に関する注意

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の中の文字 x が「x」であることに意味は無く，使う文字は何でもよい．すなわち

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(\square)\,d\square$$

であり，$\square$ には同じ文字ならどんな文字を入れてもよい．

特に積分区間の端に x を含む場合，混乱をさけるため文字 t などを使うことが多い．つまり

$$\int_a^x f(x)\,dx \quad \text{ではなく} \quad \int_a^x f(t)\,dt$$

とする．

7.2.2 定積分の性質

■定積分の性質

定積分に関して次のような式が成り立つ．

*2 より厳密な定義については FTEXT 数学 III で学ぶ．

定積分の性質

i) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

iii) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

iv) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) + tg(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + t\int_a^b g(x)\,dx$　ただし，t は定数とする.

【証明】

i) 定義に戻って考えると

$$\begin{aligned}\int_a^a f(x) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x & &\leftarrow\text{『定積分の定義』(p.305)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\times 0 & &\leftarrow \varDelta x = \frac{a-a}{n} = 0\\ &= 0\end{aligned}$$

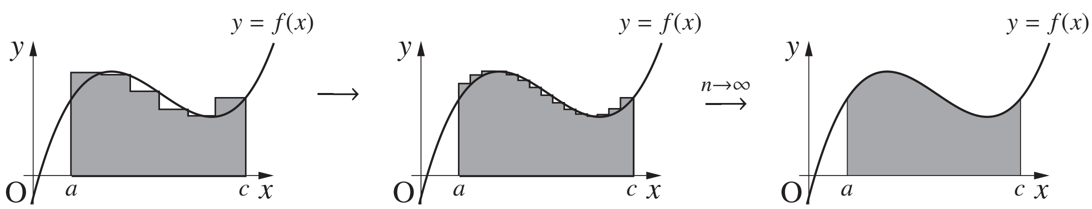
■

ii) 定義に戻って考えると

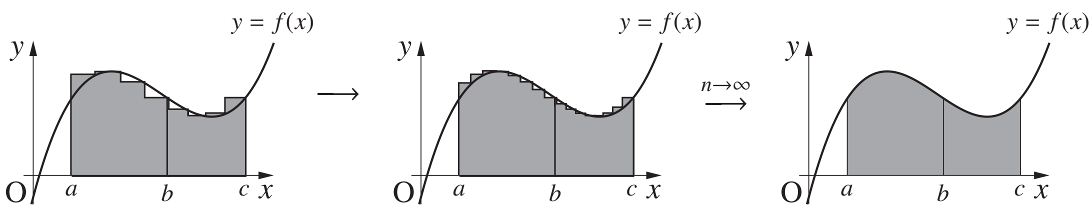
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x & &\leftarrow\text{『定積分の定義』(p.305)}\\ &= -\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(-\varDelta x) & &\leftarrow -\varDelta x = -\frac{b-a}{n} = \frac{a-b}{n}\\ &= -\int_b^a f(x)\,dx\end{aligned}$$

■

iii) 左辺は



右辺は



であり等しい面積を表していると考えられる[*3].

■

[*3] 厳密な証明は FTEXT数学 III で学ぶ.

iv) 定義に戻って考えると

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \{f(x)+tg(x)\}\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)+tg(x_k)\}\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x + t\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Delta x\right\} && \leftarrow \textstyle\sum \text{ の性質} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x + t\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Delta x && \leftarrow『極限の計算法則』(\text{p.255}) \\
&= \int_a^b f(x)\,dx + t\int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}
$$

■

7.2.3　定積分と面積の関係

■定積分と面積の関係

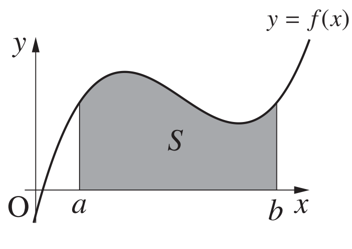
今まで見てきたように，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値は，基本的には

$a \leqq x \leqq b$ において $y=f(x)$ のグラフと x 軸の囲む面積

を表すのだが，$a \leqq x \leqq b$ において $f(x)$ の値が負の値をとるときには，この表現は正しいとはいえない．以下ではこの点についてまとめておこう．

i) **$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき（基本形）**

右図のように $a \leqq x \leqq b$ で $y=f(x)$ と x 軸の囲む面積を S とすると

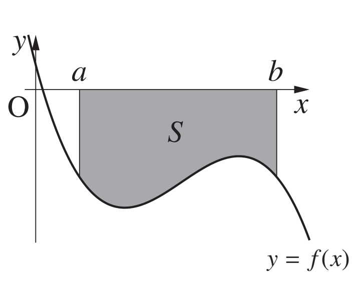


$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

である．

ii) **$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq 0$ のとき**

右図のように $a \leqq x \leqq b$ で $y=f(x)$ と x 軸の囲む面積を S とする．$f(x) \leqq 0$ なので，n 等分したときの長方形の面積を 0 以上にするため，$-f(x)$ を高さとして計算していく．

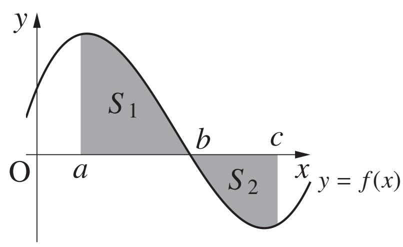


$$
\begin{aligned}
S &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{-f(x_k)\}\Delta x = -\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \\
&= -\int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

である．$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は S ではなく $-S$，いわば「負の面積」を表すといえる．

iii) **$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$，$b \leqq x \leqq c$ で $f(x) \leqq 0$ のとき**

右図のように $a \leqq x \leqq b$ で $y=f(x)$ と x 軸の囲む面積を S_1，$b \leqq x \leqq c$ で $y=f(x)$ と x 軸の囲む面積を S_2 とすると，それぞれの面積は積分区間を分割して考えることにより



$$S_1+S_2=\int_a^b f(x)\,dx+\left(-\int_b^c f(x)\,dx\right)$$

である．

特に，iii) において

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=S_1-S_2$$

であることに注意しよう．

【例題：定義を利用した定積分の計算】

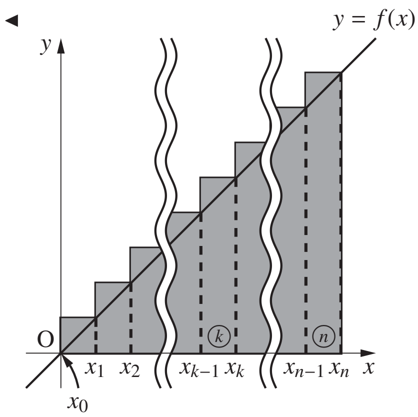
次の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$

【解答】(1) $f(x)=x$ とおき，積分区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 等分して幅 $\varDelta x=\dfrac{1}{n}$ の区間に分け，各区間の境界の x 座標をを左から x_0，x_1，$\cdots$，x_n とおく．座標 x_k は，$x_k=k\cdot\dfrac{1}{n}$ となるので

◀



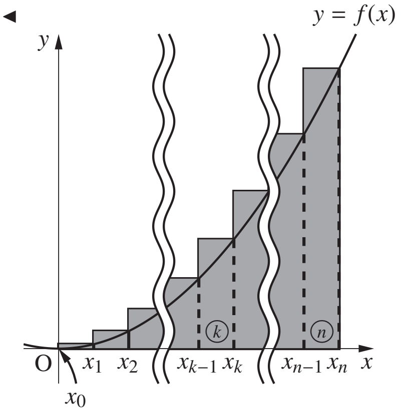
$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x\\
&=\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot\frac{1}{n}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\\
&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\\
&=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&\to \mathbf{\frac{1}{2}}\quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ を使った

◀ 極限をとりやすくするため，このように変形しておく

◀ $\dfrac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$ を使った

(2) $f(x) = x^2$ とおき，積分区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 等分して幅 $\mathit{\Delta} x = \dfrac{1}{n}$ の区間に分け，各区間の境界の x 座標をを左から x_0，x_1，$\cdots$，x_n とおく．座標 x_k は，$x_k = k\cdot\dfrac{1}{n}$ となるので



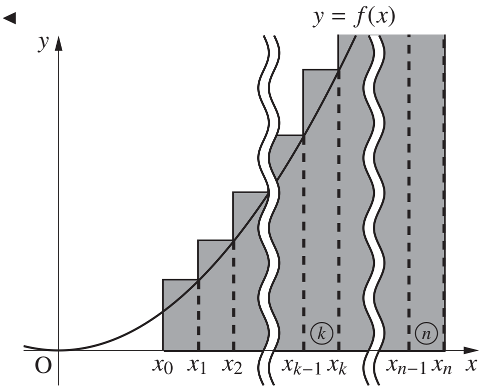
$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\mathit{\Delta} x \\
&= \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\
&\to \mathbf{\frac{1}{3}} \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を使った

◀ 極限をとりやすくするため，このように変形しておく

◀ $\dfrac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty)$ を使った

(3) $f(x) = x^2$ とおき，積分区間 $1 \leqq x \leqq 2$ を n 等分して幅 $\mathit{\Delta} x = \dfrac{1}{n}$ の区間に分け，各区間の境界の x 座標をを左から x_0，x_1，$\cdots$，x_n とおく．座標 x_k は，$x_k = 1 + k\cdot\dfrac{1}{n}$ となるので



$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\mathit{\Delta} x \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(1+k\cdot\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{n}\cdot n + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 1 + \left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\
&\to 1 + 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 \quad (n \to \infty) \\
&= \mathbf{\frac{7}{3}}
\end{aligned}$$

◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を使った

◀ 極限をとりやすくするため，このように変形しておく

◀ $\dfrac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty)$ を使った

【別解：(2) を利用する方法】

$\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \int_0^2 x^2\,dx - \overbrace{\int_0^1 x^2\,dx}^{(2)\text{ の結果}}$ の利用を考える．

$f(x) = x^2$ とおき，積分区間 $0 \leqq x \leqq 2$ を n 等分して幅 $\Delta x = \dfrac{2}{n}$ の区間に分け，各区間の境界の x 座標をを左から x_0，x_1，$\cdots$，x_n とおく．座標 x_k は，$x_k = k\cdot\dfrac{2}{n}$ となるので

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \\
&= \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \cdot \frac{2}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{n^2} \cdot \frac{2}{n} \\
&= \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\
&\to \frac{8}{3} \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を使った

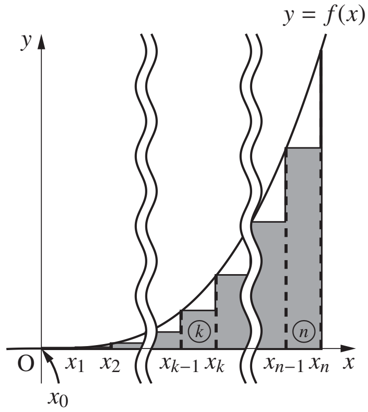
◀ 極限をとりやすくするため，このように変形しておく

◀ $\dfrac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty)$ を使った

よって，$\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{7}{3}}$.

(4) $f(x) = x^3$ とおき，積分区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 等分して幅 $\Delta x = \dfrac{1}{n}$ の区間に分け，各区間の境界の x 座標をを左から x_0，x_1，$\cdots$，x_n とおく．座標 x_k は，$x_k = k\cdot\dfrac{1}{n}$ となるので

◀



$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \\
&= \sum_{k=1}^{n} {x_k}^3 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^3} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&= \frac{1}{n^4} \cdot \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \\
&\to \boldsymbol{\frac{1}{4}} \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ を使った

◀ 極限をとりやすくするため，このように変形しておく

◀ $\dfrac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty)$ を使った

§ 7.3

微積分学の基本定理

前の章で学んだ『微分法』(p.249) と，この章で学んでいる『積分法』には，実は密接な関係がある．この関係を利用すると，定積分の計算が驚くほど楽に実行できるようになる．ここでは，その関係について学んでいこう．

7.3.1　微積分学の基本定理

■微積分学の基本定理

簡単のため以下では

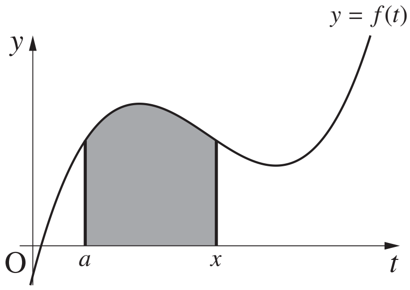
i) $f(t) \geqq 0$　　ii) $a \leqq x$　　iii) $h > 0$

として考えていくことにする．

STEP1：$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ **を x の関数 $S(x)$ と考える**

まず，定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ について考える．

この値は, 右図のように $a \leqq t \leqq x$ の区間で $y = f(t)$ と t 軸が囲む面積を表すので，a を定数，x を変数と考えると，この値は x の関数となっている（x が決まれば面積が決まる）．



そこで

$$\int_a^x f(t)\,dt = S(x)$$

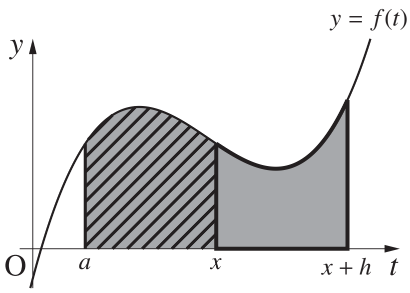
と表すことにする．

STEP2：$S(x+h) - S(x)$ **の図形的意味を考える**

このような $S(x)$ を導入すると

$$S(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \text{（右図の網掛け部の面積）}$$

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dx = \text{（右図の斜線部の面積）}$$



であるから，その差は

$$S(x+h) - S(x) = \text{（太線で囲まれた部分の面積）}$$

となる．

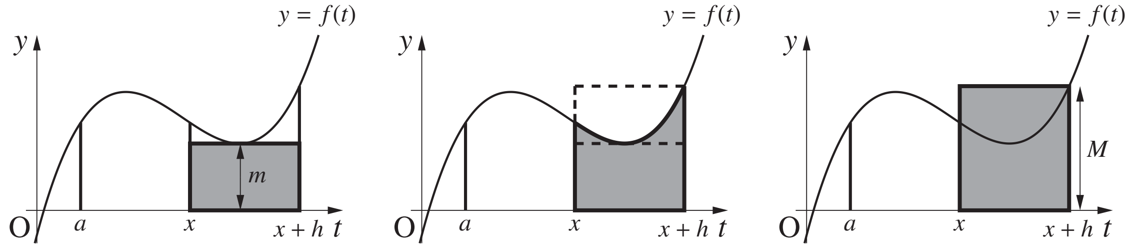
STEP3：面積で評価する

ここで，下図のように $x \leqq t \leqq x+h$ における $f(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると（x を定数とみれば，m や M は h の関数である），面積を比較することにより

$$m \times h \leqq S(x+h) - S(x) \leqq M \times h \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ（下の図参照）．

(1) $m \times h$ の図　　(2) $S(x+h) - S(x)$ の図　　(3) $M \times h$ の図



STEP4：$h \to 0$ の極限を考える

①の辺々を h で割ると

$$m \leqq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leqq M \quad \cdots\cdots ②$$

ここで $h \to 0$ という極限を考えると，区間 $x \leqq t \leqq x+h$ の幅はどんどん狭くなっていき

最小値 $m \to f(x)$

最大値 $M \to f(x)$

となるので，はさまれた $\dfrac{S(x+h) - S(x)}{h}$ も $\dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} \to f(x)$ となる[*4]．つまり

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x) \quad \cdots\cdots ③$$

となる．

いま，③の左辺は関数 $S(x)$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}S(x)$ の定義式そのものであるので，③は $\dfrac{d}{dx}S(x) = f(x)$，つまり

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

を表している．

微積分学の基本定理

関数 $f(x)$ において

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

が成り立つ．ただし，a は定数とする．

[*4] はさみうちの定理 (squeeze theorem) という．詳しくは FTEXT数学 III で学ぶ．

7.3.2　定積分の基本公式

■原始関数とは何か

原始関数

微分するとf(x) になる関数を，$f(x)$ の**原始関数** (primitive function) という．つまり

$$F'(x) = f(x)$$

のとき，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という．

原始関数　　もとの関数

$$F(x) \xrightarrow{\text{微分}} f(x)$$

原始関数は一通りには定まらない．たとえば，x^3，x^3+2，$x^3-\sqrt{5}$ などは微分すると，どれも $3x^2$ となるので，これらはすべて $3x^2$ の原始関数である．任意の定数 A を x で微分すると 0 になるので，一般には x^3+A で表されるものすべてが $3x^2$ の原始関数となる．

これから，次のことがいえる．

原始関数どうしの差は定数

$f(x)$ の原始関数 $F_1(x)$，$F_2(x)$ があったとき，各々の原始関数は定数項が違うだけなので

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

となるある定数 C が存在する．

また，原始関数について次のことがいえる．

原始関数の性質

関数 $f(x)$，$g(x)$ の原始関数をそれぞれ $F(x)$，$G(x)$ とする，つまり $F'(x) = f(x)$，$G'(x) = g(x)$ とすると

i) $F(x)+G(x)$ は関数 $f(x)+g(x)$ の原始関数である．
ii) $kF(x)$ は関数 $kf(x)$ の原始関数である．

が成り立つ．

【証明】

(1) $F(x)+G(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}\{F(x)+G(x)\}' &= F'(x)+G'(x) && \leftarrow\text{『微分の計算法則 i)』(p.264)}\\ &= f(x)+g(x) && \leftarrow F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x)\end{aligned}$$

となり，$F(x)+G(x)$ は確かに $f(x)+g(x)$ の原始関数である．■

(2) $kF(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}\{kF(x)\}' &= kF'(x) && \leftarrow\text{『微分の計算法則 ii)』(p.264)}\\ &= kf(x) && \leftarrow F'(x)=f(x)\end{aligned}$$

となり，$kF(x)$ は確かに $kf(x)$ の原始関数である． ■

特に，多項式の関数の原始関数については次のようになる．

多項式の関数の原始関数

任意の定数を A として

i) x^n の原始関数は $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+A$

ii) $(ax+b)^n$ の原始関数は $\dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+A$

である．

ii) の式は，$\underbrace{\dfrac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}}_{\text{i) と似ている部分}}\times\dfrac{1}{a}$ と覚えよう．

【証明】

i) $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+A$ を x で微分すると

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}+A\right)'=\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)x^n=x^n$$

となるので，確かに x^n の原始関数である． ■

ii) $\dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+A$ を x で微分すると（← 『微分の計算法則 iv)』(p.264) 参照）

$$\left(\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+A\right)'=\frac{1}{a(n+1)}\cdot a(n+1)(ax+b)^n=(ax+b)^n$$

となるので，確かに $(ax+b)^n$ の原始関数である． ■

【例題：原始関数を求める】

次の関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ．ただし，任意の定数を表すときには C とせよ．

(1) $f(x)=x^3$　(2) $f(x)=3x^4$

(3) $f(x)=3x^2+5x+2$　(4) $f(x)=2x^5-3x^2+6x-2$

(5) $f(x)=(x-1)(x+3)$　(6) $f(x)=x^2(1-x)$

(7) $f(x)=(x-3)^4$　(8) $f(x)=(3x-2)^4$

【解答】

(1)
$$F(x)=\boldsymbol{\frac{1}{4}x^4+C}$$

◀『多項式の関数の原始関数 i)』

(2)
$$F(x)=3\cdot\frac{1}{5}x^5+C=\boldsymbol{\frac{3}{5}x^5+C}$$

◀『原始関数の性質 ii)』，『多項式の関数の原始関数 i)』

(3)
$$F(x)=3\cdot\frac{1}{3}x^3+5\cdot\frac{1}{2}x^2+2\cdot x+C$$

◀『原始関数の性質 i)ii)』，『多項式の関数の原始関数 i)』

$$= \boldsymbol{x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + C}$$

(4)
$$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{6}x^6 - 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 6 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 2 \cdot x + C$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^6 - x^3 + 3x^2 - 2x + C}$$

◀『原始関数の性質 i)ii)』,『多項式の関数の原始関数 i)』

(5) $f(x) = (x-1)(x+3)$ を展開すると

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

なので

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 3 \cdot x + C$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C}$$

◀『原始関数の性質 i)ii)』,『多項式の関数の原始関数 i)』

(6) $f(x) = x^2(1-x)$ を展開すると

$$f(x) = x^2 - x^3$$

なので

$$F(x) = \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + C}$$

◀『原始関数の性質 i)ii)』,『多項式の関数の原始関数 i)』

(7)
$$F(x) = \frac{1}{5}(x-3)^5 \times \frac{1}{1} + C$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{5}(x-3)^5 + C}$$

◀『多項式の関数の原始関数 ii)』

(8)
$$F(x) = \frac{1}{5}(3x-2)^5 \times \frac{1}{3} + C$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{15}(3x-2)^5 + C}$$

◀『多項式の関数の原始関数 ii)』

■定積分の基本公式

さて，$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ を x の関数と考えて

$$\int_a^x f(t)\,dt = F_1(x)$$

とおくと,『定積分の性質 iii)』(p.306) より $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$ なので

$$\int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt = F_1(c) - F_1(b) \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ.

また，『微積分学の基本定理』(p.312) より

$$\frac{d}{dx}F_1(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

が成り立つので，$F_1(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．

ここで，『原始関数どうしの差は定数』(p.313) であるから，$f(x)$ の原始関数のうち，ある 1 つを $F(x)$ とすると

$$F_1(x) = F(x) + C$$

となる定数 C が存在するので，①の $F_1(c) - F_1(b)$ について

$$F_1(c) - F_1(b) = (F(c) + C) - (F(b) + C) = F(c) - F(b)$$

が成り立つ．つまり

定積分の基本公式

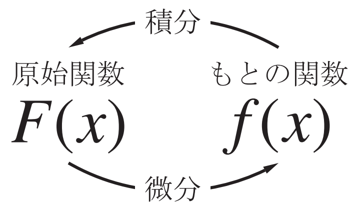
$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると

$$\int_b^c f(t)\,dt = \Big[F(x)\Big]_b^c$$

が成り立つ．ただし，$\Big[F(x)\Big]_b^c$ とは $F(c) - F(b)$ のことである．

この公式は次のことを教えてくれる．つまり定積分 $\displaystyle\int_b^c f(t)\,dt$ を見たら，「長方形に分割し，面積の総和を求め，極限をとる」といった一連の手続きを踏むのではなく，「微分したら $f(x)$ になる原始関数 $F(x)$ を探し，$F(c) - F(b)$ を計算すればよい」ということである．

いいかえるならば，定積分 $\displaystyle\int_b^c f(t)\,dt$ を計算するには，$f(t)$ の原始関数を探せばよい，すなわち微分と逆の操作（積分）をすればよいということである．このことをイメージで表すと，右の図のようになる．



では，実際どれほど楽に定積分の計算ができるようになるのか，p.308 の例題を再び取り上げ確認してみよう．

【例題：原始関数を利用した定積分の計算〜その 1 〜（再掲）】

次の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$

【解答】

(1)
$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2$$
$$= \mathbf{\frac{1}{2}}$$

◀『定積分の基本公式』

(2)
$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3$$
$$= \mathbf{\frac{1}{3}}$$

◀『定積分の基本公式』

(3)
$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3$$
$$= \frac{8-1}{3}$$
$$= \mathbf{\frac{7}{3}}$$

◀『定積分の基本公式』

(4)
$$\int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{1}{4}\cdot 0^4$$
$$= \mathbf{\frac{1}{4}}$$

◀『定積分の基本公式』

【例題：原始関数を利用した定積分の計算～その２～】

次の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^3-2x+1)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1(4x^3+3x^2-5x-3)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 x^2(x-3)\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(x+1)(x-3)\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx-\int_2^1(x^2+1)\,dx$　　(6) $\displaystyle\int_1^2(x^2-2x+1)\,dx+\int_{-2}^{1}(x^2-2x+1)\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1(x+1)^3\,dx$　　(8) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2x-1)^4\,dx$

【解答】

(1)
$$\int_{-1}^{2}(x^3-2x+1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x\right]_{-1}^{2}$$
$$= (4-4+2) - \left(\frac{1}{4}-1-1\right)$$

◀『定積分の基本公式』

$$= \mathbf{\frac{15}{4}}$$

(2)
$$\int_0^1 (4x^3 + 3x^2 - 5x - 3)\,dx$$
$$= \left[x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x\right]_0^1$$
◀『定積分の基本公式』
$$= \left(1 + 1 - \frac{5}{2} - 3\right) - 0 = \mathbf{-\frac{7}{2}}$$

(3)
$$\int_1^2 x^2(x-3)\,dx = \int_1^2 (x^3 - 3x^2)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3\right]_1^2$$
◀『定積分の基本公式』
$$= (4-8) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)$$
$$= \mathbf{-\frac{13}{4}}$$

(4)
$$\int_{-2}^1 (x+1)(x-3)\,dx = \int_{-2}^1 (x^2 - 2x - 3)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-2}^1$$
◀『定積分の基本公式』
$$= \left(\frac{1}{3} - 1 - 3\right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 + 6\right)$$
$$= \mathbf{-3}$$

(5)
$$\int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx - \int_2^1 (x^2+1)\,dx$$
$$= \int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx + \int_1^2 (x^2+1)\,dx$$
◀ [『定積分の性質 ii)』(p.306)
$$= \int_{-1}^2 (x^2+1)\,dx$$
◀『定積分の性質 iii)』(p.306)
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^2$$
◀『定積分の基本公式』
$$= \left(\frac{3}{8} + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right)$$
$$= \mathbf{6}$$

(6)
$$\int_1^2 (x^3 - 2x + 1)\,dx + \int_{-2}^1 (x^3 - 2x + 1)\,dx$$
$$= \int_{-2}^1 (x^3 - 2x + 1)\,dx + \int_1^2 (x^3 - 2x + 1)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (x^2 - 2x + 1)\, dx$$

◀『定積分の性質 iii)』(p.306)

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_{-2}^{2}$$

◀『定積分の基本公式』

$$= \left(\frac{8}{3} - 4 + 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 - 2 \right)$$

$$= \mathbf{\frac{16}{3}}$$

(7)

$$\int_0^1 (x+1)^3\, dx = \left[\frac{1}{4}(x+1)^4 \right]_0^1 = 4 - \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{15}{4}}$$

◀『定積分の基本公式』

(8)

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2x-1)^4\, dx = \left[\frac{1}{5}(2x-1)^5 \times \frac{1}{2} \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = 0 - \left(-\frac{243}{10} \right) = \mathbf{\frac{243}{10}}$$

◀ 定積分の基本公式

【例題：定積分で表された関数】

関数 $f(x) = \int_{-1}^{x} (t^2 - t - 2)\, dt$ の極大値，極小値を求めよ．

【解答】

$f'(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ であるから，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

◀『微積分学の基本定理』(p.312) を使った

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

これより，$f(x)$ は $x = -1$ のとき極大，$x = 2$ のとき極小となるのがわかる．

$$f(x) = \int_{-1}^{x} (t^2 - t - 2)\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t \right]_{-1}^{x}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{7}{6}$$

であるから，**極大値** $f(-1) = \mathbf{0}$，**極小値** $f(2) = \mathbf{-\frac{9}{2}}$．

§ 7.4 工夫のできる積分計算

これまでにみてきたように，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を計算するには，定積分の基本公式によれば，まず関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求め，次に $\Big[F(x)\Big]_a^b$，すなわち $F(b) - F(a)$ を計算すればよかった．しかし，積分区間の端点 a や b の値が分数やルートを含み汚かったり，原始関数 $F(x)$ の式の形が複雑な場合には，その計算も楽ではない．ここでは，定積分の計算を楽に行うための知識を学んでいく．

7.4.1　対称な区間での定積分

■偶関数と奇関数

$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ のように，積分区間が対称な場合，関数の種類によっては積分計算が簡単になる場合がある．以下ではその点について見ていこう．まずは，これからの話を簡潔に説明するために，次の概念を導入する．

偶関数・奇関数

関数 $f(x)$ において

i) $f(-x) = f(x)$ を満たすものを**偶関数**

ii) $f(-x) = -f(x)$ を満たすものを**奇関数**

という．

たとえば，$f(x) = x^2 + 1$ とすると

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$$

となるので，関数 $f(x)$ は偶関数である．また，$g(x) = x^3$ とすると

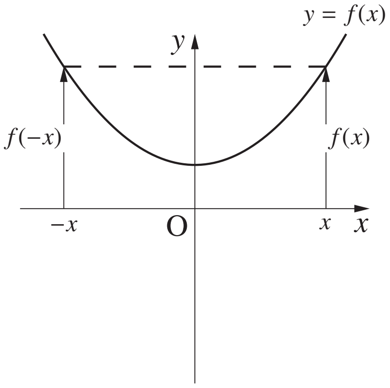
$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$$

となるので，関数 $g(x)$ は奇関数である．しかし，$h(x) = x^3 + x^2$ は偶関数でも奇関数でもない．

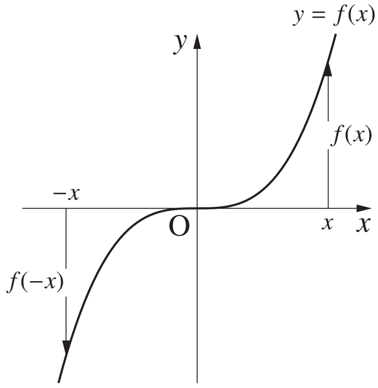
■偶関数と奇関数のグラフの特徴

偶関数，奇関数のグラフには，次の特徴がある．

i) 偶関数のグラフは y 軸対称になる



ii) 奇関数のグラフは原点対称になる



■**対称な区間での定積分**

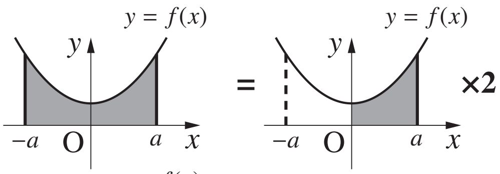
以上のことから，偶関数と奇関数において，$-a \leqq x \leqq a$ のように原点 $x=0$ から左右対称な区間での定積分について次のことがいえる．

対称な区間での定積分

対称な区間での定積分 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ について

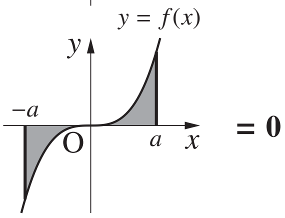
i) $f(x)$ が偶関数のとき

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



ii) $f(x)$ が奇関数のとき

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



が成立する．

【例題：対称な区間での定積分】

次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^3 - 2x^2)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^5 + 3x^4 + 2x - 1)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2 - x + 1)^2\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-3}^{3} (x^5 - 4x^3 + 3x^2 - x + 1)\,dx$

【解答】

(1)

$$\int_{-2}^{2} (x^3 - 2x^2)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} x^3\,dx - 2\int_{-2}^{2} x^2\,dx$$

◀ 偶関数と奇関数に分けた

$$= -4\int_{0}^{2} x^2\,dx = -4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

◀ 『対称な区間での定積分』

$$= -\frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3}}$$

(2)
$$\int_{-1}^{1} (x^5 + 3x^4 + 2x - 1)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (x^5 + 2x)\,dx + \int_{-1}^{1} (3x^4 - 1)\,dx$$
◀ 偶関数と奇関数に分けた
$$= 2\int_{0}^{1} (3x^4 - 1)\,dx = 2\left[\frac{3}{5}x^5 - x\right]_0^1$$
◀『対称な区間での定積分』
$$= -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$$

(3)
$$\int_{-2}^{2} (x^2 - x + 1)^2\,dx$$
$$= \int_{-2}^{2} (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1)\,dx$$
$$= \int_{-2}^{2} (-2x^3 - 2x)\,dx + \int_{-2}^{2} (x^4 + 3x^2 + 1)\,dx$$
◀ 偶関数と奇関数に分けた
$$= 2\int_{0}^{2} (x^4 + 3x^2 + 1)\,dx = 2\left[\frac{x^5}{5} + x^3 + x\right]_0^2$$
◀『対称な区間での定積分』
$$= \frac{\mathbf{164}}{\mathbf{5}}$$

(4)
$$\int_{-3}^{3} (x^5 - 4x^3 + 3x^2 - x + 1)\,dx$$
$$= \int_{-3}^{3} (x^5 - 4x^3 - x)\,dx + \int_{-3}^{3} (3x^2 + 1)\,dx$$
◀ 偶関数と奇関数に分けた
$$= 2\int_{0}^{3} (3x^2 + 1)\,dx = 2\left[x^3 + x\right]_0^3$$
◀『対称な区間での定積分』
$$= \mathbf{60}$$

7.4.2　方程式の解を区間の端点とする積分

■方程式の解を区間の端点とする積分

グラフで囲まれた面積を積分で求めるようなとき，方程式 $f(x) = 0$ の解を α，β とすると，$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ という計算をすることが多い．

以下の例題を通じて，この定積分の結果を公式として覚えよう．

【例題：方程式の解を区間の端点とする積分〜その１〜】

以下の問に答えよ.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$ を計算せよ.

(2) 2 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

とおく．このとき，方程式 $f(x) = 0$ の 2 解を α，β とすると，$f(x)$ は

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解されることを示せ.

(3) 2 次関数 $f(x)$ を $f(x) = 3x^2 - 6x - 3$ とする.
方程式 $f(x) = 0$ の解を α，β $(\alpha < \beta)$ とするとき，定積分

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

の値を求めよ.

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)\,dx\\
&= \int_\alpha^\beta \left\{(x-\alpha)^2 + (\alpha-\beta)(x-\alpha)\right\}dx\\
&= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + \frac{\alpha-\beta}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta\\
&= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 + \frac{\alpha-\beta}{2}(\beta-\alpha)^2 - 0\\
&= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}
\end{aligned}$$

◀ 展開してから普通に積分してもよいが，計算が大変になるので，ここでは工夫して計算してみる

◀ $x-\alpha$ の塊を作った

◀ 塊を崩さないように展開した

◀『多項式の関数の原始関数』(314) を使った

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の 2 解が α，β であるから，因数定理より $f(x)$ は $(x-\alpha)(x-\beta)$ を因数にもつ.
x^2 の係数を考え，$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ が成り立つ. ■

◀『因数定理』(p.63) 参照

(3) 解の公式より，2 次方程式 $3x^2 - 6x - 3 = 0$ の解は

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

なので

$$\alpha = 1-\sqrt{2},\ \beta = 1+\sqrt{2}$$

とおける．これを使って

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx &= \int_\alpha^\beta (3x^2-6x-3)\,dx\\ &= \int_\alpha^\beta 3(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\ &= 3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\ &= 3\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\\ &= -\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\\ &= -\frac{1}{2}\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(1-\sqrt{2}\right)\right\}^3\\ &= -\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^3 = \mathbf{-8\sqrt{2}}\end{aligned}$$

◀ α，β は方程式 $3x^2-6x-3=0$ の解なので (2) を使った

◀ (1) を使った

◀ $(\beta-\alpha)^3 = \left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}} = \left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}$ として『解と係数の関係』(p.84) を使って計算をすすめてもよい

方程式の解を区間の端点とする積分

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

【例題：方程式の解を区間の端点とする積分〜その２〜】

方程式 $f(x)=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，(1)，(2) それぞれについて，定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の値を求めよ．

(1) $f(x)=2x^2-2x-4$ のとき

(2) $f(x)=x^2-4x+1$ のとき

【解答】

(1) 2 次方程式 $2x^2-2x-4=0$ の解は，-1 と 2 なので

$$\alpha=-1,\ \beta=2$$

である．これより

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx &= \int_\alpha^\beta (2x^2-2x-4)\,dx\\ &= \int_\alpha^\beta 2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\ &= 2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\\ &= -\frac{1}{3}\{2-(-1)\}^3\end{aligned}$$

◀ 方程式 $2x^2-2x-4=0$ の解で因数分解した

◀ $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$$= \mathbf{-9}$$

(2) 2 次方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ の解は，$2 \pm \sqrt{3}$ なので

$$\alpha = 2 - \sqrt{3}, \quad \beta = 2 + \sqrt{3}$$

である．これより

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(x)\,dx &= \int_\alpha^\beta (x^2 - 4x + 1)\,dx \\
&= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\
&= -\frac{1}{6}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right) - \left(2-\sqrt{3}\right)\right\}^3 \\
&= \mathbf{-4\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

◀ 方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ の解で因数分解した

◀ $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

§ 7.5

積分の応用

『積分法』の仕上げとして，積分による面積の応用的な計算と，積分を含む関数の方程式について学んでいこう．

7.5.1　絶対値を含んだ関数の積分

■絶対値を含んだ関数の定積分

絶対値を含んだ関数の定積分の例として

$$\int_{-1}^{2} |\,x\,|\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

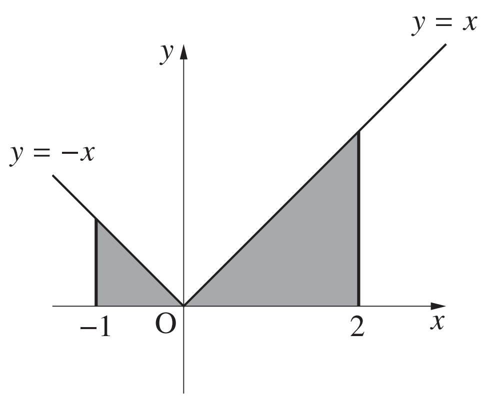
について考えてみよう．

この積分を計算するには，『微積分学の基本定理』(p.311) で学んだように，$|\,x\,|$ の原始関数の 1 つを求めればよいのだが，絶対値を含んだ関数の原始関数は簡単には表せない．そこで，以下のように積分区間を分けて計算していくことになる．

$|\,x\,|$ は，場合にわけて表すと

$$|\,x\,| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

であるから $y = |\,x\,|$ のグラフは右下図のようになり，定積分の定義から①はこの図の網掛け部分の面積を表しているのがわかる．



①は『定積分の性質 iii)』(p.306) を用いて

$$
\begin{aligned}
① &= \int_{-1}^{0} |\,x\,|\,dx + \int_{0}^{2} |\,x\,|\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx
\end{aligned}
$$

と変形できるので，『定積分の基本公式』(p.316) での計算が可能となる．

【例題：絶対値を含む関数の定積分〜その 1 〜】

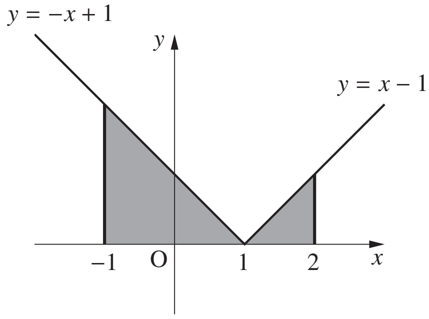
次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |\,x-1\,|\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{2} |\,x^2+x-2\,|\,dx$

【解答】

(1) $y = |x-1|$ とおくと，$\displaystyle\int_{-1}^{2} |x-1|\,dx$ の様子は右図のようになるので

◀



$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{2} |x-1|\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} |x-1|\,dx + \int_{1}^{2} |x-1|\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} -(x-1)\,dx + \int_{1}^{2} (x-1)\,dx \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

ここで，$x-1$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x$ とおくと

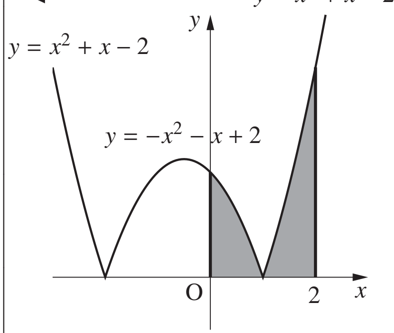
◀ 同じ式を何度も書くのを避けるため $F(x)$ とおいて計算していく

$$\begin{aligned}
① &= \Big[-F(x)\Big]_{-1}^{1} + \Big[F(x)\Big]_{1}^{2} \\
&= \{-F(1) + F(-1)\} + \{F(2) - F(1)\} \\
&= F(2) + F(-1) - 2F(1) \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot(-1)^2 - (-1)\right) \\
&\qquad - 2\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 - 1\right) = \boldsymbol{\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

◀ 上の図の三角形の面積を，(底辺)×(高さ) ÷ 2 の公式で考えることにより，この値を求めることもできる

(2) $y = \left|x^2 + x - 2\right|$ とおくと，$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ であるから，$\displaystyle\int_{0}^{2} \left|x^2 + x - 2\right|\,dx$ の様子は右図のようになるので

◀



$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{2} \left|x^2 + x - 2\right|\,dx \\
&= \int_{0}^{1} \left|x^2 + x - 2\right|\,dx + \int_{1}^{2} \left|x^2 + x - 2\right|\,dx \\
&= \int_{0}^{1} -(x^2 + x - 2)\,dx + \int_{1}^{2} (x^2 + x - 2)\,dx \quad \cdots ②
\end{aligned}$$

ここで，$x^2 - x - 2$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$ とおくと

◀ 同じ式を何度も書くのを避けるため $F(x)$ とおいて計算していく

$$\begin{aligned}
② &= \Big[-F(x)\Big]_{0}^{1} + \Big[F(x)\Big]_{1}^{2} \\
&= \{-F(1) + F(0)\} + \{F(2) - F(1)\} \\
&= F(2) + F(0) - 2F(1) \\
&= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2\cdot 2\right) + 0
\end{aligned}$$

$$-2\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3+\frac{1}{2}\cdot 1^2-2\cdot 1\right)=\mathbf{3}$$

【例題：絶対値を含む関数の定積分〜その２〜】

次の定積分をそれぞれ求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 |x-a|\,dx$（$a$ は定数とする）

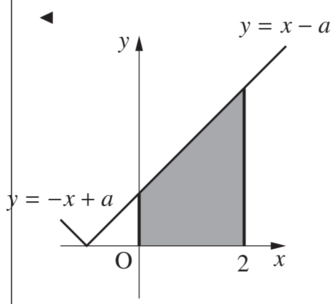
(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 |x(x-a)|\,dx$（$a$ は正の定数とする）

【解答】

(1)　a) $a \leqq 0$ のとき

グラフは右図のようになるので

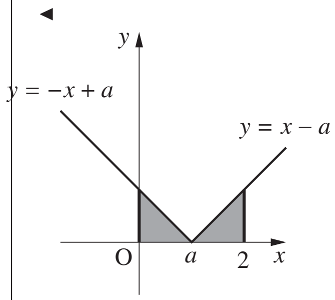
$$\int_0^2 |x-a|\,dx$$
$$=\int_0^2 (x-a)\,dx$$
$$=-2a+2$$



b) $0<a<2$ のとき

グラフは右図のようになるので

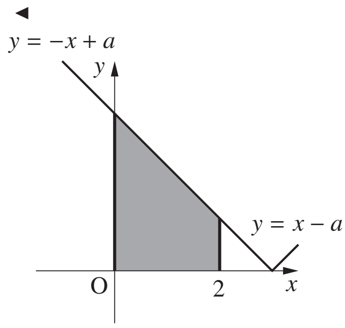
$$\int_0^2 |x-a|dx$$
$$=\int_0^a (-x+a)\,dx+\int_a^2 (x-a)\,dx$$
$$=a^2-2a+2$$



c) $2<a$ のとき

グラフは右図のようになるので

$$\int_0^2 |x-a|\,dx$$
$$=\int_0^2 (-x+a)\,dx$$
$$=2a-2$$



◀ これらの値は三角形の面積の公式や，台形の面積の公式を使ってもとめることもできる

以上 a)〜c) をまとめると

$a \leqq 0$ のとき，$-2a+2$

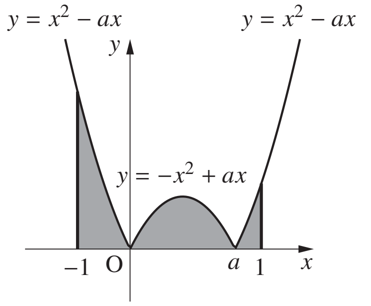
$0<a<2$ のとき，a^2-2a+2

$2 \leqq a$ のとき，$2a-2$

(2)　a) $0<a<1$ のとき

グラフは次のようになるので

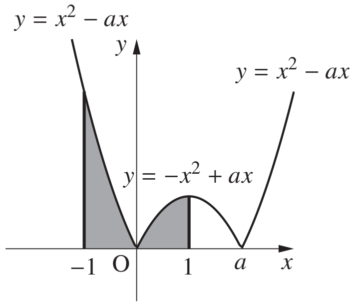
$$\int_{-1}^{1} |\,x(x-a)\,|\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (x^2 - ax)\,dx + \int_{0}^{a} (-x^2 + ax)\,dx$$
$$+ \int_{a}^{1} (x^2 - ax)\,dx$$
$$= \frac{a^3}{3} + \frac{2}{3}$$



b) $a \leqq 1$ のとき

グラフは次のようになるので

$$\int_{-1}^{1} |\,x(x-a)\,|\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (x^2 - ax)\,dx + \int_{0}^{1} (-x^2 + ax)\,dx$$
$$= a$$



以上 a)，b) をまとめると

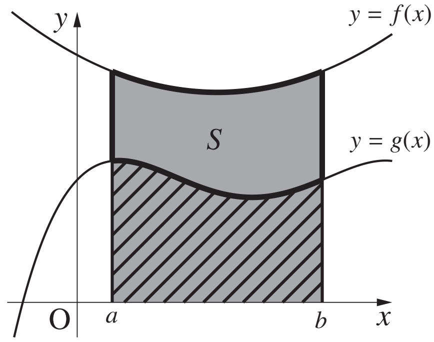
$0 < a < 1$ のとき，$\boldsymbol{\dfrac{a^3}{3} + \dfrac{2}{3}}$

$1 \leqq a$ のとき，$\boldsymbol{a}$

7.5.2　曲線の囲む面積

■2 曲線の囲む面積

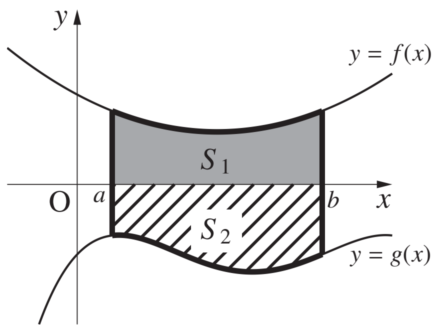
区間 $a \leqq x \leqq b$ において，2 つの関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフが囲む右図の太線内の面積 S は，網掛け部分の面積から斜線部分の面積を引けばよいので



$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と計算できる．

もし，$g(x) \leqq 0$，つまり $y = g(x)$ のグラフが x より下側にきている場合でも，次のように考え，同じように計算できる．



右図のように $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_1，$y = g(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とする．$S_1 = \int_a^b f(x)\,dx$ だが，$g(x) \leqq 0$ なので $S_2 = \int_a^b -g(x)\,dx$ と計算することに注意して

$$S = S_1 + S_2$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b -g(x)\,dx \qquad \leftarrow『定積分と面積の関係』(p.307)$$
$$= \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

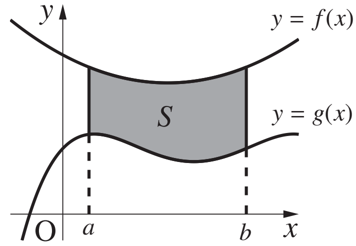
となり，確かに①と同じ式になっている．

2 つの曲線が囲む面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq g(x)$ であるとき，関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ とで囲まれる面積 S は

$$S = \int_a^b \Big\{\underbrace{f(x)}_{上側} - \underbrace{g(x)}_{下側}\Big\}\,dx$$

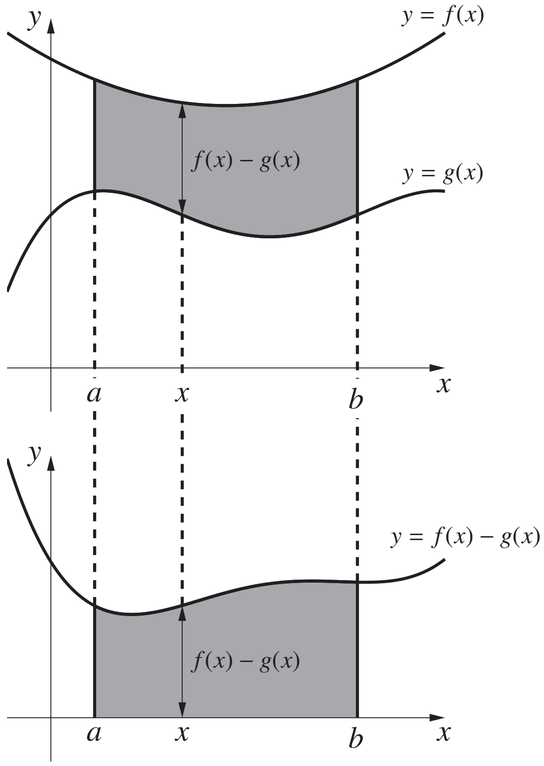
で与えられる．



■カバリエリの原理

①でみたように，$f(x)$ と $g(x)$ の差の関数である $f(x)-g(x)$ を区間 $a \leqq x \leqq b$ で積分するということは，見方を変えれば，$y=f(x)-g(x)$ のグラフと x 軸が区間 $a \leqq x \leqq b$ で囲む面積と求めていることと等しい(右図参照)．

一般に「2 つの平面図形をある一定方向に切ったときに切りとられる線分の長さが常に等しいならば，この 2 つの図形の面積は等しい」ことがいえ，これを**カバリエリの原理** (princeple of Cavalieri) という．



【例題：曲線の囲む面積〜その１〜】

(1) 2 つの放物線

$y=x^2-2x+2$ ……………………… ①

$y=-x^2-2x-2$ ……………………… ②

と $x=-1$，$x=1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(2) 区間 $1 \leqq x \leqq 3$ において，2 つのグラフ

放物線 :$y=2x^2-4x-1$ ……………………… ③

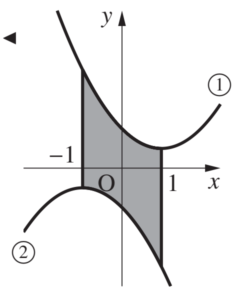
直線 :$y=-2x+3$ ……………………… ④

にはさまれた図形の面積 S を求めよ．

【解答】

(1) ①，②のグラフは右図のようになるから

◀



$$S = \int_{-1}^{1} \left\{(x^2-2x+2)-(-x^2-2x-2)\right\} dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1} (x^2+1)\,dx$$

$$= 2 \cdot 2\int_{0}^{1} (x^2+1)\,dx$$

◀『対称な区間での定積分』(p.321)

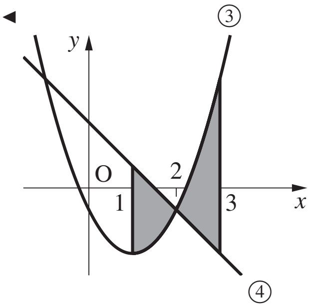
$$= 4\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}+1\right) - 0 = \mathbf{\frac{16}{3}}$$

(2) ③と④の交点の x 座標は

$$2x^2 - 4x - 1 = -2x + 3$$
$$\Leftrightarrow\ 2x^2 - 2x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (x+1)(x-2) = 0$$

より，$x = -1$，2 である．これより，グラフは右図のようになるから



$$S = \int_1^2 \left\{(-2x+3) - (2x^2 - 4x - 1)\right\} dx + \int_2^3 \left\{(2x^2 - 4x - 1) - (-2x+3)\right\} dx$$
$$= \int_1^2 (-2x^2 + 2x + 4)\,dx + \int_2^3 (2x^2 - 2x - 4)\,dx \quad \cdots\cdots ⑤$$

◀ $S = \int_1^2$(④ − ③)$\,dx + \int_2^3$(③ − ④)$\,dx$

$2x^2 - 2x - 4$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \frac{2x^3}{3} - x^2 - 4x$ とおくと

◀ 同じ式を何度も書くのを避けるため $F(x)$ とおいて計算していく

$$⑤ = \Big[-F(x)\Big]_1^2 + \Big[F(x)\Big]_2^3$$
$$= \{-F(2) + F(1)\} + \{F(3) - F(2)\}$$
$$= F(1) + F(3) - 2F(2)$$
$$= \left(\frac{2}{3} - 1 - 4\right) + \left(\frac{2\cdot 3^3}{3} - 3^2 - 4\cdot 3\right) - 2\left(\frac{2\cdot 2^3}{3} - 2^2 - 4\cdot 2\right)$$
$$= \left(\frac{2}{3} - 5\right) - 3 - 2\left(\frac{16}{3} - 12\right)$$
$$= \mathbf{6}$$

【例題：曲線の囲む面積〜その２〜（交点が積分区間になる図形）】

(1) 2 つのグラフ

放物線 :$y = 2x^2 - x + 1$ ……………………… ①

直線 :$y = x + 2$ ……………………… ②

で囲まれた図形の面積を求めよ.

(2) 2 つのグラフ

$y = 3x^2 - 5x + 2$ ……………………… ③

$y = -x^2 + 3x + 3$ ……………………… ④

で囲まれた図形の面積を求めよ.

【解答】

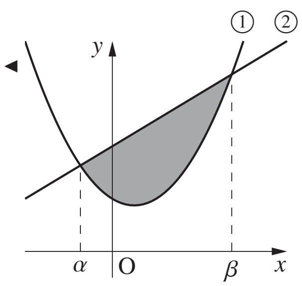
(1) ①と②の交点の x 座標は

$$2x^2 - x + 1 = x + 2$$
$$\Leftrightarrow\ 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

より，$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ である．ここで

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2},\quad \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

とおくと，グラフは右図のようになるから



$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left\{(x+2) - (2x^2 - 2x - 1)\right\} dx \\ &= \int_\alpha^\beta (-2x^2 + 2x + 1)\, dx \\ &= -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx \\ &= -2\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

◀ 方程式の解で因数分解できる (p.323 参照)

◀『方程式の解を区間の端点とする積分』(p.324)

(2) ③と④の交点の x 座標は

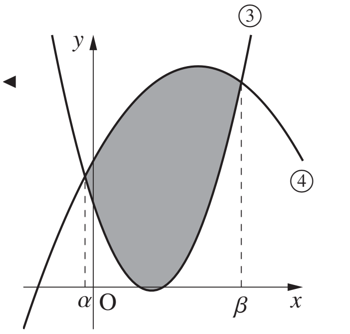
$$3x^2 - 5x + 2 = -x^2 + 3x + 3$$
$$\Leftrightarrow\ 4x^2 - 8x - 1 = 0$$

より，$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$ である．ここで

$$\alpha = \frac{2-\sqrt{5}}{2}\ ,\ \beta = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$$

とおくと，グラフは右図のようになるから

◀



$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left\{(-x^2+3x+3)-(3x^2-5x+2)\right\} dx \\ &= \int_\alpha^\beta (-4x^2+8x+1)\, dx \\ &= -4\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx \\ &= -4\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}-\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{10\sqrt{5}}{3}} \end{aligned}$$

◀ 方程式の解で因数分解できる (p.323 参照)

◀『方程式の解を区間の端点とする積分』(p.324)

【例題：曲線の囲む面積～その３～(接点が積分区間になる図形)】

2 つのグラフ

放物線 :$y = 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 2$ ……………………… ①

直線 :$y = 2x - \sqrt{3}$ ……………………… ②

と y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

【解答】

①と②の交点の x 座標は

$$2x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 2x - \sqrt{3}$$

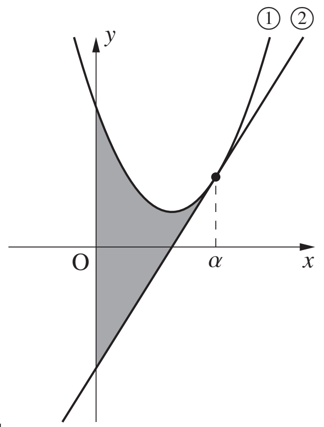
$$\Leftrightarrow\ 2x^2 - 2(1+\sqrt{3})x + 2 + \sqrt{3} = 0$$

より，$x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ (重解)である．ここで

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

とおくと，グラフは右欄外の図のようになるから

◀



$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha \left\{(2x^2-2\sqrt{3}+2)-(2x-\sqrt{3})\right\} dx \\ &= \int_0^\alpha \left\{2x^2-2(1+\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}\right\} dx \end{aligned}$$

$$= 2\int_0^{\alpha}(x-\alpha)^2\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_0^{\alpha}$$

$$= 0 - \frac{2}{3}(-\alpha)^3$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{10+6\sqrt{3}}{8}$$

$$= \boldsymbol{\frac{5+3\sqrt{3}}{6}}$$

◀方程式の解で因数分解できる (p.323 参照)

◀『多項式の関数の原始関数』(p.314)

7.5.3　基本的な積分方程式

■積分方程式とは何か

$3x-2=0$ のように数の等式ではなく，$3f(x)-2x=0$ のように関数の等式で与えられる方程式を**関数方程式** (functional equation) とよぶ. 上の方程式の解は，それぞれ $x=\frac{2}{3}$，$f(x)=\frac{2}{3}x$ である．数の方程式では，解が数であるのに対し，関数方程式では，解は関数である点に注意しよう.

関数方程式の中でも，未知の関数が積分の中に現れるような方程式を**積分方程式** (integral equation) という[*5].

■積分区間が定数の場合

【例題：積分方程式～その１～(積分区間が定数の場合)】

次の等式を満たす関数 $f(x)$ をそれぞれ求めよ.

(1) $f(x) = 2x^2 - x + \displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$

(2) $f(x) = x\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,dt + \int_{-1}^1 tf(t)\,dt - 1$

【解答】

(1) $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$ は積分区間が定数なので，積分結果も定数となる．それゆえ，適当な定数 A を用いて

$$\int_0^2 f(t)\,dt = A \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

*5 未知の関数とその導関数の関係式として書かれている方程式を**微分方程式** (differential equation) という. 微分方程式については，FTEXT数学 III で扱う.

とおくことができるので，与式は

$$f(x) = 2x^2 - x + A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と表すことができる．
②をもちいて①は

$$\int_0^2 (2t^2 - t + A)\,dx = A$$

となるので，これを計算していくと

$$\begin{aligned} &\int_0^2 (2t^2 - t + A)\,dx = A \\ \Leftrightarrow\ &\left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + At\right]_0^2 = A \\ \Leftrightarrow\ &\frac{10}{3} + 2A = A \\ \Leftrightarrow\ &A = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

②より求める関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - x - \frac{10}{3}}$ である．

(2) $\int_{-1}^1 f(t)\,dt$，$\int_{-1}^1 tf(t)\,dt$ は積分区間が定数なので，積分結果も定数となる．それゆえ，適当な定数 A，B を用いて

$$\int_{-1}^1 f(t)\,dt = A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$\int_{-1}^1 tf(t)\,dt = B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

とおくことができるので，与式は

$$f(x) = Ax + B - 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

と表すことができる．
まず，⑤をもちいて③は

$$\int_{-1}^1 (At + B - 1)\,dt = A$$

となるので，これを計算していくと

$$\int_{-1}^1 (At + B - 1)\,dt = A$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} At\,dt + \int_{-1}^{1} (B-1)\,dt = A$$

$$\Leftrightarrow 0 + 2\int_{0}^{1} (B-1)\,dt = A$$

◀『対称な区間での定積分』(p.321)

$$\Leftrightarrow 2\Big[(B-1)t\Big]_0^1 = A$$

$$\Leftrightarrow 2(B-1) = A$$

$$\Leftrightarrow A - 2B = -2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

また，⑤をもちいて④は

$$\int_{-1}^{1} t(At + B - 1)\,dt = B$$

となるので，これを計算していくと

$$\int_{-1}^{1} t(At + B - 1)\,dt = B$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \left\{At^2 + (B-1)t\right\}\,dt = B$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} At^2\,dt + \int_{-1}^{1} (B-1)t\,dt = B$$

$$\Leftrightarrow 2\int_{0}^{1} At^2\,dt + 0 = B$$

◀『対称な区間での定積分』(p.321)

$$\Leftrightarrow 2\left[\frac{A}{3}t^3\right]_0^1 = B$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}A = B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑥と⑦を満たす A, B を求めると，$A = 6$, $B = 4$ となるので，⑤より，求める関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{f(x) = 6x^2 + 4x - 1}$ である．

■積分区間に変数を含む場合

【例題：積分方程式〜その２〜（積分区間に変数を含む場合）】

(1) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ．

$$\int_{1}^{x} f(t)\,dt = x^2 - 2x + a$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$$f(x) + \int_{0}^{x} tf'(t)\,dt = \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 + 1$$

【解答】

(1) 与式の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}(x^2-2x+a)$$
$$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=2x-2}$$

◀『微積分学の基本定理』(p.312) を使った

また，与式に $x=1$ を代入すると

$$\int_1^1 f(t)\,dt = 1^2-2\cdot1+a$$
$$\Leftrightarrow\ 0=-1+a$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{a=1}$$

◀ $\int_1^1 f(t)\,dt=0$ である

(2) 与式の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\left\{f(x)+\int_0^x tf'(t)\,dt\right\} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^4-3x^2+1\right)$$
$$\therefore\ f'(x)+xf'(x)=6x^3-6x$$
$$\Leftrightarrow\ (1+x)f'(x)=6x(x+1)(x-1)$$

◀『微積分学の基本定理』(p.312) を使った

この式がいかなる x の値でも成り立つから，$f'(x)=6x(x-1)=6x^2-6x$ である．これより

$$f(x)=2x^3-3x^2+C\ (C\ \text{は定数}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

また，与式に $x=0$ を代入すると

$$f(0)+\int_0^0 tf'(t)\,dt = \frac{3}{2}\cdot0^4-3\cdot0^2+1$$
$$\Leftrightarrow\ f(0)=1$$

◀ $\int_0^0 tf(t)\,dt=0$ である

①に $x=0$ を代入すると

$$f(0)=C$$

これより，$C=1$ であるから，$f(x)=\boldsymbol{2x^3-3x^2+1}$ となる．

付録 A

本文の補足

§ **A.1**

多項式が恒等的に0になる条件の証明

多項式が恒等的に 0 になる条件

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ とするとき，
「$f(x) = 0$ が恒等式である」$\iff$ $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$
が成り立つ.

$\Longleftarrow$ は明らかなので，以下 $\Longrightarrow$ の証明を行う.

【$\Longrightarrow$ の証明】

$f(x) = 0$ が恒等式であるから，相異なる $n + 1$ 個の数，α_1, α_2, $\cdots$, α_n, α_{n+1} に対して

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \cdots = f(\alpha_n) = f(\alpha_{n+1}) = 0$$

が成り立つ.

このとき，『因数定理』(p.63) より

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_{n+1})Q(x)$$

と書けるが，$f(x)$ は n 次以下の多項式であるから，$Q(x) = 0$ となり，$f(x) = 0$ が成り立つ. ■

$f(x)$ の各項の係数がすべて 0 になる，すなわち

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$$

は同値である.

§ A.2
多項式の因数を見つけるための定理

多項式の因数を見つけるための定理

係数 a_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ がすべて整数である多項式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

に対し，既約分数 $\dfrac{p}{q}$ が，$f\left(\dfrac{p}{q}\right)=0$ を満たすとき

p は a_0 の約数，q は a_n の約数

である（ただし，約数には負の数も含めるとする）．

【証明】

$f\left(\dfrac{p}{q}\right)=0$ とすると

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0$$

式全体に q^n をかけ分母を払うと

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0 \quad \cdots\cdots①$$

一番右の項以外はすべて p でくくることができるので

$$p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\cdots+a_1q^{n-1})+a_0q^n=0$$
$$\Leftrightarrow\ p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\cdots+a_1q^{n-1})=-a_0q^n \quad \cdots②$$

??の左辺は p の倍数であるから，右辺の a_0q^n も p の倍数であるが，p と q は互いに素なので a_0 が p の倍数となる．また，**??**の一番左の項以外はすべて q でくくることができるので

$$a_np^n+q(a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1pq^{n-2}+a_0q^{n-1})=0$$
$$\Leftrightarrow\ a_np^n=-q(a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1pq^{n-2}+a_0q^{n-1}) \quad \cdots③$$

③の右辺は q の倍数であるから，左辺の a_np^n も q の倍数であるが，p と q は互いに素なので a_n が q の倍数となる．

■

§ A.3
一般の場合の相加平均と相乗平均の関係

【補】

(1) の方法を k 回繰り返せば $n = 2^{k+1}$ の場合が証明できる．その後，(2) の方法を繰り返し用いれば，全ての自然数 n で**相加相乗平均の関係式**が証明できる．一般に

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

を前提として

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + x}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$$

となる $x = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}(> 0)$ を用いれば，前提より

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \leqq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \right)^n$$

$$\therefore\ \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$$

として，いくらでも降りてくることができる．

§ A.4
一般の場合のコーシー・シュワルツの不等式

【解 1：コーシー・ラグランジュの恒等式を用いる】
一般に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 \sum_{k=1}^{n} b_k{}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{1 \leqq i<j \leqq n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2$ が成立する．これより題意の成立は明らか．この等式の証明は帰納法による．

【解 2：2 次関数の判別式】
2 次関数 $f(t) = (a_1 t - b_1)^2 + (a_2 t - b_2)^2 + \cdots + (a_n t - b_n)^2$ とおくと

$$f(t) = (a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2)t^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)t + (b_1{}^2 + b_2{}^2 + \cdots + b_n{}^2)$$

すべての $t \in \mathbb{R}$ において，$f(t) \geqq 0$ なので

$$D/4 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 - (a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + \cdots + b_n{}^2) \leqq 0$$

$$\therefore (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leqq (a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + \cdots + b_n{}^2)$$

等号成立は $a_1 t - b_1 = 0,\ a_2 t - b_2 = 0,\ \cdots,\ a_n t - b_n = 0$ を同時に満たす t が存在すること，すなわち

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}$$

【解 3：ベクトルの内積】
$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \cos^2\theta$ であるから，一般に

$$\left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \geqq \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$$

が成立する．

$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ を考えれば，与式が成り立つ．
等号成立は $\cos\theta = \pm 1$ つまり $\theta = 0°$または $180°$ のとき．成分でいえば，$a_i k = b_i$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を満たす $k \in \mathbb{R}$ が存在するとき，つまり $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \cdots = \dfrac{b_n}{a_n}$ のとき．

§ A.5

開閉計算

■開平法の手順

例として，$\sqrt{823.69}$ の値を開平法で計算する．

(1) 823.69 を根号の中に書き，「小数点を基準」にして「2 桁ずつ」区切っていく．
また，横にスペースをとっておく．

(2) 一番左の数は 8．2 乗して 8 を超えない最大の数 2 を，右図のように 3 ヶ所に書く．

(3) $(2\times 2 =)\ 2^2 = 4$ を 8 の下に書き，8 から 4 を引く．そして，23 を下に下ろす．
また，その横で $2+2=4$ を計算する．

(4) 「4$\boxed{?}$」に「$\boxed{?}$」を掛けて「423」を超えない，最大の 1 桁の整数 $\boxed{?}$ を求める．

$$48\times 8 = 384 \leqq 423 < 49\times 9 = 441$$

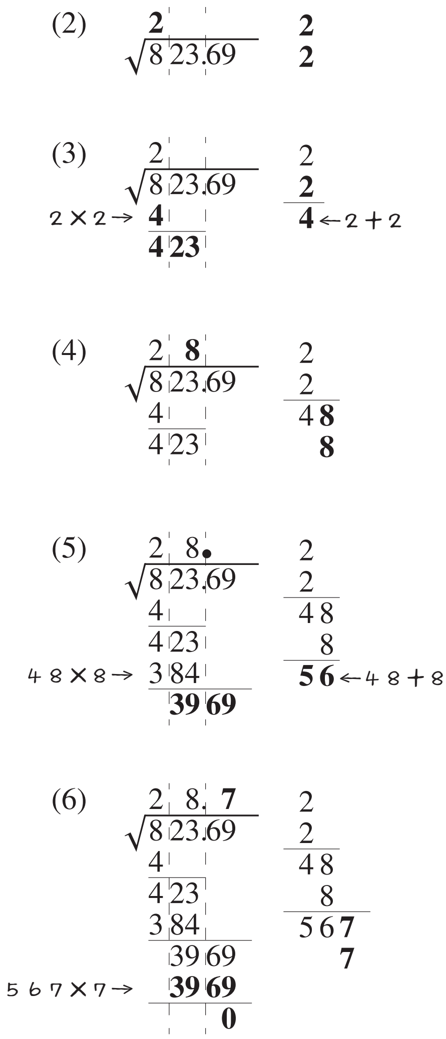
であるので，$\boxed{?}$ は 8．これを 3 ヶ所に書き込む．

(5) 48×8 の結果 384 を 423 の下に書き，423 から引く．そして，69 を下に下ろす．さらに，小数点を打つ．
また，$48+8$ を横で計算しておく．

(6) 「56$\boxed{?}$」に「$\boxed{?}$」を掛けて「3969」を超えない，最大の 1 桁の整数 $\boxed{?}$ を求める．

$$567\times 7 = 3969 \leqq 3969 < 568\times 8$$

より $\boxed{?}$ は 7 であり，$3969 - 567\times 7 = 0$ なので計算は完了．$\sqrt{823.69} = 28.7$ とわかる．
（いつまでも 0 が現れないときは，計算を繰り返すことでより精密な近似値を求めることができる．）



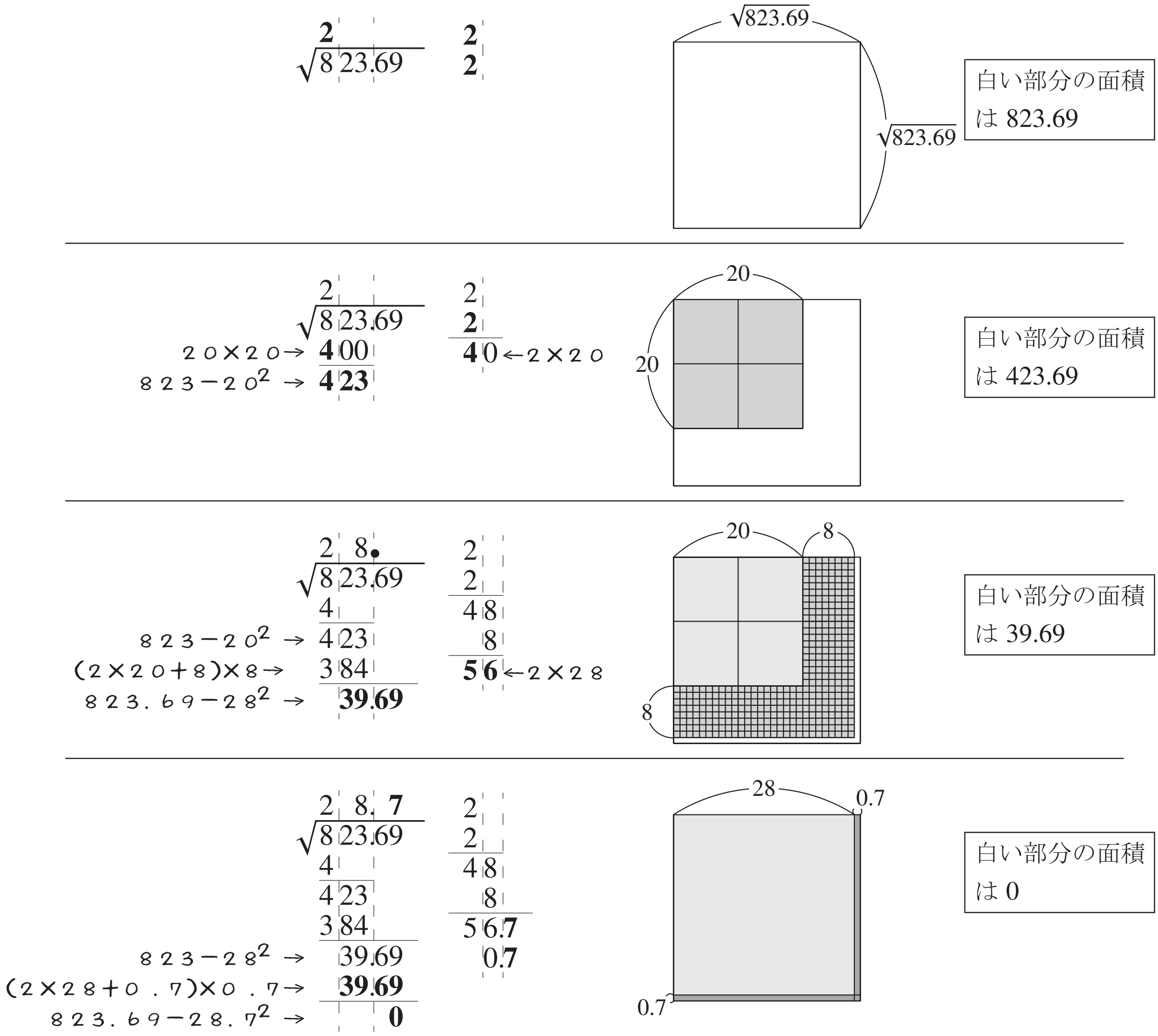
■開平法とは

「開平」とは「ある数の平方根を求めること」であり，「**開平法** (extraction of square root)」とは，その「開平」を筆算のような計算で求める方法である．いずれも和算[*1]の時代から使われた用語であり，開平法は古くからそろばんによって用いられていた．

開平法の計算は，化学や物理において必要とされることがある．

■開平法の仕組み

なぜ，前ページの開平法によって平方根が求められるのか，その仕組みを下に図で示しておく（途中の計算式の中に，実際の計算のときには必要のない数字があるので注意すること）．余裕のある人は，各自で考えてみよう．



---

*1 吉田光由著「塵劫記(1627)」などが大きなきっかけとなって発達した，江戸時代の開国以前における日本の数学の総称．関孝和(1640〜1708)，建部賢弘(1664〜1739)などの傑出した人物が表れた．和算においては，微分積分学を初めとする関数の概念こそ大きな流れを作らなかったものの，方程式論，数値計算などの分野においては，また，庶民にも広く流行した点は，同時代のヨーロッパの数学を大きく凌駕した．開国以後の日本が，ヨーロッパの数学を吸収して初等教育に導入するまで，ほとんど時間がかからなかった要因には，和算の影響がたいへん大きかったと考えられている．

【例題：開平法】

$\sqrt{153664}$，$\sqrt{1.1236}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{9.8}$ の値を開平法によって計算せよ（無限に続く場合は，四捨五入によって上から 3 桁まで計算せよ）．

【解答】

開平法によって，右のように計算できて

$$\sqrt{153664} = \mathbf{392}$$

```
    3  9  2          3
  √15 36 64          3
    9               ----
   -----             69
    6 36              9
    6 21            -----
   --------          782
      15 64            2
      15 64
      -----
          0
```

開平法によって，右のように計算できて

$$\sqrt{1.1236} = \mathbf{1.06}$$

```
    1. 0  6          1
  √1.12 36           1
    1               ----
   ---               20
     12               0
      0             -----
   --------          206
     12 36             6
     12 36
     -----
         0
```

◀ 下のように，0 を引く部分を省略しても構わない．ただし，補助の計算から 0 を省略してはいけない．

```
    1. 0  6          1
  √1.12 36           1
    1               ----
   --------          20
     12 36            0
     12 36          -----
     -----           206
         0             6
```

開平法によって，右のように計算できて

$$\sqrt{13} = 3.6\overset{1}{\cancel{0}}\cancel{5}\cdots$$
$$= \mathbf{3.61}$$

```
    3. 6  0  5       3
  √13.               3
    9               ----
   -----             66
    4 00              6
    3 96            -----
   -------           720
       4 00            0
          0         ------
   ----------        7205
       4 00 00          5
       3 60 25
   ----------
         39 75
```

◀ 下のように，0 を引く部分を省略しても構わない．ただし，補助の計算から 0 を省略してはいけない．

```
    3. 6  0  5       3
  √13.               3
    9               ----
   -----             66
    4 00              6
    3 96            -----
   ----------        720
       4 00 00         0
       3 60 25      ------
   ----------        7205
         39 75          5
```

開平法によって，右のように計算できて

$$\sqrt{9.8} = 3.13\cancel{0}\cdots$$
$$= \mathbf{3.13}$$

```
    3. 1  3  0       3
  √9.80              3
    9               ----
   ---               61
    80                1
    61              -----
   -------           623
    19 00              3
    18 69           ------
   --------          6260
       31 00            0
```

◀ 9.8 とは，物理で重要となる「重力加速度 (m/s^2)」の近似値である．余談になるが，この答えは π に近い値である．

……電卓で値を確かめながら，いろいろな値で練習しよう．

§ **A.6**

常用対数表

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996

あとがき

コンピュータがネットワークで繋がれた現在，ソフトウェアの開発において，オープンソースという活動があります．オープンソースとは，ソフトウェアの設計図にあたるソースコードを，インターネットなどを通じて無償で公開し，誰でもそのソフトウェアの開発に参加できるというものです．

ソースコードさえあれば，そのソフトウェアで利用されている技術を容易に転用することが可能となるため，企業などでは自社の開発したソフトウェアのソースコードは極秘とするのが普通です．しかし，オープンソースの考え方は，ソースコードを公開して有用な技術を共有することで，世界中の誰もが自由にソフトウェアの開発に参加することができ，その方が素晴らしいソフトウェアが生まれるはずだという思想に基づいています．

私達 FTEXTは，このオープンソースという考え方を，ソースコードに限らず教材や一般のコンテンツ作成に応用する活動を進めています．この FTEXT数学シリーズもそうして作られたものです．

このような手法で教科書を作ることには，従来の教科書作りにはない特徴として，次のことが挙げられます．

まず 1 点目として，書く側と読む側とに完全に二分化されていた状況が崩れ，全ての人が書くことに参加できる，ということがあります．従来では，教師が生徒の視点を想像して文章を書いていました．しかし，この新しい教科書作りでは，教科書が作られるまさにその過程で，生徒からの質問や指摘が飛び込んできます．さらには，能力とやる気さえあれば生徒自らが教科書を書き進めていくこともできるのです．

次に 2 点目として，数学の教授法について，全国の先生方がもつコツを取り入れた教科書作りができる，ということがあります．食べ物に好き嫌いがあるように，教師といえども教える部分によって，説明の得意不得意があるものです．この新しい教科書作りでは，全国の先生方の得意な部分を集めていくことができるのです．これは，生徒のためになるだけではなく，他の先生方の教授法のスキルアップにもつながるでしょう．実際この FTEXT数学でも，従来の教科書では見られない最新の教授法を取り入れた編集になっています．

最後に 3 点目として，この教科書はインターネットを通じて世界中の人に公開されるので，今まで教育業界とは直接関係なかった方々の意見やアイデアも取り入れられる，ということがあります．ある分野での専門家の方々に，教科書で学ぶ数学の応用例などを盛んに紹介していただければ，「数学なんて何の役に立つのかわからない」などという言説を

払拭することができるかもしれません．

普通，教材というものは，ある技術を身に付ける必要のある人が利用するものであり，特化した知識を扱うものですが，“教科書”は日本中のほぼ全員が触れるという特殊な教材です．それゆえ，教科書の役割とは，次代を支える人たちにぜひ学んでおいて欲しい知識について，その時代のスタンダードを担うものであると考えます．工学的技術の進歩により，世界の知識はより細分化の方向に進んでいます．しかし，そのような時代であるからこそ，知識の全体を広く見渡せる教科書の存在が必要なのではないでしょうか．

現在私達は，世界の知恵を集めるという手法を用いて，数学の教科書に限らず，他の分野の教科書についても執筆をはじめようています．さらに今後は，教科書を作るという枠組みを超えて，新しい教材作成のプラットフォームを開発していく予定です．

しかし，これらを実行していくための力がまだまだ私達には足りません．このような活動に興味をもたれた方やご支援いただける方は，ぜひホームページ (http://www.ftext.org/) の方までアクセスください．

索引