第 6 章 微分法

§ 6.1 平均の速度と瞬間の速度

速さとは，ある時間にどれくらい移動できたかの割合のことであるが，その時間間隔を小さく取ることによって，自動車のスピードメーターが表すような，刻一刻と変化する速度というものを考えることができる．

6.1.1　平均の速度

■速度の考え方

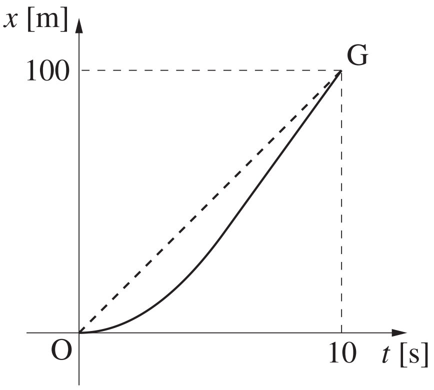
陸上競技の男子短距離走では，世界レベルの選手になると 100 メートル（meter）を 10 秒（second）で走るので，速度を計算すると

$$\frac{100\ [\mathrm{m}]}{10\ [\mathrm{s}]} = 10\ [\mathrm{m/s}]$$

となる．しかし，短距離の選手がスタートからゴールまで，ずっと 10 [m/s] の速度で走っているかというと，そうではない．実際には，スタートした瞬間からだんだんと速度を上げて最高速度に達し，それを維持しながら走りつづけるという走り方になっているようだ．以下では，このように速度の変化がともなう運動について考えてみよう．

■平均の速度

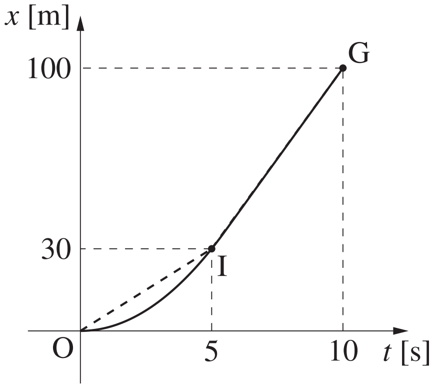
右の図は，横軸に時間 (t)，縦軸に位置 (x) をとり，ある選手のスタートからゴールまでの時間と位置の関係をグラフで表したものであり，x-t グラフという．



このグラフにおいて，さきほど計算した 10 [m/s] という速度は，縦軸の変化量 100 [m] を横軸の変化量 10 [s] で割ったものである．こ

れは，右図の点線で表した原点 O と点 G を結ぶ直線の傾きに等しい．

このように，x-t グラフ上の 2 点を通る直線の傾きとして求まる速度のことを，その 2 点間の**平均速度** (average velocity) といい $\bar{v}$ と表す．



ほかにも平均速度の例をいくつか考えてみよう．たとえば，スタートしてから 5 秒後の位置は右図の点 I の座標として表される．原点 O と点 I の間を通る直線の傾き，すなわちスタートから 5 秒後までの平均速度 $\bar{v}$ は

$$\bar{v} = \frac{30\ [\mathrm{m}]}{5\ [\mathrm{s}]} = 6\ [\mathrm{m/s}]$$

となる．また，5 秒後からゴールまでの平均速度 $\bar{v}$ は，右図において点 I と点 G を通る直線の傾きとなり

$$\bar{v} = \frac{100 - 30\ [\mathrm{m}]}{10 - 5\ [\mathrm{s}]} = 14\ [\mathrm{m/s}]$$

となる．

平均の速度

時刻が t_1 から t_2 に変化する間に，位置が x_1 から x_2 に変化する物体の平均速度 $\bar{v}$ は，時刻の変化量 $\mathit{\Delta} t = t_2 - t_1$ と，位置の変化量 $\mathit{\Delta} x = x_2 - x_1$ をもちいて

$$\bar{v} = \frac{\mathit{\Delta} x}{\mathit{\Delta} t}$$

と表すことができる．

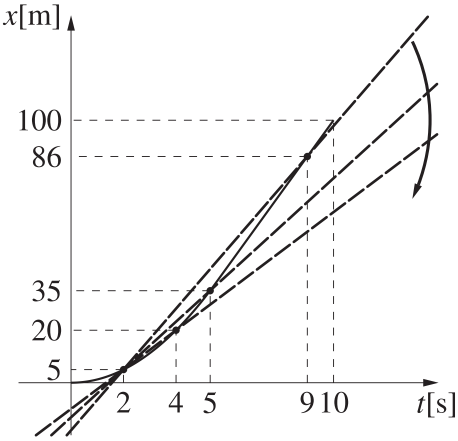
6.1.2　瞬間の速度

■刻一刻と変化する速度

上の図では，I から G まではグラフが直線状になっているので，スタートして 5 [s] 後から 10 [s] 後まで走る速度は 14 [m/s] でほぼ一定である．それに対し，O から I まではグラフは曲線になっているので，走る速度も刻一刻と変化していると考えられる．以下では例として，スタートしてから 2 秒後の点を基準にとり，いろいろな平均速度を考えてみよう．

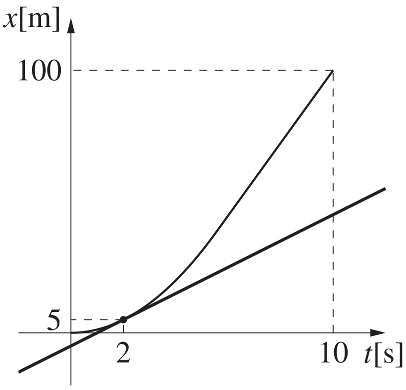
■瞬間の速度

右図は，スタートしてから 2 秒後，4 秒後，5 秒後，9 秒後の位置と時刻の関係をグラフに表したものである．



この関係から，2 秒後から 9 秒後まで，2 秒後から 5 秒後まで，2 秒後から 4 秒後までの平均速度 $\bar{v}$ を求めると，下の表のようになる[*1]．

t	2〜9	2〜5	2〜4
Δt	7	3	2
x	5〜86	5〜35	5〜20
Δx	81	30	15
$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$	11.6	10.0	7.50



スタートしてから 2 秒後からのずれをさらに小さくしていくと，Δt の値は 0 に近づいていき，速度 $\bar{v}$ の値は究極的には右図の直線の傾きを表すと考えられる．このような速度のことを，特に $t = 2$ における**瞬間速度** (instantaneous velocity) という．

今の例では走り出して 2 秒たったときを基準として瞬間速度を求めたが，基準は自由にとれるので，任意の時刻 t における瞬間速度を考えることができる．

また，この例のように Δt を限りなく 0 に近づけていくような操作のことを，「極限をとる」といい，極限をとることによって決まる値のことを**極限値** (limit value) という．

■極限値の表し方

右上図の太い直線の傾きが v のとき，すなわち Δt を限りなく 0 に近づけるときの $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ の極限値が v のとき $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$ などと表す．

瞬間の速度

時刻が t_1 で位置が x_1 の物体の瞬間の速度 v は

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

と表すことができる．ただし，Δt，Δx はそれぞれ，時刻 t_1，位置 x_1 からの変化量を表す．

[*1] 表中の Δt とは，時間の変化量つまり，走るのにかかった時間を表すので，たとえば Δt の値 7 は，その上の欄の値を使い $9 - 2 = 7$ として計算したのものである．

§ 6.2
極限

この節では，『瞬間の速度』(p.250) で学んだ考え方を，関数を利用することにより，より一般的にみていくことにしよう．

6.2.1　極限の定義

■極限の定義

極限の定義

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ が定数 α（アルファ）に限りなく近づくならば

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \to \alpha \ (x \to a)$$

と書き，この値 α のことを，$x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値** (limit value) という．

また，$f(x)$ は限りなく α に近づくという意味で

$x \to a$ のとき，$f(x)$ は α に**収束** (convergence) する

ということもある．

■極限の考え方の基本〜例１〜

ここで，例として $f(x) = 2x + 1$ において $\lim_{x \to 1} f(x)$ がいくつになるのか考えてみよう．

たとえば，x を 0.9 からスタートして，0.99，0.999，0.9999，$\cdots$ と 1 に近づけていくと

$f(0.9) = 2 \times 0.9 + 1 = 2.8$

$f(0.99) = 2 \times 0.99 + 1 = 2.98$

$f(0.999) = 2 \times 0.999 + 1 = 2.998$

$f(0.9999) = 2 \times 0.9999 + 1 = 2.9998$

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	$\cdots$
$f(x)$	2.8	2.98	2.998	2.9998	$\cdots$

と計算できるので，右の表のようにまとめられる．この表を右に続けていく，つまり x を 1 に近づけていくと，$f(x)$ の値は 3 に近づいていくことがわかる．

また，x を 1.5 からスタートして，1.25，1.125，1.0625，$\cdots$ と，距離を半分ずつつめながら 1 に近づけていくと

$f(1.5) = 2 \times 1.5 + 1 = 4$

$f(1.25) = 2 \times 1.25 + 1 = 3.5$

$f(1.125) = 2 \times 1.125 + 1 = 3.25$

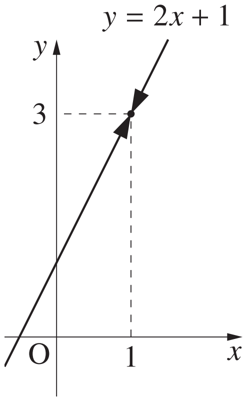
x	1.5	1.25	1.125	1.0625	$\cdots$
$f(x)$	4	3.5	3.25	3.125	$\cdots$

$f(1.0625) = 2 \times 1.0625 + 1 = 3.125$

と計算できるので，右の表のようにまとめられる．この表からも，x を 1 に近づけると，$f(x)$ は 3 に近づくことがわかる．

以上 2 つの例からわかるように $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ であるといえる．

この結果は，右図の $y = f(x)$ のグラフから明らかであろう．



また，ここで $f(1) = 3$ であるから，結果として

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

となっていることがわかる．

一般に，この $f(x) = 2x + 1$ のように，$y = f(x)$ のグラフが $x = a$ で途切れていないとき，$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ の値は

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

となる[*2]．このことを知っていれば，上で調べたようにわざわざ表を作って考察しなくても，すぐに極限値を求めることができる．

しかし，次の例のように，関数 $y = f(x)$ のグラフの形がすぐにはわからないようなときには，グラフが途切れている可能性があるので，極限値を求めるのに注意を要する．

■極限の考え方の基本〜例２〜

では，その例として，$g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ において $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ がいくつになるのか考えてみよう．

たとえば x を 0.9 からスタートして，0.99，0.999，0.9999，$\cdots$ と 1 に近づけていくと

$$g(0.9) = \frac{0.9^2 - 1}{0.9 - 1} = \frac{\cancel{(0.9 - 1)}(0.9 + 1)}{\cancel{0.9 - 1}} = 1.9$$

$$g(0.99) = \frac{0.99^2 - 1}{0.99 - 1} = \frac{\cancel{(0.99 - 1)}(0.99 + 1)}{\cancel{0.99 - 1}} = 1.99$$

$$g(0.999) = \frac{0.999^2 - 1}{0.999 - 1} = \frac{\cancel{(0.999 - 1)}(0.999 + 1)}{\cancel{0.999 - 1}} = 1.999$$

$$g(0.9999) = \frac{0.9999^2 - 1}{0.9999 - 1} = \frac{\cancel{(0.9999 - 1)}(0.9999 + 1)}{\cancel{0.9999 - 1}} = 1.9999$$

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	$\cdots$
$g(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$

と計算できるので，右の表のようにまとめられる．この表を右に続けていく，つまり x を 1 に近づけていくと，$g(x)$ の値は 2 に近づいていくことがわかる．

また，x を 1.5 からスタートして，1.25，1.125，1.0625，$\cdots$ と，距離を半分ずつつめながら 1 に近づけていくと

$$g(1.5) = \frac{1.5^2 - 1}{1.5 - 1} = \frac{\cancel{(1.5 - 1)}(1.5 + 1)}{\cancel{1.5 - 1}} = 2.5$$

[*2] これは関数の**連続** (continity) の定義となるが，詳しくは FTEXT数学 III で学ぶ

$$g(1.25) = \frac{1.25^2 - 1}{1.25 - 1} = \frac{\cancel{(1.25 - 1)}(1.25 + 1)}{\cancel{1.25 - 1}} = 2.25$$

$$g(1.125) = \frac{1.125^2 - 1}{1.125 - 1} = \frac{\cancel{(1.125 - 1)}(1.125 + 1)}{\cancel{1.125 - 1}} = 2.125$$

$$g(1.0625) = \frac{1.0625^2 - 1}{1.0625 - 1} = \frac{\cancel{(1.0625 - 1)}(1.0625 + 1)}{\cancel{1.0625 - 1}} = 2.0625$$

$$\vdots$$

と計算できるので，下の表のようにまとめられる．

x	1.5	1.25	1.125	1.0625	$\cdots$
$g(x)$	2.5	2.25	2.125	2.0625	$\cdots$

この表からも，x を 1 に近づけると，$g(x)$ は 2 に近づくことがわかる．つまり

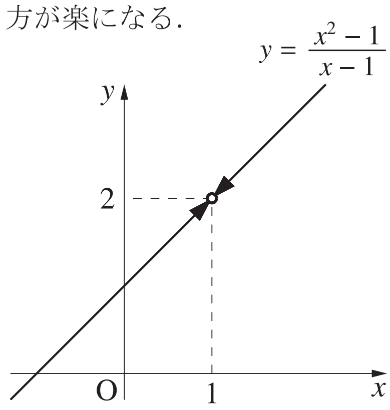
$$\lim_{x\to1} g(x) = 2$$

であるといえる．

上の 2 つの計算では，$g(x)$ の x に値を代入してから約分して計算したが，$x \neq 1$ であるかぎり

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\cancel{(x - 1)}(x + 1)}{\cancel{x - 1}} = x + 1$$

であるから，このように先に約分してから x に値を代入する方が楽になる．



いま，$g(x)$ の値は $x = 1$ では(分母が 0 になるので)定義されないが，$\lim_{x\to1} g(x)$ は 2 として存在する，つまり

$$\underbrace{\lim_{x\to1} g(x)}_{\text{この値は 2}} \neq \underbrace{g(1)}_{\text{存在してない!}}$$

であることに注意しよう．

このことを，グラフで考えてみる．$g(x)$ は $x \neq 1$ で

$$g(x) = x + 1$$

と書けるので，$y = g(x)$ のグラフは右図のようになり，$x = a$ で $g(x)$ が存在しなくても，$\lim_{x\to a} g(x)$ は存在することがある．

6.2.2　極限の計算法則

■極限の計算法則

さきほどの 2 つの例より

$$f(x) = 2x + 1 \text{ のとき} \lim_{x\to1} f(x) = 3$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ のとき} \lim_{x\to1} g(x) = 2$$

であった．いま，この 2 つの関数を足し合わせた関数 $h(x) = f(x) + g(x) = 2x + 1 + \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ の極限 $\displaystyle\lim_{x\to1} h(x)$ は，$x \fallingdotseq 1$ のとき

$$f(x) + g(x) = 2x + 1 + \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2x + 1 + \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2x + 1 + x + 1 = 3x + 2$$

であるから

$$\lim_{x\to1} h(x) = \lim_{x\to1} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x\to1}(3x + 2) = 5$$

となる．これは，極限をとったあと足し合わせた

$$\lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x) = 3 + 2 = 5$$

という結果と等しくなる．つまり

$$\lim_{x\to1}\{f(x) + g(x)\} = \lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x)$$

が成り立っている．簡単にいえば，和の極限値は極限値の和と等しいということである．

和に限らず，一般に極限値の計算において，次のようなことがいえる．

極限の計算法則

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)$ が存在するとき

i) $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$　（複合同順）

ii) $\displaystyle\lim_{x\to a}\{kf(x)\} = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$
ただし，k は定数とする．

iii) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

iv) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)}$
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) \fallingdotseq 0$ とする．

が成立する．

この定理を証明するためには，『極限の定義』(p.252) をもっと厳密なものにする必要がある．厳密な極限の議論は FTEXT 数学 III で行う．

§ 6.3

微分係数と導関数

ここでは，§6.1 でみた『瞬間の速度』を，より一般的に扱うための方法について考えていこう．

6.3.1　平均変化率

■平均変化率

『平均の速度』(p.249) で見たように，x-t グラフ上の 2 点を通る直線の傾きは平均速度を意味していた．ここでは x-t グラフに限ることなく，一般の関数 $y = f(x)$ について，この平均速度にあたるものを考えてみよう．

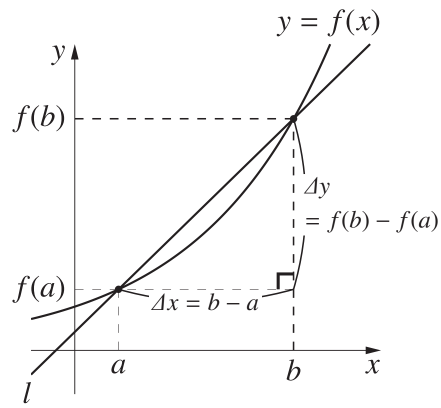
関数 $y = f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき

$b - a$ を **x の増分** (increment of x) といい Δx と表し
$f(b) - f(a)$ を **y の増分** (increment of y) といい Δy と表す[*3]

また，x の増分に対する y の増分の割合

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \left(= \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

のことを，x の値が a から b まで変化するときの $f(x)$ の**平均変化率** (average rate of change) という[*4]．これは右図の直線 l の傾きを表す．



p.249 で考えた『平均の速度』とは，x-t グラフにおける平均変化率のことであるといいかえられる．

6.3.2　微分係数と接線

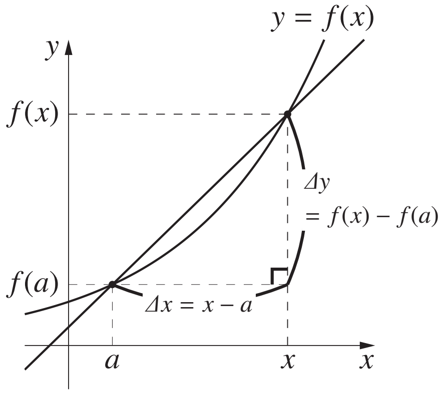
■微分係数の定義

『瞬間の速度』(p.250) で見たように，瞬間速度は平均速度 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ の Δt を限りなく 0 に近づけるときの極限値，つまり $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ として与えられた．ここでも x-t グラフに限ることなく，一般の関数 $y = f(x)$ について，この瞬間速度にあたるものを考えてみよう．

*3 Δ はアルファベットの D に相当するギリシア文字であり，差 (difference) の頭文字をとったものである．
*4 これは中学校や FTEXT 数学 I で学んだ『変化の割合』と同じものである

関数 $f(x)$ において，$\Delta x = x - a$，$\Delta y = f(x) - f(a)$ とすると，a からある x まで変化するときの平均変化率は $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ である．

ここで，x を限りなく a に近づけることにより $\Delta x = x - a$ は限りなく 0 に近づき，このときこの平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の値が，ある決まった値に近づくならば，その極限値を関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における**微分係数** (differential coefficient) といい，$f'(a)$ と表す．つまり



$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

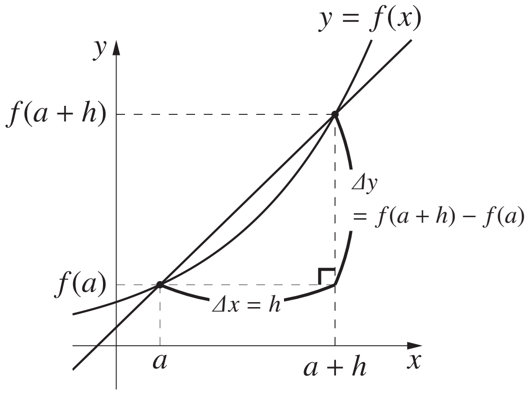
と定義する．

■微分係数の定義の別法

また，$\Delta x = h$，つまり $x - a = h$ とおくと，$x = a + h$ であるから

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

であり，x を a に近づけることは h を 0 に近づけることに等しいから，微分係数 $f'(a)$ は



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と表すこともできる．

まとめると次のようになる．

微分係数

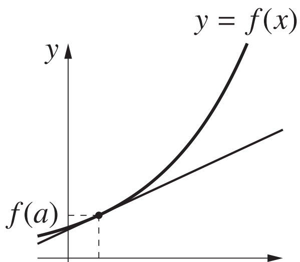
関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

と定義する．$x = a + h$ とおけば

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

とも書ける．



この 2 つの式は，どちらも同じことを表しているが，片方だけに固執せず，問題に応じて臨機応変に使い分けられるようになるのがよい．

【例題：定義式から微分係数を求める〜その１〜】

$f(x)=x^2$，$g(x)=x^3$ とするとき，次の値を求めよ．

(1) $f'(3)$　　(2) $g'(-2)$

【解答】

(1) 微分係数 $f'(3)$ の定義より

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$$=\frac{x^2-3^2}{x-3}=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$
$$=x+3$$
$$\to 6\ \ (x\to 3)$$

◀ $f'(3)=\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$

◀ 定義より $x \fallingdotseq 3$ なので，$x-3$ で約分した

よって，$\boldsymbol{f'(3)=6}$.

【別解】

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\frac{(3+h)^2-3^2}{h}=\frac{h^2+6h}{h}$$
$$=h+6$$
$$\to 6\ \ (h\to 0)$$

◀ $f'(3)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$

◀ 定義より $h \fallingdotseq 0$ なので，h で約分した

よって，$\boldsymbol{f'(3)=6}$.

(2) 微分係数 $g'(-2)$ の定義より

$$\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$$
$$=\frac{x^3-(-2)^3}{x+2}$$
$$=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}$$
$$=x^2-2x+4$$
$$\to 12\ \ (x\to -2)$$

◀ $g'(-2)=\lim_{x\to -2}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$

◀ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ を使った

◀ 定義より $x \fallingdotseq -2$ なので，$x+2$ で約分した

よって，$\boldsymbol{g'(-2)=12}$.

【別解】

$$g(-2+h)-g(-2)$$
$$=(-2+h)^3-(-2)^3=12h-6h^2+h^2$$

より

$$\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}=12-6h+h$$

◀ 定義より $h \fallingdotseq 0$ なので，h で約分した

$$\to 12 \ \ (h \to 0)$$

よって，$\boldsymbol{g'(-2) = 12}$.

【例題：定義式から微分係数を求める〜その２〜】

$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$，$g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ とするとき，次の値を求めよ.

(1) $f'(3)$　　　　(2) $g'(-2)$

【解答】

(1) 微分係数 $f'(3)$ の定義より

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\
&= \frac{2x^2 - 4x + 3 - (2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 3)}{x - 3} \\
&= \frac{2(x^2 - 3^2) - 4(x - 3)}{x - 3} \\
&= \frac{2(x - 3)(x + 3) - 4(x - 3)}{x - 3} \\
&= 2x + 2 \\
&\to 8 \ \ (x \to 3)
\end{aligned}$$

◀ $f'(3) = \lim_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

◀ 定義より $x \neq 3$ なので，$x - 3$ で約分した

よって，$\boldsymbol{f'(3) = 8}$.

【別解】

$$\begin{aligned}
&\frac{f(3 + h) - f(3)}{h} \\
&= \frac{2(3 + h)^2 - 4(3 + h) + 3 - (2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 3)}{h} \\
&= \frac{8h + 2h^2}{h} \\
&= 8 + 2h \\
&\to 8 \ \ (h \to 0)
\end{aligned}$$

◀ $f'(3) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h}$

◀ 定義より $h \neq 0$ なので，h で約分した

よって，$\boldsymbol{f'(3) = 8}$.

(2) 微分係数 $g'(-2)$ の定義より

$$\begin{aligned}
&\frac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)} \\
&= \frac{x^3 + 2x^2 + 1 - \left\{(-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 1\right\}}{x + 2} \\
&= \frac{(x^3 + 2^3) + 2(x^2 - 2^2)}{x + 2} \\
&= \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 2(x + 2)(x - 2)}{x + 2} \\
&= x^2
\end{aligned}$$

◀ $g'(-2) = \lim_{x \to -2} \dfrac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)}$

◀ 定義より $x \neq -2$ なので，$x + 2$ で約分した

$\to 4 \ (x \to -2)$

よって，$\boldsymbol{g'(-2) = 4}$.

【別解】

$$\begin{aligned} & g(-2+h) - g(-2) \\ &= (-2+h)^3 + 2(-2+h)^2 + 1 \\ &\qquad - \left\{(-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 + 1\right\} \\ &= 4h - 4h^2 + h^3 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} &= 4 - 4h + h^2 \\ &\to 4 \ (h \to 0) \end{aligned}$$

◀ 定義より $h \fallingdotseq 0$ なので，h で約分した

よって，$\boldsymbol{g'(-2) = 4}$.

6.3.3　導関数

■導関数とは何か

【例題：$x = a$ での微分係数を求める】

$f(x) = x^2$ とし，次の問いに答えよ．

(1) $f'(a)$ を求めよ．

(2) (1) の結果に $a = 3,\ 2$ を代入することにより，$f'(3)$，$f'(-2)$ を求めよ．

【解答】

(1) 微分係数 $f'(a)$ の定義より

$$\begin{aligned} & \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= 2a + h \\ &\to 2a \ (h \to 0) \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{f'(a) = 2a}$.

(2) (1) の a に $a = 3$ を代入することにより

$$\boldsymbol{f'(3) = 6}$$

また，$a = -2$ を代入することにより

$$\boldsymbol{f'(-2) = -4}$$

となる．

上の例題 (2) の結果は，p.258 の例題の (1) と (2) の答えと確かに一致する．

このように，同じ関数の微分係数は，いちいち定義式に戻り計算しなくても

「$x = a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めておいて，a に必要な値を代入する」

ことによって求められる．いいかたを変えれば，a を変数とみれば $f'(a)$ は a の関数になっているということである．変数であることをわかりやすくするため，a を x におきかえた $f'(x)$ を以下では使うことにする．

導関数

関数 $f(x)$ において，極限 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在するとき，これを $f(x)$ の**導関数** (derived function) といい，$f'(x)$ で表す．すなわち

$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

である．

■**導関数の表し方**

関数 $y = f(x)$ の導関数の表し方にはいくつかあり，$f'(x)$ の他にも y' や $\dfrac{dy}{dx}$ や $\dfrac{d}{dx}f(x)$ で表すこともある．

$\dfrac{dy}{dx}$ は，x の増分 h を $\varDelta x$，y の増分 $f(x+h)-f(x)$ を $\varDelta y$ としたとき

$$f'(x) = \lim_{\varDelta x\to0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$$

と書けることに由来する．$\dfrac{dy}{dx}$ は「ディーエックスぶんのディー・ワイ」ではなく「ディーワイ，ディーエックス」と読む．

たとえば，$y = x^2$ の導関数は

$$y' = 2x \quad や \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

などと表す．

また，x の関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を $\boldsymbol{x}$ について**微分** (differential) するという．関数を微分した結果を示すのに

$$(x^2)' = 2x$$

と書くこともある．

【例題：導関数を求める】

次の関数の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = x$　　(2) $f(x) = x^2$

(3) $f(x) = x^3$　　(4) $f(x) = 2x^3 - x^2$

【解答】

(1) 導関数 $f'(x)$ の定義より

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)-x}{h}\\ &= 1\\ &\to 1 \quad (h \to 0)\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{f'(x) = 1}$ となる.

◀ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(2) 導関数 $f'(x)$ の定義より

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \frac{2xh+h^2}{h}\\ &= 2x+h\\ &\to 2x \quad (h \to 0)\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{f'(x) = 2x}$ となる.

◀ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(3) 導関数 $f'(x)$ の定義より

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\ &= \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\ &= 3x^2+3xh+h^2\\ &\to 3x^2 \quad (h \to 0)\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$ となる.

◀ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(4) 導関数 $f'(x)$ の定義より

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \frac{2(x+h)^3-(x+h)^2-(2x^3-x^2)}{h}\\ &= \frac{2(3x^2h+3xh^2+h^3)-(2xh+h^2)}{h}\\ &= \frac{(6x^2-2x)h+(3x-1)h^2+h^3}{h}\\ &= 6x^2-2x+(3x-1)h+h^2\end{aligned}$$

◀ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\to 6x^2 - 2x \ \ (h \to 0)$

よって，$\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 2x}$ となる．

■x^n の導関数

p.262 の例題から，$(x)' = 1$，$(x^2)' = 2x$，$(x^3)' = 3x^2$ がわかった．このことより，n が自然数のとき

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

が推測できる．

【例題：x^n の導関数】

$f(x) = x^n$ のとき，$f'(x) = nx^{n-1}$ であることを証明せよ．ただし，n は自然数とする．

FTEXT数学 A で学んだ『2 項定理』を使う．

【解答】

2 項定理より

$$f(x+h) = (x+h)^n$$
$$= {}_n\mathrm{C}_0x^n + {}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2x^{n-1}h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nh^n$$

◀ 2 項定理
$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n$

であるから

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \frac{{}_n\mathrm{C}_0x^n + {}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2x^{n-1}h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nh^n - x^n}{h}$$
$$= {}_n\mathrm{C}_1x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2x^{n-1}h + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nh^{n-1}$$
$$\to {}_n\mathrm{C}_1x^{n-1} \ \ (h \to 0)$$
$$= nx^{n-1}$$

◀ ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ であるから ${}_n\mathrm{C}_0x^n = x^n$ なので $-x^n$ と打ち消しあった

つまり，$f'(x) = nx^{n-1}$ である．■

また，$f(x) = 1$ の導関数は

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1-1}{h} = 0 \to 0 \ \ (h \to 0)$$

となり，$x^0 = 1$ であるから次のようにまとめることができる．

x^n の導関数

n は 0 以上の整数とする．関数 $f(x) = x^n$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

となる．

「x^n の肩の指数 n が降りてきて，その値が一つ減る」などと覚えるとよい．

6.3.4 微分の計算法則

■微分の計算法則

微分の計算に関して，次のような法則が成り立つ．これらを使うと，複雑な関数の微分がより簡単にできる．

微分の計算法則

関数 $f(x)$，$g(x)$ の導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ が存在するとき

i) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$

ii) $\{kf(x)\}' = kf'(x)$

iii) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ （関数の積の微分法）

iv) $\{f(ax+b)\}' = af'(ax+b)$

【証明】

i)
$$
\begin{aligned}
&\{f(x) \pm g(x)\}' \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h) \pm g(x+h)\} - \{f(x) \pm g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h) - f(x)\} \pm \{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \qquad \leftarrow \text{『極限の計算法則 i)』(p.255)} \\
&= f'(x) \pm g'(x) \qquad \leftarrow \text{『極限の計算法則 iii)』(p.255)}
\end{aligned}
$$
■

ii)
$$
\begin{aligned}
&\{kf(x)\}' \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} \\
&= k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \leftarrow \text{『極限の計算法則 ii)』(p.255)} \\
&= kf'(x)
\end{aligned}
$$
■

iii)
$$
\begin{aligned}
&\{f(x)g(x)\}' \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + \lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \qquad \leftarrow \text{『極限の計算法則 i)』(p.255)}
\end{aligned}
$$

$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$　←『極限の計算法則 iii)』(p.255) ■

iv) $\{f(ax+b)\}'$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f((ax+b)+ah)-f(ax+b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f((ax+b)+ah)-f(ax+b)}{ah}\cdot a$$

$= f'(ax+b)\cdot a$　←『極限の計算法則 i)』(p.255)

$= af'(ax+b)$ ■

【例題：関数を微分する】

次の関数を微分せよ．

(1) $y = 2x^2 - 5x - 3$　(2) $y = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}$

(3) $y = (x^3+1)(x^2+5)$　(4) $y = (5x-2)^4$

【解答】

(1) 微分すると

$y' = (2x^2 - 5x - 3)'$

$= (2x^2)' - (5x)' - (3)'$　◀『微分の計算法則 i)』(p.264)

$= 2(x^2)' - 5(x)' - (3)'$　◀『微分の計算法則 ii)』(p.264)

$= 2\cdot 2x - 5 - 0$　◀『x^n の導関数』(p.263)

$= \mathbf{4x - 5}$

(2) 微分すると

$$y' = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)'$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3\right)' + \left(\frac{1}{2}x\right)' - \left(\frac{1}{3}\right)'$$ ◀『微分の計算法則 i)』(p.264)

$$= \frac{2}{3}(x^3)' + \frac{1}{2}(x)' - \left(\frac{1}{3}\right)'$$ ◀『微分の計算法則 ii)』(p.264)

$$= \frac{2}{3}\cdot 3x^2 + \frac{1}{2} - 0$$ ◀『x^n の導関数』(p.263)

$$= \mathbf{2x^2 + \frac{1}{2}}$$

(3) 微分すると

$$y' = \left\{(x^3+1)(x^2+5)\right\}'$$

$= (x^3+1)'(x^2+5) + (x^3+1)(x^2+5)'$　◀『微分の計算法則 iii)』(p.264)

$= 3x^2(x^2+5) + (x^3+1)2x$　◀『x^n の導関数』(p.263)

$= \mathbf{5x^4 + 15x^2 + 2x}$

(4) 微分すると

$y' = \left\{(5x-2)^4\right\}'$

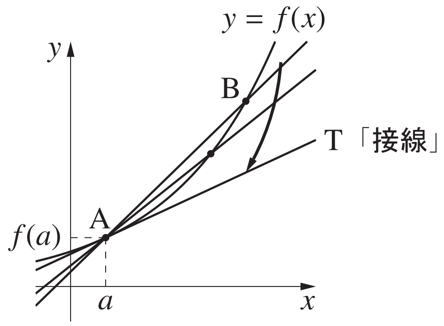
$= 5 \times 4(5x-2)^3$

$= \mathbf{20(5x-2)^3}$

◀『微分の計算法則 iv)』(p.264)

■**接線・法線の方程式**

微分係数 $f'(a)$ の意味は，右図の直線 AT の傾きである．



一般に，曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 A，B をとり，点 B をこの曲線上で点 A に近づけていくとき，直線 AB が点 A を通るある直線 AT に限りなく近づくならば，この直線 AT を曲線 $y = f(x)$ の**接線** (tangent) といい，この点 A をこの接線の**接点** (point of tangency) という．

つまり

関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は，
この関数のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾き

である．

FTEXT数学 I でも学んだように，傾きが m で点 $(x_0,\ y_0)$ を通る直線の方程式は

$y = m(x - x_0) + y_0$

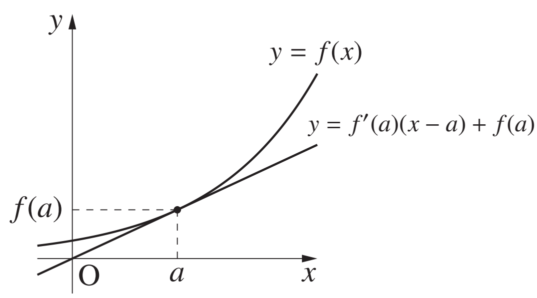
と表せたので，次のようにまとめることができる．

接線の方程式

関数 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

となる．



曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ を通り，この点における接線に直交する直線のことを**法線** (normal) という．接線の傾き $f'(a)$ に垂直な傾きは，$f'(a) \neq 0$ のとき $-\dfrac{1}{f'(a)}$ であるから，法線に関して次のようにまとめることができる．

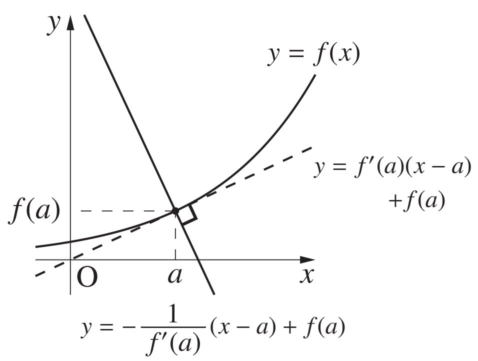
法線の方程式

関数 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は，$f'(a) \neq 0$ のとき

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

となる．

$f'(a)=0$ のとき，法線の方程式は $x=a$ となる．



【例題：曲線上の点が与えられた場合の接線の求め方】

次の曲線において，与えられた x 座標での曲線上の点における接線の方程式を求めよ．また，その点での法線の方程式も求めよ．

(1) $y=x^3-x$，$x=2$　　　(2) $y=-2x^3+x^2$，$x=-1$

【解答】

(1) まず，$f(x)=x^3-x$ とおくと

$$f(2)=2^3-2=6$$

であるから曲線上の点の座標は $(2,\ 6)$ とわかる．また，$f'(x)=3x^2-1$ より

$$f'(2)=3\cdot 2^2-1=11$$

以上より，求める接線の方程式は

$$y=11(x-2)+6$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{y=11x-16}$$

◀『接線の方程式』(p.266)

法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{11}(x-2)+6$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{y=-\frac{1}{11}x+\frac{68}{11}}$$

◀『法線の方程式』(p.267)

(2) まず，$f(x)=-2x^3+x^2$ とおくと

$$f(-1)=-2(-1)^3+(-1)^2=3$$

であるから曲線上の点の座標は $(-1,\ 3)$ とわかる．ま

た，$f'(x) = -6x^2 + 2x$ より

$$f'(-1) = -6(-1)^2 + 2(-1) = -8$$

以上より，求める接線の方程式は

$$y = -8(x+1) + 3$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{y = -8x - 5}$$

◀『接線の方程式』(p.266)

法線の方程式は

$$y = \frac{1}{8}(x+1) + 3$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{y = \frac{1}{8}x + \frac{25}{8}}$$

◀『法線の方程式』(p.267)

【例題：接線の傾きが与えられた場合の接線の求め方】

次の曲線の接線のうち，与えられた傾きとなる接線の方程式を求めよ．

(1) $y = 2x^2 - x + 5$，傾き 7　　(2) $y = x^3 - 6x$，傾き 6

【解答】

(1) まず，$f(x) = 2x^2 - x + 5$ とおくと，$f'(x) = 4x - 1$．傾きが 7 より

$$4x - 1 = 7$$
$$\Leftrightarrow\ x = 2$$

また，$f(2) = 2\cdot 2^2 - 2 + 5 = 11$ より，接点の座標は $(2,\ 11)$．
よって，求める接線の方程式は

$$y = 7(x-2) + 11$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{y = 7x - 3}$$

◀『接線の方程式』(p.266)

(2) まず，$f(x) = x^3 - 6x$ とおくと，$f'(x) = 3x^2 - 6$．傾きが 6 より

$$3x^2 - 6 = 6$$
$$\Leftrightarrow\ x = \pm 2$$

また，$f(2) = 2^3 - 6\cdot 2 = -4$，$f(-2) = (-2)^3 - 6(-2) = 4$ より，接点の座標は $(2,\ -4)$ または $(-2,\ 4)$．
よって，求める接線の方程式は

$$y = 6(x-2) - 4$$
$$\Leftrightarrow\ y = 6x - 16$$

◀『接線の方程式』(p.266)

$$y = 6(x+2)+4$$
$$\Leftrightarrow\ y = 6x+16$$

◀『接線の方程式』(p.266)

まとめると，$\boldsymbol{y = 6x - 16,\ y = 6x + 16}$

【例題：曲線上の点以外の点が与えられた場合の接線の求め方】

次の曲線の接線のうち，与えられた点を通る接線の方程式を求めよ．

(1) $y = 2x^2 - 3x + 1$，$(0,\ -1)$　　(2) $y = x^3 + 2x - 6$，$(4,\ 2)$

【解答】

(1) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ とおくと，$f'(x) = 4x - 3$．$(t,\ f(t))$ における $f(x)$ の接線の方程式は

$$y = (4t-3)(x-t) + 2t^2 - 3t + 1$$
$$\Leftrightarrow\ y = (4t-3)x - 2t^2 + 1$$

◀『接線の方程式』(p.266)

となる．これが $(0,\ -1)$ を通るとき

$$-1 = -2t^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow\ 2t^2 - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ t = \pm 1$$

よって，求める接線の方程式は

$$y = (4\cdot 1 - 3)x - 2\cdot 1^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow\ y = x - 1$$
$$y = \{4(-1) - 3\}x - 2(-1)^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow\ y = -7x - 1$$

まとめると，$\boldsymbol{y = x - 1,\ y = -7x - 1}$.

(2) $f(x) = x^3 + 2x - 6$ とおくと，$f'(x) = 3x^2 + 2$．$(t,\ f(t))$ における $f(x)$ の接線の方程式は

$$y = (3t^2+2)(x-t) + t^3 + 2t - 6$$
$$\Leftrightarrow\ y = (3t^2+2)x - 2t^3 - 6$$

◀『接線の方程式』(p.266)

となる．これが $(4,\ 2)$ を通るとき

$$2 = 12t^2 + 8 - 2t^3 - 6$$
$$\Leftrightarrow\ -2t^3 + 12t^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ t = 0,\ 6$$

よって，求める接線の方程式は

$$y=(3\cdot 0^2+2)x-2\cdot 0^3-6$$
$$\Leftrightarrow\ y=2x-6$$
$$y=\left\{3\cdot 6^2+2\right\}x-2\cdot 6^3-6$$
$$\Leftrightarrow\ y=110x-438$$

まとめると，$\boldsymbol{y=2x-6,\ y=110x-438}$.

【例題：2 次関数と接線の交点】

放物線 $y=ax^2$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(s,\ s^2)$，$\mathrm{B}(t,\ t^2)$ における接線をそれぞれ l，m とするとき，l と m の交点の x 座標が，点 A，B の中点の x 座標となることを示せ．ただし，$s\neq t$ とする．

【解答】

まず，接線 l の方程式を求める．

$f(x)=ax^2$ とおくと，$f'(x)=2ax$ であるから，点 $\mathrm{A}(s,\ s^2)$ における l の傾きは

$$f'(s)=2as$$

となるので，l の方程式は

$$y=2as(x-s)+as^2$$
$$\Leftrightarrow\ y=2asx-as^2 \quad \cdots\cdots ①$$

◀『接線の方程式』(p.266)

接線 m も同様にして

$$y=2atx-at^2 \quad \cdots\cdots ②$$

◀ ①の s を t におきかえれば計算の手間が省ける

①と②を連立して

$$\begin{cases} y=2asx-as^2\\ y=2atx-at^2 \end{cases}$$

上式から下式をひいて y を消去すると

$$2asx-as^2=2atx-at^2$$
$$\Leftrightarrow\ 2ax(s-t)=a(s^2-t^2)$$
$$\Leftrightarrow\ x=\frac{a(s+t)(s-t)}{2a(s-t)}=\frac{s+t}{2}$$

◀ $a\neq 0$，$s\neq t$

よって，l と m の交点の x 座標は，点 A と点 B の中点の x 座標 $\dfrac{s+t}{2}$ とつねに等しくなる．■

放物線の接線の交点

放物線上の異なる 2 点 A，B における接線をそれぞれ l，m とするとき，l と m の交点の x 座標は点 A，B の中点の x 座標と等しい．

§ 6.4

関数のグラフ

導関数は端的にいえば接線の傾きを表すものである．これを応用することにより，関数のグラフの概形を描くことができる．その方法について学んでいこう．

6.4.1　関数の増減と極大・極小

■区間とは何か

a，b を実数とするとき

$a < x < b$，$a \leqq x \leqq b$，$a < x$，$x \leqq b$

などの不等式を満たす実数 x の集合を，x の**区間** (interval) という．

■関数の増減

単調増加・単調減少

関数 $f(x)$ のある区間 I において，I に含まれる任意の値 s，t について

$$s < t \implies f(s) < f(t)$$

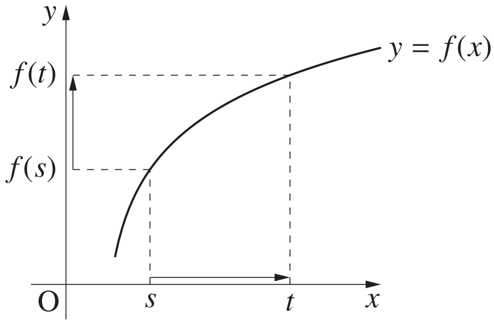
が成り立つとき，$f(x)$ はその区間 I で**単調増加** (monotonically increasing) するという．また

$$s < t \implies f(s) > f(t)$$

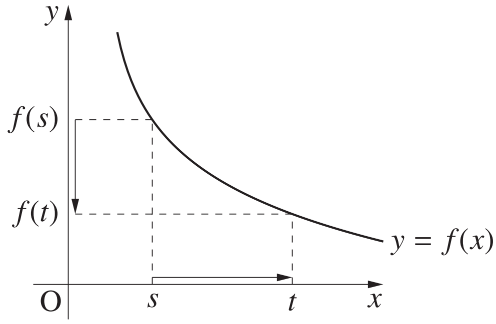
が成り立つとき，$f(x)$ はその区間 I で**単調減少** (monotonically decreasing) するという．

関数 $f(x)$ について，x の値が増加するとき，$f(x)$ の値が増加したり，減少したりする様子は，$y = f(x)$ のグラフが右上がりなのか，右下がりなのかで視覚的に確認できる．

単調増加の関数のグラフ

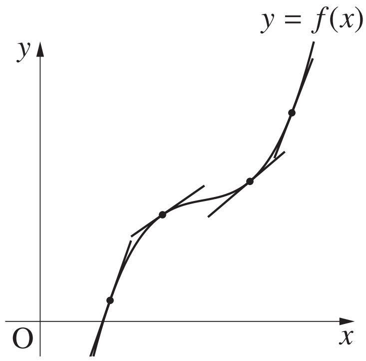


単調減少の関数のグラフ



■導関数の符号と関数の増加・減少の関係

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ に近い部分では，この関数のグラフはこの点における接線とほぼ一致しているとみなしてよい．接線の傾きは $f'(a)$ で与えることができるので，関数 $f(x)$ の増減は，$f'(x)$ の符号の正負と結びつけて考えることができる．

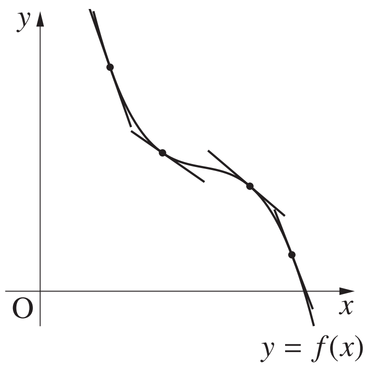


増加する関数 $f(x)$ では，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになる．このとき，このグラフ上の各点での接線は右上がりとなるので，その傾きは常に正の値をとることがわかる．逆に，グラフ上の各点における接線の傾きが正であるならば，その関数は増加していることがわかる．

つまり，ある区間での関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について

$$f'(x) > 0 \iff f(x) \text{ は単調増加}$$

がいえる．



また，右図のように，グラフ上の各点における接線の傾きが負であるならば，その関数は減少していることがわかる．

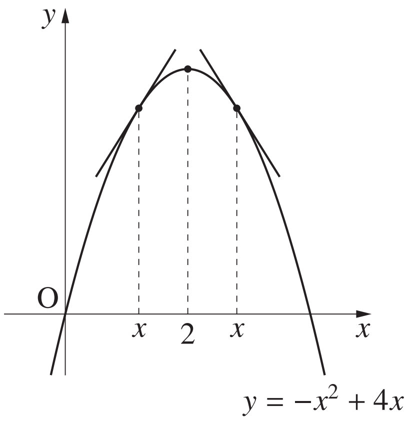
つまり，ある区間での関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について

$$f'(x) < 0 \iff f(x) \text{ は単調減少}$$

がいえる．

さらにまた，ある区間で常に $f'(x) = 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフの接線は常に x 軸と平行となる．このとき，グラフ自体も x 軸と平行となり，その区間では $f(x)$ は一定の値をとる．

■増減の例



具体的な関数の例として，2 次関数 $f(x) = -x^2 + 4x$ としてを考えてみよう．$y = f(x)$ のグラフは

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x \\ &= -(x-2)^2 + 4 \qquad \leftarrow \text{ 平方完成した} \end{aligned}$$

であるから，頂点の座標は $(2,\ 4)$ とわかり，右図のようになる．

この図から

i) $x < 2$ のときは，$f(x)$ は増加

ii) $x > 2$ のときは，$f(x)$ は減少

ということがわかるが，このことは，$f(x)$ の導関数

$$f'(x) = -2x + 4$$

を用いて，次のように理解することもできる.

i) $-2x + 4 > 0$ つまり，$x < 2$ のとき
「$f'(x) > 0$ となるので」，$f(x)$ は増加している.

ii) $-2x + 4 < 0$ つまり，$x > 2$ のとき
「$f'(x) < 0$ となるので」$f(x)$ は減少している.

$f'(x)$ の符号と関数の増加・減少の関係

関数 $f(x)$ の値の増減は，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を用いて

i) $f'(x) > 0$ となる x の値の範囲では，y の値は増加する
ii) $f'(x) < 0$ となる x の値の範囲では，y の値は減少する

と判断できる.

…… これから先扱おうとしている関数は，2 次関数のように簡単に増加・減少のわかるものではない．そのため，この導関数 $f'(x)$ の正・負から，関数の増加・減少を判断できるようにしておかなければならない.

■**極大・極小とは何か**

関数 $f(x)$ の値が $x = a$ を境目として，右図のように増加から減少に変わるとき

$f(x)$ は $x = a$ で**極大** (maximum) になる

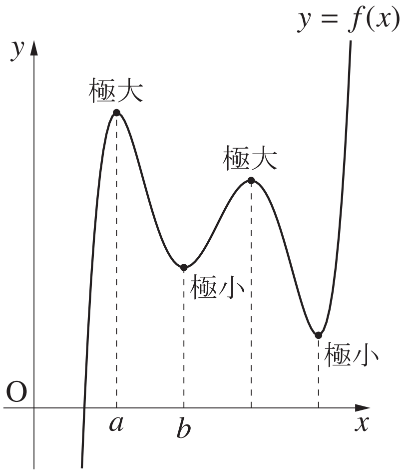
といい，$f(a)$ を**極大値** (muximal value) という.

また，関数 $f(x)$ の値が $x = b$ を境目として，減少から増加に変わるとき

$f(x)$ は $x = b$ で**極小** (minimum) になる

といい，$f(b)$ を**極小値** (minimal value) という.

極大値と極小値を合わせて**極値** (extreme value) という.



$f'(x)$ の符号と極大・極小

関数 $f(x)$ について，$f'(x) = 0$ となる x の値の前後における $f'(x)$ の符号が

i) 正から負に変化するとき，$f(x)$ は極大
ii) 負から正に変化するとき，$f(x)$ は極小

となる.

6.4.2　増減表を用いたグラフの描き方

■増減表の書き方

導関数の符号の変化がわかると，かなり正確なグラフを描くことができるようになる．ここでは，関数の増減をまとめるための**増減表** (table of increasing and decreasing) の書き方について，次の例題を通じて学んでいこう．

【例題：導関数を利用したグラフの書き方】

関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ において，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ．

(3) $f'(x) > 0$ となる x の値の範囲，および $f'(x) < 0$ となる x の値の範囲を求めよ．

(4) $f'(x) = 0$ となるときの，$f(x)$ の値を求めよ．

(5) (1)〜(4) を利用して，下の増減表の空欄を埋めよ．

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$					
$f(x)$					

ただし

i) x の欄には，(2) で求めた値

ii) $f'(x)$ の欄には，$-$，0，$+$ のいずれか

iii) $f(x)$ の欄には ↗ (増加を表す記号)， ↘ (減少を表す記号)，値

が入る．

(6) (5) を利用して，$y = f(x)$ のグラフを描け．

【解答】

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ を微分すると

$$f'(x) = \mathbf{3x^2 - 12x + 9}$$

となる．

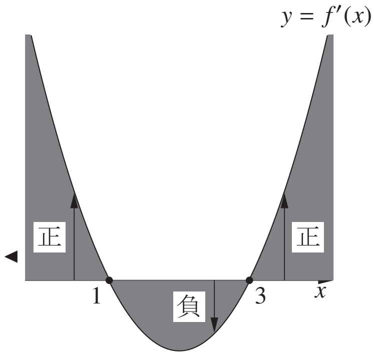
(2) (1) より

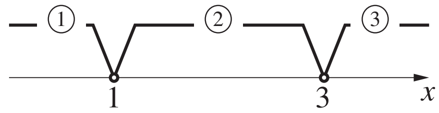
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

と因数分解できるので，$f'(x) = 0$ となる x は，$x =$ **1, 3**.

(3) まず，(2) より $f'(x) = 0$ となる x は 1, 3 であり，これを数直線上に表すと

下のように $y = f'(x)$ のグラフを考えてもよい





となる．これより

i) ① つまり $x<1$ のとき

$$f'(x)=3\underbrace{(x-1)}_{\text{負}}\underbrace{(x-3)}_{\text{負}}$$

となり，$f'(x)>0$ となるのがわかる．

ii) ② つまり $1<x<3$ のとき

$$f'(x)=3\underbrace{(x-1)}_{\text{正}}\underbrace{(x-3)}_{\text{負}}$$

となり，$f'(x)<0$ となるのがわかる．

iii) ③ つまり $3<x$ のとき

$$f'(x)=3\underbrace{(x-1)}_{\text{正}}\underbrace{(x-3)}_{\text{正}}$$

となり，$f'(x)>0$ となるのがわかる．

以上 i)〜iii) より，$f'(x)>0$ となるのは $x<1,\ 3<x$ のときであり，$f'(x)<0$ となるのは $1<x<3$ のときである．

(4) (2) より，$f'(x)=0$ となるのは，$x=1,\ 3$ のときだから

$$f(1)=1^3-6\cdot 1^2+9\cdot 1=\mathbf{4}$$
$$f(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3=\mathbf{0}$$

と求まる．

(5) **STEP1　x の欄を埋める**

ここには，$f'(x)=0$ となる x を入れる．(2) の結果より

x	$\cdots$	**1**	$\cdots$	**3**	$\cdots$
$f'(x)$					
$f(x)$					

となる．

STEP2　$f'(x)$ の欄を埋める

STEP1 で埋めた欄のすぐ下の欄には 0 が入る．なぜ

なら，STEP1 で埋めた x の値は，$f'(x)$ が 0 になるときの x の値だからである．また，それ以外の部分には (3) の結果を利用して正ならば +，負ならば − を埋める．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	**+**	**0**	**−**	**0**	**+**
$f(x)$					

STEP3　$f(x)$ の欄を埋める

STEP2 より $x = 1$ や $x = 3$ の値の前後では，$f'(x)$ の符号が変わっているので，$f(x)$ は $x = 1$ で極大，$x = 3$ で極小となる．まず，(4) で得た極大値 $f(1) = 4$ や，極小値 $f(3) = 0$ を増減表に埋める．

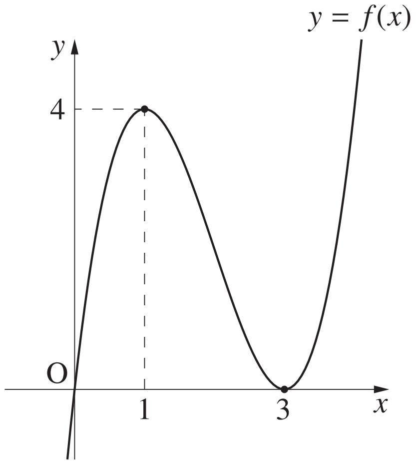
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$		**4**		**0**	

最後に $f'(x)$ が + の欄の下には，$f(x)$ が増加するという意味で ↗ ，$f'(x)$ が − の欄の下には，$f(x)$ が減少するという意味で ↘ を書き加えて増減表が完成する．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

(6) (5) で得られた増減表を利用して $y = f(x)$ のグラフを描くと，以下のようになる．

◀ $f(0) = 0$ なので，$y = f(x)$ のグラフは原点 $(0, 0)$ を通ることに注意



【例題：導関数を利用したグラフの描画】

次の各々の関数において，$y=f(x)$ のグラフを描け．

(1) $f(x)=x^3-x^2-x+2$ (2) $f(x)=-x^3+3x$

(3) $f(x)=x^3-2x^2+2x-1$ (4) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2-2x+2$

【解答】

(1) $f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2-2x-1$$
$$=(3x+1)(x-1)$$

これより，増減表は

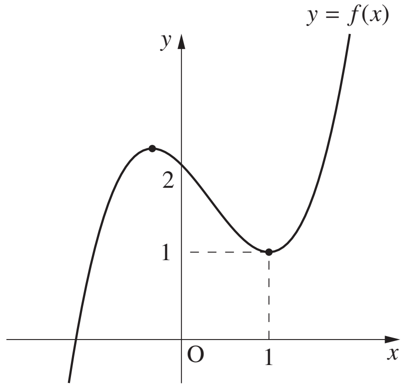
x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{1}{3}\right)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

となる．ここで，$f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$，$f(1)$ の値は

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)+2=\frac{59}{27}$$
$$f(1)=1^3-1^2-1+2=1$$

である．

以上より，$y=f(x)$ のグラフは，右図のようになる．



(2) $f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=-3x^2+3$$
$$=-3(x+1)(x-1)$$

これより，増減表は

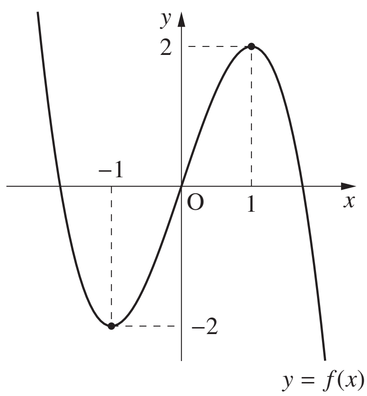
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$

となる．ここで，$f(-1)$，$f(1)$ の値は

$$f(-1)=-(-1)^3+3\cdot(-1)=-2$$
$$f(1)=-1^3+3\cdot 1=2$$

である．

以上より，$y=f(x)$ のグラフは，右図のようになる．



(3) $f(x)$ を微分すると

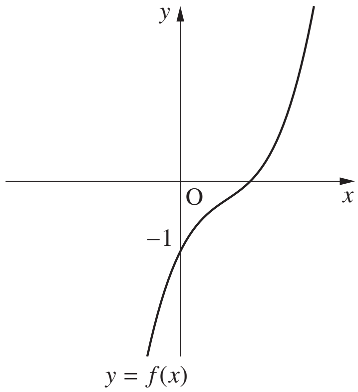
$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

ここで，$3x^2 - 4x + 2$ の判別式 $D/4$ は

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2 < 0$$

なので，$f'(x)$ はつねに正である．

よって，$y = f(x)$ のグラフは，右図のようになる．◀



(4) $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = x^3 - 3x - 2$$
$$= (x+1)^2(x-2)$$

◀ $f'(-1) = 0$ なので『因数定理』(p.63) を利用して因数分解した．

これより，増減表は

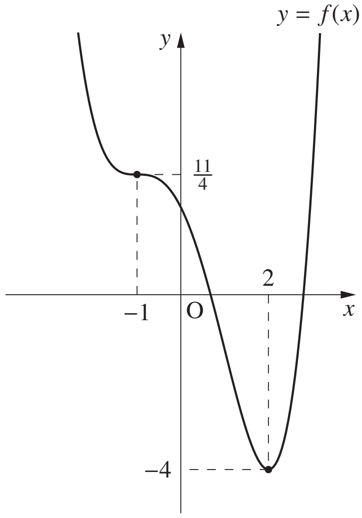
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$

となる．ここで，$f(-1)$，$f(2)$ の値は

$$f(-1) = \frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2 = \frac{11}{4}$$
$$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = -4$$

である．

以上より，$y = f(x)$ のグラフは，右図のようになる．◀



■**関数の最大・最小**

定義域内での関数の値の増減を調べ，極値と定義域の両端での値を比べることにより，最大値と最小値を求めることができる．

【例題：関数の最大・最小】

次の関数の最大値，最小値とそれらを与える x の値を求めよ．

(1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \ (-2 \leqq x \leqq 3)$

(2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \ (-1 \leqq x \leqq 2)$

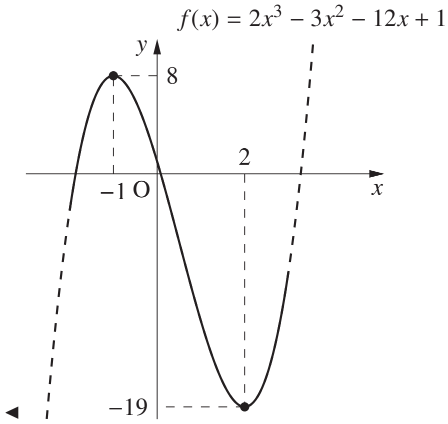
【解答】

(1) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$ より，区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	8	↘	-19	↗	-8

これより，$y = f(x)$ のグラフは右欄外の図のようになる．

$x = -1$ のとき最大値 8，$x = 2$ のとき最小値 -19．

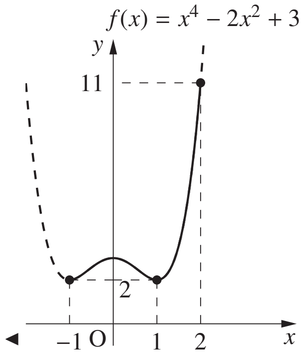


(2) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$ より，区間 $-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	3	↘	2	↗	11

これより，$y = f(x)$ のグラフは右欄外の図のようになる．

$x = 2$ のとき最大値 11，$x = \pm 1$ のとき最小値 2．



【例題：関数の最大・最小の応用】

底面の半径と高さの和が 30cm の円錐で体積が最大となるときの底面の半径と高さと体積を求めよ．

【解答】

底面の半径を r cm，箱の体積を $f(r)$ cm^3 とすると，$f(r) = \pi r^2 \cdot (30 - r) = -\pi r^3 + 30\pi r^2 \quad (0 < r < 30)$，$f'(r) = -3\pi r(r - 20)$ となるので，$f(r)$ の増減表は次のようになる．

rx	0	$\cdots$	20	$\cdots$	30
$f'(r)$		$+$	0	$-$	
$f(r)$		↗	極大	↘	

よって，**$r = 20$ cm にすればよい**．また，このときの体積は **4000π cm^3** である．

6.4.3　3 次関数のグラフ

■3 次関数のグラフの種類

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \fallingdotseq 0)$ とおき，3 次関数のグラフ $y = f(x)$ を考える．$f(x)$ を微分すると $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ より，方程式 $f'(x) = 0$ は 2 次方程式となるのがわかる．この 2 次方程式の解は，判別式 $\dfrac{D}{4} = b^2 - 3ac$ の符号を考えることによって 3 つに分

類できる．以下では，$y = f(x)$ のグラフの形を，この 2 次方程式の解のあり様に対応させて考えてみる．

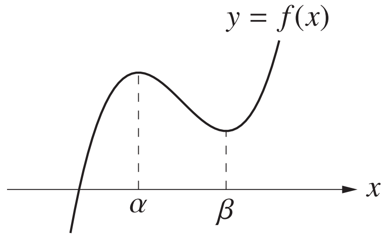
1) $b^2 - 3ac > 0$ のとき

方程式 $f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもち，それらを $\alpha, \beta\ (\alpha > \beta)$ とおくと $f'(x) = 3a(x-\alpha)(x-\beta)$ となるので，$f(x)$ の増減表は以下のようになる．

a) $a > 0$ のとき

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

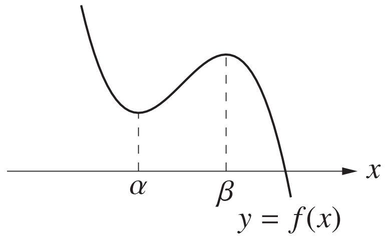
これをグラフにすると右図のようになる．



b) $a < 0$ のとき

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

これをグラフにすると右図のようになる．



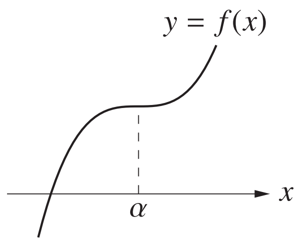
2) $b^2 - 3ac = 0$ のとき

方程式 $f'(x) = 0$ は重解をもち，それを α とおくと $f'(x) = 3a(x-\alpha)^2$ となるので，$f(x)$ の増減表は以下のようになる．

a) $a > 0$ のとき

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\nearrow$

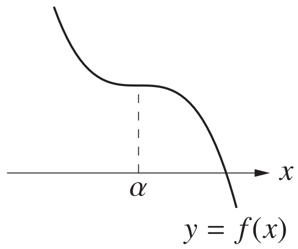
これをグラフにすると右図のようになる．



b) $a < 0$ のとき

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\searrow$

これをグラフにすると右図のようになる．

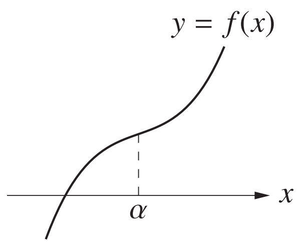


3) $b^2 - 3ac < 0$ のとき

方程式 $f'(x) = 0$ は重解をもたない．このとき，$f'(x)$ を平方完成すると $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3a\left(x + \dfrac{b}{3a}\right)^2 - \dfrac{b^2-3ac}{3a}$ であり，$-\dfrac{b^2-3ac}{3a}$ は a の符号と一致する．

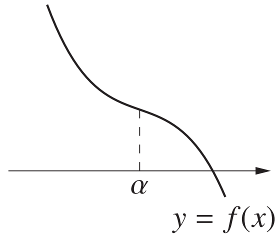
a) $a > 0$ のとき

$f'(x) = 3a\left(x + \dfrac{b}{3a}\right)^2 - \dfrac{b^2-3ac}{3a}$ は常に正であり，$x = -\dfrac{b}{3a}$ のとき，最小値 $-\dfrac{b^2-3ac}{3a}$ となるので，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになる．



b) $a < 0$ のとき

$f'(x) = 3a\left(x + \dfrac{b}{3a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 3ac}{3a}$ は常に負であり，$x = -\dfrac{b}{3a}$ のとき，最大値 $-\dfrac{b^2 - 3ac}{3a}$ となるので，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになる．



■3 次関数のグラフの特徴

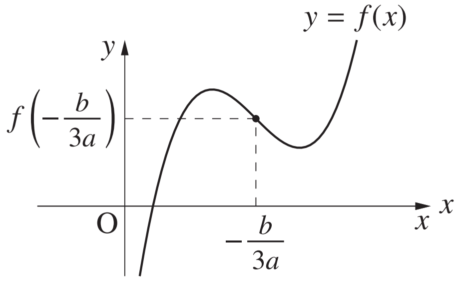
3 次関数のグラフに関して次のことがいえる．

3 次関数のグラフの特徴

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ において，$y = f(x)$ のグラフは，$y = f(x)$ 上の点

$$\left(-\frac{b}{3a},\ f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$$

に関して，点対称なグラフである*5．



証明は次の例題を参照のこと．

【暗記：3 次関数のグラフの特徴の証明】

上にある『3 次関数のグラフの特徴』を，以下の手順で証明せよ．

(1) 3 次関数 $g(x) = Ax^3 + Bx$ において，$y = g(x)$ のグラフは原点対称であることを示せ．

(2) 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ において，$y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{b}{3a}$，y 軸方向に $-f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)$ 平行移動したものは適当な実数 A，B をもちいて，$y = Ax^3 + Bx$ と表せることを示せ．

以上，(1)，(2) から『3 次関数のグラフの特徴』が証明される．

【解答】

(1) $y = g(x)$ のグラフが原点対称であることを示すには，原点に関する対称移動をさせてみて，もとと同じ形のグラフになるか調べればよい．

そのために，以下では $-g(-x) = g(x)$ を示す．

$$-g(-x) = -\left\{A(-x)^3 + B(-x)\right\}$$

◀ 原点に関する対称移動を行うには $y = -g(-x)$ とすればよい（FTEXT 数学 I 付録『グラフの移動について』，または『偶関数と奇関数のグラフの特徴』(p.320) 参照）

*5 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ は $y = f(x)$ の**変曲点** (point of inflexion) と呼ばれる点である．変曲点については FTEXT数学 III で学ぶ．

$$= -(-Ax^3 - Bx) = g(x)$$

より，$y = g(x)$ のグラフは原点対称である． ■

(2) $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{b}{3a}$，y 軸方向に $-f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)$ 平行移動すると

$$\begin{aligned}
y &= a\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d \\
&\quad - f\left(-\frac{b}{3a}\right) \\
&= a\left(x^3 - \frac{bx^2}{a} + \frac{b^2x}{3a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) \\
&\quad + b\left(x^2 - \frac{2bx}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right) \\
&\quad + c\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d \\
&\quad - \left\{a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d\right\} \\
&= ax^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)x
\end{aligned}$$

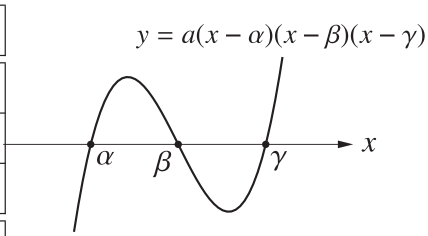
となるので，$a = A$，$-\dfrac{b^2}{3a} + c = B$ とおくと，確かに $y = Ax^3 + Bx$ と表せる． ■

■3 次関数のグラフと 3 次不等式

以下では，$\alpha < \beta < \gamma$ とし，簡単のため $a > 0$ の場合について考える．

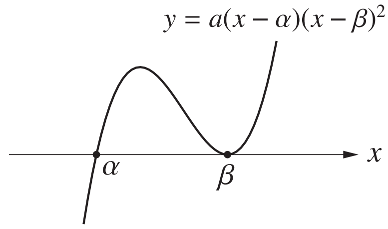
$y = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のグラフの形は，$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ の符号が下の表のようにまとめられることと，『3 次関数のグラフの種類』(p.280) の話から右下の図のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$x-\alpha$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\gamma$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



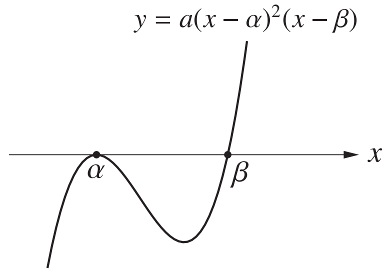
また，$y = a(x-\alpha)(x-\beta)^2$ のグラフの形も，$(x-\alpha)(x-\beta)^2$ の符号が下の表のようにまとめられることから右下の図のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$x-\alpha$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-\beta)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$(x-\alpha)(x-\beta)^2$	$-$	0	$+$	0	$+$



さらに，$y = a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ のグラフの形も，$(x-\alpha)^2(x-\beta)$ の符号が下の表のようにまとめられることから右下の図のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$(x-\alpha)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$	$-$	0	$-$	0	$+$



【例題：p.80 および p.??の問題を再掲】

次の不等式を解け．

(1) $x^3 + 3x^2 - 4 > 0$

(2) $2x^3 - 7x^2 + 9 \leqq 0$

(3) $3x^3 - 4x^2 + 4x - 1 < 0$

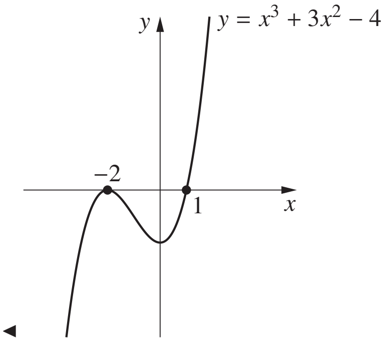
(4) $24x^3 - 22x^2 + x + 2 \geqq 0$

【解答】

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ とおくと，$f(1) = 0$ なので

$$f(x) = (x-1)(x^2+4x+4)$$
$$\Leftrightarrow\ f(x) = (x-1)(x+2)^2$$

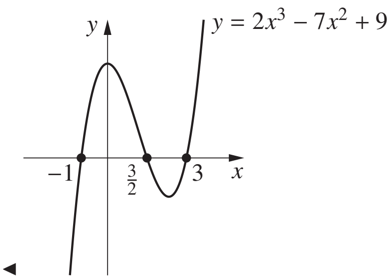
より $y = f(x)$ のグラフは右欄外の図となるので，$f(x) > 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{1 < x}$ である．



(2) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9$ とおくと，$f(-1) = 0$ なので

$$f(x) = (x+1)(2x^2-9x+9)$$
$$\Leftrightarrow\ f(x) = (x+1)(2x-3)(x-3)$$

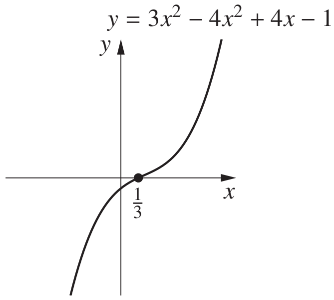
より $y = f(x)$ のグラフは右欄外の図となるので，$f(x) \leqq 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{x \leqq -1,\ \frac{3}{2} \leqq x \leqq 3}$ である．



(3) $f(x) = 3x^2 - 4x^2 + 4x - 1$ とおくと，$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$ なので

$$f(x) = (3x - 1)(x^2 - x + 1)$$

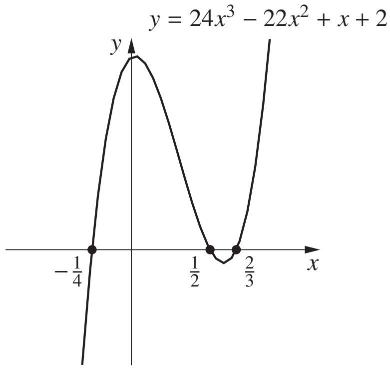
より $y = f(x)$ のグラフは右欄外の図となるので，$f(x) < 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{x < \dfrac{1}{3}}$ である．



(4) $f(x) = 24x^3 - 22x^2 + x + 2$ とおくと，$f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 0$ なので

$$f(x) = (4x + 1)(6x^2 - 7x + 2)$$
$$\Leftrightarrow\ f(x) = (4x + 1)(2x - 1)(3x - 2)$$

より $y = f(x)$ のグラフは右欄外の図となるので，$f(x) \geqq 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3} \leqq x}$ である．



§ 6.5
方程式・不等式への応用

前節までに学んだ関数のグラフを活用することにより，方程式の実数解の様子を調べたり，不等式を証明したりできるようになる．ここでは，その方法について考えてみよう．

6.5.1　方程式の解の個数

■方程式の解の個数とグラフの関係

たとえば，方程式

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

の実数解の個数はいくつかという問いを考えてみよう．

この方程式①の実数解は，関数

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \quad \cdots\cdots ②$$

のグラフと，x 軸との交点の x 座標であるといえる．なぜなら，このグラフ②と x 軸 $(y = 0)$ の交点の x 座標を求めるのには，連立方程式

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

を解くことになり，これから y を消去すると結局，方程式①の実数解を求めることになるからである．したがって，①の実数解の様子は，②のグラフを調べることによって判断することができる．

②を x で微分すると

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

となるので，増減表は次の表のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(-3)$	$\nearrow$

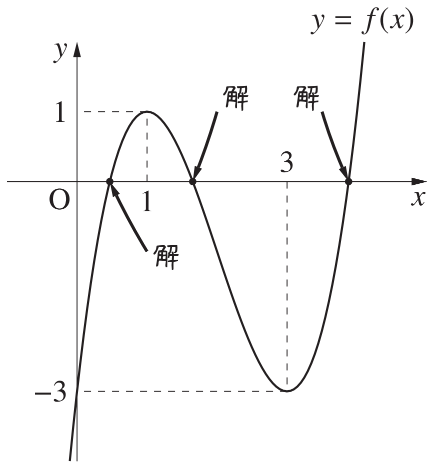
いま，$f(1)$，$f(3)$ の値は

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1$$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3$$

なので，②のグラフを描くと，右図のようになる．

この図より，②のグラフは x 軸と 3 つの交点をもつので，方程式① は 3 つの実数解をもつことがわかる．



解の具体的な値がわからなくとも，グラフが描ければ，解の個数だけならわかるという点に注意しよう．

【例題：3 次方程式の解の個数（定数を分離する方法）】

a を定数とするとき，方程式

$$x^3 - 3x^2 + a = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 方程式①が異なる 3 つの実数解をもつ a の値の範囲を求めよ．

(2) 方程式①が異なる 3 つの実数解をもつとする．この解を α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ とおくとき，β のとり得る値の範囲を求めよ．

【解答】

与えられた方程式①は

$$a = -x^3 + 3x^2$$

◀ 文字で表された定数 a を分離して考える．

と変形できるので，この方程式の実数解は，$y = -x^3 + 3x^2$ のグラフと $y = a$ のグラフの交点の x 座標に等しい．

◀ なぜなら，$y = -x^3 + 3x^2$ のグラフと $y = a$ のグラフの交点の x 座標を求めるとき，この 2 式を連立して $\begin{cases} y = -x^3 + 3x^2 \\ y = a \end{cases}$ を解く際に y を消去して，方程式 $-x^3 + 3x^2 = a$ を解くからである．

ここで，$f(x) = -x^3 + 3x^2$ とおくと

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$$

となるので，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$

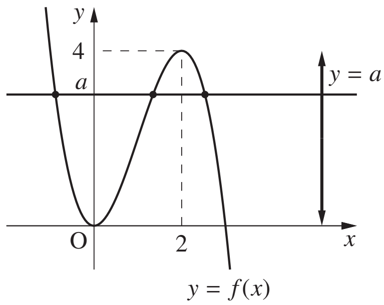
となる．

(1) 上の増減表より，$y = f(x)$ のグラフは右図のように

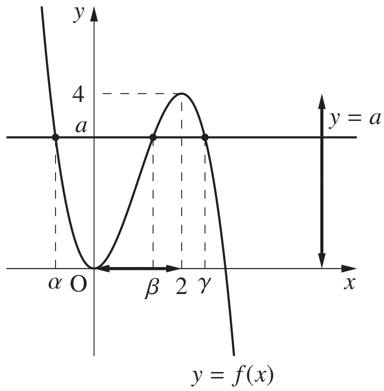
なる．

これに $y=a$ のグラフを重ねたとき，$y=f(x)$ のグラフとの交点が 3 つになるとき，方程式①が 3 つの異なる実数解をもつ．

このような，a の値の範囲は，右欄外の図より $\mathbf{0<a<4}$ である．



(2) $y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの交点の x 座標が，方程式①の解であるから，右欄外の図より β のとり得る値の範囲は，$\mathbf{0<\beta<2}$ となる．



【例題：3 次方程式の解の個数（定数を分離できない場合）】

a を定数とするとき，方程式

$$x^3-3x^2-3a(a-2)x-1=0 \quad \cdots\cdots ①$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 方程式①が異なる 3 つの実数解をもつ a の値の範囲を求めよ．

(2) 方程式①が異なる 3 つの実数解をもつとする．この解を α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ とおくとき，β のとり得る値の範囲を求めよ．

【解答】

与えられた方程式①の実数解は，$y=x^3-3x^2-3a(a-2)x-1$ のグラフと x 軸（$y=0$ のグラフ）の交点の x 座標に等しい．

◀ なぜなら，$y=x^3-3x^2-3a(a-2)x-1$ のグラフと x 軸（$y=0$）の交点の x 座標を求めるとき，この 2 式を連立して
$$\begin{cases} y=x^3-3x^2-3a(a-2)x-1 \\ y=0 \end{cases}$$
を解く際に y を消去して，方程式 $x^3-3x^2-3a(a-2)x-1=0$ を解くからである．

ここで，$f(x)=x^3-3x^2-3a(a-2)x-1$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-6x-3a(a-2)=3(x-a)(x+a-2)$$

となるので，$x=a,\ -a+2$ で $f'(x)$ の値は 0 となる．

ここで，a と $-a+2$ が等しい場合，つまり

$$a=-a+2 \iff a=1$$

の場合には，$f'(x)=3(x-1)^2$ となり，増減表は以下のようになる．

◀ この場合 $(a=1)$ は，方程式①は 3 つの異なる実数解をもたないので，その議論を先に済ませておく．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

このとき，$f(x)$ は増加するだけなので，$y = f(x)$ のグラフが x 軸と 3 つの交点をもつことはない．したがって，以下，$a \fallingdotseq 1$ の場合について考える．

◀ この場合 $(a \fallingdotseq 1)$ は，方程式①は 3 つの異なる実数解をもちうる．

$a \fallingdotseq 1$ の場合の増減表は，次の 2 種類になる．

i) $a < 1$ のとき

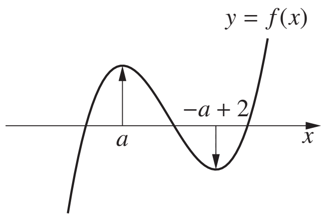
x	$\cdots$	a	$\cdots$	$-a+2$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘	$f(-a+2)$	↗

ii) $a > 1$ のとき

x	$\cdots$	$-a+2$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$f(-a+2)$	↘	$f(a)$	↗

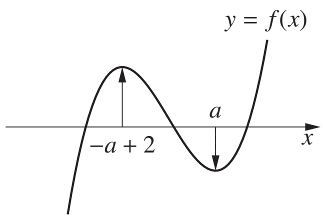
i) の場合に，$y = f(x)$ と x 軸が 3 つの交点をもつ条件は

$f(a) > 0$ かつ $f(-a+2) < 0$　……………………②

◀ 

ii) の場合に，$y = f(x)$ と x 軸が 3 つの交点をもつ条件は

$f(-a+2) > 0$ かつ $f(a) < 0$　……………………③

◀ 

であるが，この条件は，$f(a)$ と $f(-a+2)$ が異符号であることと同値で，②と③は

$f(a) \cdot f(-a+2) < 0$

とまとめることができる．ここで

$$f(a) = -2a^3 + 3a^2 - 1 = -(a-1)^2(2a+1)$$
$$f(-a+2) = (a-1)^2(2a-5)$$

であるから

$$f(a)f(-a+2) < 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^4(2a+1)(2a-5) > 0$$
$$\Leftrightarrow (2a+1)(2a-5) > 0 \qquad \because a \fallingdotseq 1,\ (a-1)^4 > 0$$

より，$\boldsymbol{a < -\frac{1}{2},\ \frac{5}{2} < a}$ が答えとなる．

6.5.2　不等式の証明

■不等式の証明

$x \geqq 0$ で，不等式

$$x^3 \geqq 6x^2 - 9x$$

を証明するためには，これと同値である

$$x^3 - 6x^2 + 9x \geqq 0$$

を証明すればよい．それには，$x \geqq 0$ で関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ の増減を調べ，$f(x) \geqq 0$ を示せばよい．

【例題：不等式の証明】

$x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$x^3 \geqq 6x^2 - 9x$$

【解答】

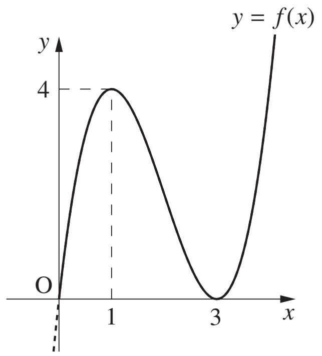
$x^3 \geqq 6x^2 - 9x \iff x^3 - 6x^2 + 9x \geqq 0$ であるから，$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ が $x \geqq 0$ で，常に $f(x) \geqq 0$ となることを示せばよい．

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

となるので，$x \geqq 0$ における増減表は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

これより，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになるから，$f(x)$ は $x \geqq 0$ で常に $f(x) \geqq 0$ を満たす．■ ◀



【例題：文字定数を含む不等式】

$x \geqq 0$ のとき，不等式

$$x^3 - 6x^2 > a$$

が常に成り立つのは，定数 a がどのような範囲にあるときか求めよ．

【解答 1：左辺 − 右辺 > 0 を考える方法】

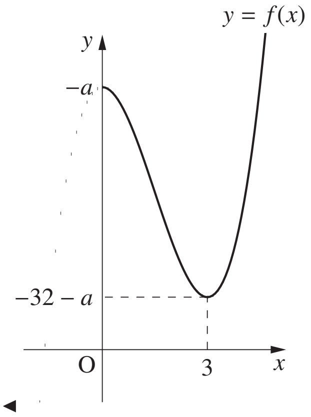
$x^3 - 6x^2 > a \iff x^3 - 6x^2 - a > 0$ であるから，$f(x) = x^3 - 6x^2 - a$ が $x \geqq 0$ で，常に $f(x) > 0$ となるための a の

値の範囲を求めればよい．

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

となるので，$x \geqq 0$ における増減表は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$



$$f(0) = -a$$

$$f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 - a = -32 - a$$

$x \geqq 0$ で，常に $f(x) > 0$ となるには，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになればよいから

$$-32 - a > 0 \iff \boldsymbol{a < -32}$$

【解答 2：文字定数を分離する方法】

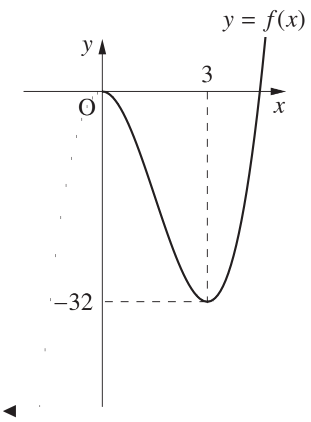
$f(x) = x^3 - 6x^2$ とおく．

$f(x) = x^3 - 6x^2$ が $x \geqq 0$ で，常に $f(x) > a$ となるための a の値の範囲を求めればよい．

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

となるので，$x \geqq 0$ における増減表は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$



$$f(0) = 0$$

$$f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 = -32$$

$y = f(x)$ のグラフは右図のようになるので，$x \geqq 0$ で，常に $f(x) > a$ となるための a の値の範囲は，$\boldsymbol{a < -32}$

§ 6.6

接線とグラフ

最後に微分法の応用として，曲線と接線にまつわるいくつかの論点についてまとめる．

6.6.1　2 つの曲線の接点

■2 つの曲線が接するということ

右図のように，2 つの曲線 $C : y = f(x)$ と $D : y = g(x)$ が $x = \alpha$ で共通の接線をもつとき，この 2 つの曲線は $x = \alpha$ で接するという．

曲線 C の $x = \alpha$ での接線の方程式は，「接線の方程式 (p.266)」より

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow\ y = \underbrace{f'(\alpha)}_{\text{傾き}}\,x \underbrace{-\alpha f'(\alpha) + f(\alpha)}_{\text{切片}} \qquad \cdots\cdots ①$$

また，曲線 D の $x = \alpha$ での接線の方程式も同様にして

$$y = \underbrace{g'(\alpha)}_{\text{傾き}}\,x \underbrace{-\alpha g'(\alpha) + g(\alpha)}_{\text{切片}} \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．

この 2 つの直線①と②が共通であるとは，傾きと切片がそれぞれ等しいということなので，$f'(\alpha) = g'(\alpha)$ かつ $-\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\alpha g'(\alpha) + g(\alpha)$，つまり

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\alpha) \\ f(\alpha) = g(\alpha) \end{cases}$$

が成り立つ．まとめると次のようになる．

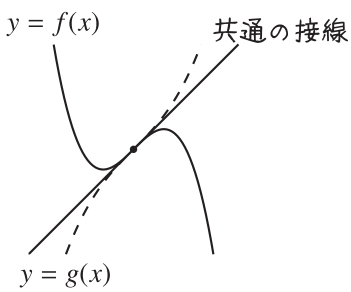
2 つの曲線が接することの定義

2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = \alpha$ で共通の接線をもつとき，この 2 つの曲線は $x = \alpha$ で**接する** (contact) という．このことを式で表すと

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\alpha) \\ f(\alpha) = g(\alpha) \end{cases}$$

が成り立つということである．

この式が成り立つことをもって，2 つの曲線が接することの定義とするので，たとえば右図のように 2 つの曲線が交差している場合にも，共通の接線がある以上「接する」というので注意しよう．



■**曲線が接するときに成り立つ定理**

曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ において，この 2 つの曲線が $x=\alpha$ で接するとき，次の定理が成り立つ．

曲線が接するときに成り立つ定理

多項式 $f(x)$，$g(x)$ において

(A)「曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=\alpha$ で接する」
$\Longleftrightarrow$ (B)「方程式 $f(x)=g(x)$ は $x=\alpha$ を重解にもつ」

が成り立つ．

証明は次の例題を通じて考えてみよう．

【暗記：「2 つの曲線が接する」$\Longleftrightarrow$「重解をもつ」の証明】

(1) x の多項式 $f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割ったときの余りを $f(\alpha)$ と $f'(\alpha)$ をもちいて表せ．
(2) (1) を用いて
「$f(\alpha)=0$ かつ $f'(\alpha)=0$」$\Longleftrightarrow$「$f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割りきれる」
を証明せよ．
(3) 多項式 $f(x)$，$g(x)$ において

(A)「曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=\alpha$ で接する」
$\Longleftrightarrow$ (B)「方程式 $f(x)=g(x)$ は $x=\alpha$ を重解にもつ」

を証明せよ．

【解答】

(1) $f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

と表せる．
この式を x で微分すると

$$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+a \qquad \cdots ②$$

◀ 微分の計算法則 iii), iv)(p.264)

①，②の x に α を代入して

$$f(\alpha) = a\alpha + b$$
$$f'(\alpha) = a$$

この 2 式を a, b について解くと, $a = f'(\alpha), b = f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$ となるので，余りは $\boldsymbol{f'(\alpha)x + f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)}$ となる.

(2) (1) より多項式 $f(x)$ は

$$f(x) = (x-\alpha)^2 Q(x) + f'(\alpha)x + f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$$

と表せるから

「$f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割りきれる」

$\Leftrightarrow f'(\alpha) = 0$ かつ $-\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow f'(\alpha) = 0$ かつ $f(\alpha) = 0$

となり，証明された. ■

(3) **(A)⟹(B) の証明**

「曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = \alpha$ で接すると」は

$$\begin{cases} f(\alpha) = g(\alpha) \\ f'(\alpha) = g'(\alpha) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) - g(\alpha) = 0 \\ f'(\alpha) - g'(\alpha) = 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立っているということである.

いま，見やすくするため $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと，③より

$$h(\alpha) = 0$$
$$h'(\alpha) = 0$$

が成り立つから，(2) より $h(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割りきれる，つまり

$$h(x) = (x-\alpha)^2 Q_1(x)$$

と書けるので，方程式 $h(x) = 0$，つまり「方程式 $f(x) = g(x)$ は $x = \alpha$ を重解にもつ」. ■

(A)⟸(B) の証明

「方程式 $f(x)=g(x)$ は $x=\alpha$ を重解にもつ」とは

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2Q_2(x) \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

と書けるということである．
いま，見やすくするため $f(x)-g(x)=i(x)$ とおくと，④より

$$i(x)=(x-\alpha)^2Q_2(x)$$

と書けるので，(2) より

$$i(\alpha)=0$$
$$i'(\alpha)=0$$

が成り立つから，$f(\alpha)=g(\alpha)$ かつ $f'(\alpha)=g'(\alpha)$ が成り立つ，つまり「曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=\alpha$ で接する」． ■

【例題：曲線外の点から引く接線〜その１〜】

2 次関数 $f(x)=x^2-2x+2$ において，放物線 $y=f(x)$ の接線のうち点 $(1,\ 0)$ を通るものを次の 2 通りの方法で求めよ．

(1) 接点の x 座標を t とおく方法．
(2) 接線の傾きを m とおく方法．

【解答】

(1) $f'(x)=2x-2$ であるから，接点の x 座標を t とおくと，接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$
$$\Leftrightarrow\ y=(2t-2)(x-t)+t^2-2t+2$$
$$\Leftrightarrow\ y=(2t-2)x-t^2+2 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

とおける．このとき，点 $(1,\ 0)$ を通るような t の値は，①に $(1,\ 0)$ を代入して

$$0=(2t-2)1-t^2+2$$
$$\Leftrightarrow\ t^2-2t=0$$
$$\Leftrightarrow\ t(t-2)=0$$

を満たすものである．この t の 2 次方程式の解は $t=0,\ 2$ となるのでこれを①に代入して，$\boldsymbol{y=-2x+2}$ と $\boldsymbol{y=2x-2}$ が求める接線となる．

(2) 点 (1, 0) を通る直線の傾きを m とおくと，この直線の方程式は

$$y = m(x-1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる．この直線と $y = f(x)$ が接するのは，方程式 $m(x-1) = x^2 - 2x + 2$ が重解をもつときだから

◀『曲線が接するときに成り立つ定理』(p.293)

$$\begin{aligned} & m(x-1) = x^2 - 2x + 2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - (m+2)x + m + 2 = 0 \end{aligned}$$

の判別式を考えて

$$\begin{aligned} & (m+2)^2 - 4(m+2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 + 4m + 4 - 4m - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & m = -2,\ 2 \end{aligned}$$

これを②に代入して，$\boldsymbol{y = -2x + 2}$ と $\boldsymbol{y = 2x - 2}$ が求める接線となる．

【例題：曲線外の点から引く接線〜その２〜】

3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ において，3 次曲線 $y = f(x)$ の接線のうち点 (0, 7) を通るものを次の 2 通りの方法で求めよ．

(1) 接点の x 座標を t とおく方法.

(2) 接線の傾きを m とおく方法.

【解答】

(1) $f'(x) = 3x^2 - 6x$ であるから，接点の x 座標を t とおくと，接線の方程式は

$$\begin{aligned} & y = f'(t)(x-t) + f(t) \\ \Leftrightarrow\ & y = (3t^2 - 6t)(x-t) + t^3 - 3t^2 + 6 \\ \Leftrightarrow\ & y = (3t^2 - 6t)x - 2t^3 + 3t^2 + 6 \quad \cdots\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

とおける．このとき，点 (0, 7) を通るような t の値は，①に (0, 7) を代入して

$$\begin{aligned} & 7 = -2t^3 + 3t^2 + 6 \\ \Leftrightarrow\ & 2t^3 - 3t^2 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-1)^2(2t+1) = 0 \end{aligned}$$

を満たすものである．この t の 3 次方程式の解

は $t = -\frac{1}{2}$，1 となるのでこれを①に代入して，
$\boldsymbol{y = \frac{15}{4}x + 7}$ と $\boldsymbol{y = -3x + 7}$ が求める接線となる．

(2) 点 (0, 7) を通る直線の傾きを m とおくと，この直線の方程式は

$$y = mx + 7 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる．この直線と $y = f(x)$ が接するのは，方程式 $mx + 7 = x^3 - 3x^2 + 6$ が重解をもつときだから

◀『曲線が接するときに成り立つ定理』(p.293)

$$mx + 7 = x^3 - 3x^2 + 6$$
$$\Leftrightarrow\ x^3 - 3x^2 - mx - 1 = 0$$

の左辺が $(x - a)^2(x - b)$ と因数分解される．つまり

$$x^3 - 3x^2 - mx - 1 = (x - a)^2(x - b)$$
$$\Leftrightarrow\ x^3 - 3x^2 - mx - 1 = x^3 - (2a + b)x^2 + (2ab + a^2)x - a^2b$$

となる実数 a，b が存在する．この両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} -3 = -2a - b & \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ -m = 2ab + a^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ -1 = -a^2b & \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

③，⑤から b を消去すると

$$2a^3 - 3a^2 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (a - 1)^2(2a + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ a = -\frac{1}{2},\ 1$$

よって，$(a, b) = \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$，(1, 1)．さらにこれらを，④に代入して，$m = \frac{15}{4}$，$-3$ となるので，②より
$\boldsymbol{y = -3x + 7}$ と $\boldsymbol{y = \frac{15}{4}x + 7}$ が求める接線となる．

【例題：3 次曲線の接線とその 3 次曲線との交点】

3 次関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x$ において，3 次曲線 $y = f(x)$ 上の点 (1, 5) における接線を考える．この接線が，再びこの 3 次曲線と交わる点の座標を求めよ．

【解答】

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$ であるから，点 (1, 5) における

接線は

$$
\begin{aligned}
& y = f'(1)(x-1)+5 \\
\Leftrightarrow\ & y = 1\cdot(x-1)+5 \\
\Leftrightarrow\ & y = x+4
\end{aligned}
$$

となる．この接線と $y = f(x)$ を連立して y を消去すると

$$
\begin{aligned}
& x^3-6x^2+10x = x+4 \\
\Leftrightarrow\ & x^3-6x^2+9x-4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)^2(x-4) = 0
\end{aligned}
$$

◀ $(x-1)^2$ でくくれるのは，『曲線が接するときに成り立つ定理』(p.293) から明らか

よって，求める点の x 座標は 4 であり，また $f(4) = 4^3-6\cdot4^2+10\cdot4 = 8$ より，求める座標は $\mathbf{(4,\ 8)}$.

【別解】

◀『曲線が接するときに成り立つ定理』を前面に押し出すと，このような別解も作れる

$y = f(x)$ 上の点 $(1,\ 5)$ における接線の方程式を $y = mx+n$ とおくと，$y = f(x)$ と $y = mx+n$ は接するので，方程式

$$
\begin{aligned}
& x^3-6x^2+10x = mx+n \\
\Leftrightarrow\ & x^3-6x^2+(10-m)x-n = 0
\end{aligned}
$$

は $x = 1$ を重解にもつ．

◀『曲線が接するときに成り立つ定理』(p.293)

他の解を α とおくと，この式の左辺は $(x-1)^2(x-\alpha)$ と因数分解される．つまり

$$
\begin{aligned}
& x^3-6x^2+(10-m)x-n = (x-1)^2(x-\alpha) \\
\Leftrightarrow\ & x^3-6x^2+(10-m)x-n = x^3-(\alpha+2)x^2+(2\alpha+1)x-\alpha
\end{aligned}
$$

となる実数 α が存在する．x^2 の係数を比較して

$$
\begin{aligned}
& 6 = \alpha+2 \\
\Leftrightarrow\ & \alpha = 4
\end{aligned}
$$

また，$f(4) = 4^3-6\cdot4^2+10\cdot4 = 8$ より，求める座標は $\mathbf{(4,\ 8)}$.