第 4 章

指数と指数関数

§ 4.1

累乗と累乗根

同じ数 x を何回か掛けて a という値になるとき，x を「a の累乗根」という．
ここでは，累乗根に関する計算法則を学ぶ．

4.1.1　累乗と指数法則

■累乗と指数法則

FTEXT 数学 I で学んだように，数 a の n 個の積 $\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}}$ を a^n と書き，「a の n 乗」と読む．つまり

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}} = a^n$$

である．このとき，a の右上に乗っている数 n のことを a^n の**指数** (index number) という．$a^1 = a$ とし，特に，a^2 のことを a の**平方** (square)，a^3 のことを a の**立方** (cube) という．また，a，a^2，a^3，$\cdots$ を総称して a の**累乗** (power) という．

累乗に関して

i) $a^2 \times a^4 = (\underbrace{a \times a}_{2\text{ 個}}) \times (\underbrace{a \times a \times a \times a}_{4\text{ 個}}) = a^6 \ (= a^{2+4})$

ii) $(a^2)^4 = (\underbrace{a \times a}_{2\text{ 個}}) \times (\underbrace{a \times a}_{2\text{ 個}}) \times (\underbrace{a \times a}_{2\text{ 個}}) \times (\underbrace{a \times a}_{2\text{ 個}}) = a^8 \ (= a^{2\times 4})$

iii) $(a \times b)^4 = (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) = a^4 \times b^4$

などの例からわかるように，一般に次のような**指数法則** (law of exponents) が成り立つ．

指数法則

x，y が自然数のとき，次の関係が成り立つ．

1) $a^x a^y = a^{x+y}$　　2) $(a^x)^y = a^{xy}$　　3) $(ab)^x = a^x b^x$

4.1.2　累乗根

■累乗根とは何か

2 乗して 3 になる数を 3 の平方根とよび $\pm\sqrt{3}$ と表していた．ここでは，2 乗だけに限らず，3 乗，4 乗，$\cdots$ の場合についても拡張して考えてみよう．

n 乗根の定義

n を自然数とする．n 乗すると a になる数，つまり

$$x^n = a$$

となる x の値を，a の **n 乗根** (nth root) という．

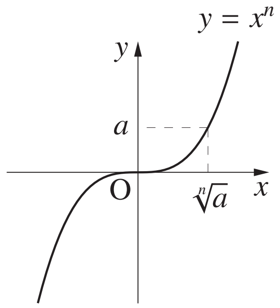
たとえば，$2^3 = 8$ なので，2 は 8 の 3 乗根である．また，$2^4 = 16$ であり $(-2)^4 = 16$ であるから，-2 と 2 はともに 16 の 4 乗根である．

特に，2 乗根を**平方根** (square root)，3 乗根を**立方根** (cubic root) という．また，2 乗根，3 乗根，4 乗根，$\cdots$ を総称して，**累乗根** (radical root) という．

a の n 乗根の表し方

0 でない実数 a の n 乗根は，次のようになる．

1) **n が奇数のとき**

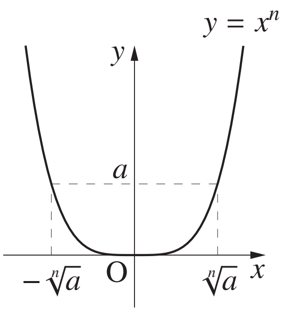


$y = x^n$ のグラフは右図のようになるので（たとえば $n = 3$ として x を変化させて計算してみるとよい），a の正負に関係なく，a の n 乗根はただ 1 つだけ存在し，それを $\sqrt[n]{a}$（n 乗根 a と読む）と表す．

$\sqrt[n]{a}$ の正負は a の正負と同じになる．

たとえば, $2^3 = 8$ であるから，$\sqrt[3]{8} = 2$ である．

2) **n が偶数のとき**



$y = x^n$ のグラフは右図のようになるので（たとえば $n = 4$ として x を変化させて計算してみるとよい），a が正のときに正と負の 2 つの n 乗根が存在する．そのうち正のものを $\sqrt[n]{a}$ と表し，負のものを $-\sqrt[n]{a}$ と表す．

たとえば，$2^4 = 16$，$(-2)^4 = 16$ であるから，$\sqrt[4]{16} = 2$，$-\sqrt[4]{16} = -2$ である．

なお，a が負のときには，a の n 乗根は存在しない．

0 は何乗しても 0 なので，0 の累乗根はすべて 0 である．つまり，$\sqrt[n]{0} = 0$ である．

【例題：累乗根の値を求める〜その１〜】

次の値を求めよ．

(1) $\sqrt[3]{-27}$ (2) $-\sqrt[4]{81}$

(3) $\sqrt[6]{0.000001}$ (4) $\sqrt[3]{0.125}$

【解答】

(1) -27 の 3 乗根，つまり $x^3 = -27$ となる x は -3 である．よって

$$\sqrt[3]{-27} = \mathbf{-3}$$

◀ $x^3 = -27$
$\Leftrightarrow x^3 + 27 = 0$
$\Leftrightarrow (x+3)\underbrace{(x^2+3x+9)}_{\text{正}} = 0$

(2) 81 の 4 乗根，つまり $x^4 = 81$ となる x は -3 と 3 である．$-\sqrt[4]{81}$ は負の方を表すから

$$-\sqrt[4]{81} = \mathbf{-3}$$

◀ $x^4 = 81$
$\Leftrightarrow x^4 - 81 = 0$
$\Leftrightarrow (x^2-9)(x^2+9) = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)\underbrace{(x^2+9)}_{\text{正}} = 0$

◀ 正の方の $\sqrt[4]{81} = 3$ にマイナスがつき -3 となると考えても良い

(3) 0.000001 の 6 乗根，つまり $x^6 = 0.000001$ となる x は -0.1 と 0.1 である．$\sqrt[6]{0.000001}$ は正の方を表すから

$$\sqrt[6]{0.000001} = \mathbf{0.1}$$

◀ $x^6 = 0.000001$
$\Leftrightarrow x^6 - 0.000001 = 0$
$\Leftrightarrow (x^3 - 0.001)(x^3 + 0.001) = 0$
$(x-0.1)\underbrace{(x^2+0.1x+0.01)}_{\text{正}} = 0$
または
$(x+0.1)\underbrace{(x^2-0.1x+0.01)}_{\text{正}} = 0$

(4) 0.125 の 3 乗根，つまり $x^3 = 0.125$ となる x は 0.5 である．よって

$$\sqrt[3]{0.125} = \mathbf{0.5}$$

◀ $x^3 = 0.125$
$\Leftrightarrow x^3 - 0.125 = 0$
$\Leftrightarrow (x-0.5)\underbrace{(x^2+0.5x+0.25)}_{\text{正}} = 0$

『a の n 乗根の表し方』(p.192) でもみたように，負の数 a の n 乗根は存在しないことがある．以下では簡単のため，特にことわりのない限り正の数 a の n 乗根について考えることにする．

一般に，累乗根について，次のことが成り立つ．

累乗根の基本性質

$a > 0$，$b > 0$ で，m，n，l が自然数のとき，次の等式が成り立つ．

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ 2) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ 4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ 6) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nl]{a^{ml}}$

この基本法則により，たとえば $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}$ は 2) と 4) と 1) を使い

$$\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2\times 8} = \sqrt[4]{2^4} = (\sqrt[4]{2})^4 = 2$$

と計算できる．

【証明】

1) $\sqrt[n]{a}$ の定義は，n 乗して a になる数であるから，$\sqrt[n]{a}$ を n 乗すれば当然 a になる． ■

2) $\sqrt[n]{a} > 0$，$\sqrt[n]{b} > 0$ より，$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} > 0$ であり，

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$
◀『指数法則 3)』(p.191)

$$= ab$$
◀『指数法則 1)』(p.191)

であるから，左辺の $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ は，ab の n 乗根のうち正のもの，すなわち $\sqrt[n]{ab}$ を表す． ■

3) $\sqrt[n]{a} > 0$，$\sqrt[n]{b} > 0$ より，$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} > 0$ であり

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}$$
◀『指数法則 3)』(p.191)

$$= \frac{a}{b}$$
◀『指数法則 1)』(p.191)

であるから，左辺の $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ は，$\dfrac{a}{b}$ の n 乗根のうち正のもの，すなわち $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ を表す． ■

【暗記：累乗の基本性質の証明】

『指数法則』(p.191) を利用して，上の『累乗の基本性質』の 4)〜6) を証明せよ．

【解答】

4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m > 0$ であり

$$\left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right\}^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn}$$
◀『指数法則 2)』(p.191)

$$= \left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right\}^m$$
◀『指数法則 2)』(p.191)

$$= a^m$$
◀『累乗根の基本性質 1)』

であるから，左辺の $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ は，a^m の n 乗根のうち正のものを表す．これは，右辺の $\sqrt[n]{a^m}$ にほかならない． ■

5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} > 0$ であり

$$\left\{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right\}^{mn} = \left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right\}^n$$
◀『指数法則 2)』(p.191)

$$= \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$$
◀『累乗根の基本性質 1)』

$= a$ ◀『累乗根の基本性質 1)』

であるから，左辺の $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ は，a の mn 乗根のうち正のものを表す．これは，右辺の $\sqrt[mn]{a}$ にほかならない．■

6) $\sqrt[n]{a^m} > 0$ であり

$$\left\{\sqrt[n]{a^m}\right\}^{nl} = \left\{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right\}^l$$ ◀『指数法則 2)』(p.191)

$$= (a^m)^l$$ ◀『累乗根の基本性質 1)』

$$= a^{ml}$$ ◀『指数法則 2)』(p.191)

であるから，左辺の $\sqrt[n]{a^m}$ は，a^{ml} の nl 乗根のうち正のものを表す．これは，右辺の $\sqrt[nl]{a^{ml}}$ にほかならない．■

【例題：累乗根の値を求める〜その２〜】

次の式を簡単にせよ．

(1) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}$　(2) $\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$　(3) $\sqrt[3]{216}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$　(5) $\sqrt[6]{8}$　(6) $\sqrt[15]{27}$

【解答】

(1) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \times 16}$ ◀『累乗根の基本性質 2)』(p.193)

$= \sqrt[3]{4^3} = \mathbf{4}$

(2) $\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{\dfrac{96}{3}}$ ◀『累乗根の基本性質 3)』(p.193)

$= \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = \mathbf{2}$

(3) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = \mathbf{6}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729}$ ◀『累乗根の基本性質 5)』(p.193)

$= \sqrt[6]{3^6} = \mathbf{3}$

(5) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3}$

$= \boldsymbol{\sqrt{2}}$ ◀『累乗根の基本性質 6)』(p.193)

(6) $\sqrt[15]{27} = \sqrt[15]{3^3}$

$= \boldsymbol{\sqrt[5]{3}}$ ◀『累乗根の基本性質 6)』(p.193)

§ 4.2

指数の拡張

今まで学んできた指数は自然数乗しか考えてこなかったが，ここでは指数法則をたよりに，実数乗の指数へ拡張していく．指数を拡張していく際に，累乗根が指数で表現されていく様子に注意しよう．

4.2.1　指数の整数への拡張

■3^{-2} の意味

『指数法則 1)』(p.191) は，指数が自然数の場合，すなわち，正の整数の場合について成り立つ性質であるが，ここでは，指数を 0 や負の整数を含む一般の整数にまで拡張することを考えてみよう．

仮に 3^{-2} という数があったとして，その意味について考えてみよう．3^2 が「3 を 2 かけた数」であったから，3^{-2} は「3 を −2 回かけた数」とでもなるのであろうが，「−2 回かける」では意味不明である．

そこで，「指数の仲間なのだから『指数法則』を満たすだろう」と考え，その体系の中で矛盾が生じないよう「−2 回かける」を決められないか(意味づけられないか)少し考えてみよう．

たとえば，$3^6 \times 3^{-2}$ という計算があったとして，これが『指数法則 1)』(p.191) を満たすとすると

$$3^6 \times 3^{-2} = 3^{6-2} = 3^4$$

となる．ここで，3^{-2} を X で表すと

$$3^6 \times X = 3^4$$

となる．この式を満たす X を求めると，$X = \dfrac{3^4}{3^6} = \dfrac{1}{3^2}$ である．つまり，3^{-2} は $\dfrac{1}{3^2}$ であると考えると都合がよい．

■3^0 の意味

また，$3^2 \times 3^0$ という計算があったとして，これが『指数法則 1)』(p.191) を満たすとすると

$$3^2 \times 3^0 = 3^{2+0} = 3^2$$

となる．ここで，3^0 を Y で表すと

$$3^2 \times Y = 3^2$$

となる．この式を満たす Y を求めると，$Y = \dfrac{3^2}{3^2} = 1$ である．つまり，3^0 は 1 であると考えると都合がよい．

■指数の整数への拡張

一般に，指数が自然数の場合に成り立つ『指数法則 1)』(p.191) において，指数 x が 0 のときにも成り立つとすると

$$a^0a^y = a^{0+y} = a^y$$

であるから，$a^0 = 1$ と考えると都合がよい．

さらに，『指数法則 1)』(p.191) が x を正の整数として，$y = -x$ のときにも成り立つとすると

$$a^xa^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$$

であるから，$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ と考えると都合がよい（x が負の整数の場合も同様である）．

整数に拡張された指数の定義

0 でない実数 a に関して，x が整数のとき

$$a^0 = 1 \ , \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

とする．

例として a^n をいくつか列挙すると次のようになる．

$$\cdots \ , \ a^3 \ , \ a^2 \ , \ a^1 = a \ , \ a^0 = 1 \ , \ a^{-1} = \frac{1}{a} \ , \ a^{-2} = \frac{1}{a^2} \ , \ a^{-3} = \frac{1}{a^3} \ , \ \cdots$$

「マイナス x 乗は x 乗分の 1 になる」と覚えよう．

整数に拡張された指数法則

整数 x，y について次のような性質が成り立つ．ただし，a，b は 0 でない実数とする．

1) $a^xa^y = a^{x+y}$　　2) $(a^x)^y = a^{xy}$　　3) $(ab)^x = a^xb^x$

1') $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$　　3') $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

【例題：整数に拡張された指数】

$x = 3$，$y = -2$ として，上の『整数に拡張された指数法則 1)，2)，3)』が成り立つのを確認せよ．

【解答】

1) の確認

$$(\text{左辺}) = a^3a^{-2} = a^3 \times \frac{1}{a^2} = a$$

$$(\text{右辺}) = a^{3+(-2)} = a$$

となり，確かに成立する．

2) の確認

$$(\text{左辺}) = (a^3)^{-2} = \frac{1}{(a^3)^2} = \frac{1}{a^6}$$

$$(\text{右辺}) = a^{3\cdot(-2)} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

となり，確かに成立する．

3) の確認

$$(\text{左辺}) = (ab)^{-2} = \frac{1}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2b^2}$$

$$(\text{右辺}) = a^{-2}b^{-2} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2b^2}$$

となり，確かに成立する．

【例題：整数に拡張された指数法則 1’)，3’) の証明】

上の『整数に拡張された指数法則 1’)，3’)』を，『整数に拡張された指数法則 1)，2)，3)』を用いて証明せよ．

【解答】

1’) の証明

$$\frac{a^x}{a^y} = a^x \times \frac{1}{a^y} = a^x \times a^{-y}$$

$$= a^{x-y}$$

◀『整数に拡張された指数法則 1)』(p.197)

■

3’) の証明

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(a \times \frac{1}{b}\right)^x = \left(a \times b^{-1}\right)^x$$

$$= a^x \times \left(b^{-1}\right)^x$$

◀『整数に拡張された指数法則 3)』(p.197)

$$= a^x \times b^{-x}$$

◀『整数に拡張された指数法則 2)』(p.197)

$$= a^x \times \frac{1}{b^x} = \frac{a^x}{b^x}$$

■

【例題：指数の計算〜その１〜】

次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{2\cdot 2^{-2}}{2^{-3}}$　　(2) $\dfrac{10^{10}}{2^7\cdot 5^5}$

(3) $\dfrac{(a^2b)^3}{(-ab^3)^2}$　　(4) $\dfrac{(a^5b^{-2})^{-3}}{(a^{-2}b)^5}$

【解答】

(1) 計算していくと

$$\begin{aligned}\frac{2\cdot 2^{-2}}{2^{-3}} &= 2\cdot 2^{-2}\cdot 2^3\\ &= 2^{1-2+3}\\ &= 2^2 = \mathbf{4}\end{aligned}$$

◀『整数に拡張された指数法則 1')』(p.197)

◀『整数に拡張された指数法則 1)』(p.197)

(2) 計算していくと

$$\begin{aligned}\frac{10^{10}}{2^7\cdot 5^5} &= (10)^{10}\cdot 2^{-7}\cdot 5^{-5}\\ &= (2\cdot 5)^{10}\cdot 2^{-7}\cdot 5^{-5}\\ &= 2^{10}\cdot 5^{10}\cdot 2^{-7}\cdot 5^{-5}\\ &= 2^{10-7}\cdot 5^{10-5}\\ &= 2^3\cdot 5^5 = \mathbf{25000}\end{aligned}$$

◀『整数に拡張された指数法則 1')』(p.197)

◀『整数に拡張された指数法則 3)』(p.197)

◀『整数に拡張された指数法則 1)』(p.197)

(3) 計算していくと

$$\begin{aligned}\frac{(a^2b)^3}{(-ab^3)^2} &= \frac{a^6b^3}{a^2b^6}\\ &= a^6b^3a^{-2}b^{-6}\\ &= a^{6-2}b^{3-6}\\ &= \boldsymbol{a^4b^{-3}}\end{aligned}$$

◀『整数に拡張された指数法則 3)』(p.197)

◀『整数に拡張された指数法則 1')』(p.197)

◀『整数に拡張された指数法則 1)』(p.197)

(4) 計算していくと

$$\begin{aligned}\frac{(a^5b^{-2})^{-3}}{(a^{-2}b)^5} &= \frac{a^{-15}b^6}{a^{-10}b^5}\\ &= a^{-15}b^6a^{10}b^{-5}\\ &= a^{-15+10}b^{6-5}\\ &= \boldsymbol{a^{-5}b}\end{aligned}$$

◀『整数に拡張された指数法則 3)』(p.197)

◀『整数に拡張された指数法則 1')』(p.197)

◀『整数に拡張された指数法則 1)』(p.197)

4.2.2　指数の有理数への拡張

■$3^{\frac{1}{2}}$ の意味

今度は，『整数に拡張された指数法則 2)』(p.197) を使って，指数を有理数に拡張することを考えよう．

たとえば，指数部分が有理数 $\frac{1}{2}$ である，$3^{\frac{1}{2}}$ という数の意味は何だろうか．3^2 が「3 を 2 回かけた数」であったから，$3^{\frac{1}{2}}$ は「3 を $\frac{1}{2}$ 回かけた数」とでもなるのであろうが，「$\frac{1}{2}$ 回かける」では意味不明である．

そこで，やはり「指数なのだから『指数法則』を満たすだろう」と考え，その体系の中で矛盾を生じないように考えていくことにする．

たとえば，$(3^{\frac{1}{2}})^2$ という数があったとして，これが『整数に拡張された指数法則 2)』(p.197) を満たすとすると

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2}\times 2} = 3^1$$

となる．ここで，$3^{\frac{1}{2}}$ を X で表すと

$$X^2 = 3$$

となる．この式を満たす X は，3 の平方根であるから，$3^{\frac{1}{2}}$ は $\sqrt{3}$ であると考えられる（もうひとつの平方根 $-\sqrt{3}$ は $-3^{\frac{1}{2}}$ であると考えればよい）．

■$3^{\frac{2}{3}}$ の意味

また，仮に $3^{\frac{2}{3}}$ という数があったとして，これが『整数に拡張された指数法則 2)』(p.197) を満たすとすると

$$\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 3^{\frac{2}{3}\times 3} = 3^2$$

となる．ここで，$3^{\frac{2}{3}}$ を Y で表すと

$$Y^3 = 3^2$$

となる．この式を満たす Y は，3^2 の立方根であり，$Y = \sqrt[3]{3^2}$ となる．つまり，$3^{\frac{2}{3}}$ は $\sqrt[3]{3^2}$ であると考えられる．

■指数の有理数への拡張

以上の話を一般化して，$a > 0$ のとき，有理数 x を指数とする数 a^x を定義してみよう．

『整数に拡張された指数法則 2)』(p.197) が，x を $\dfrac{m}{n}$，y を n (m，n は自然数) としても成り立つとすると

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$$

すなわち，n 乗すると a^m になるので，$a^{\frac{m}{n}}$ は a^m の n 乗根(のうち正の方) $\sqrt[n]{a^m}$ と考えればよい．

有理数に拡張された指数の定義

$a>0$ で，m を整数，n を自然数とするとき

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

とする．

たとえば，$\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$，$\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{2^3}=2^{\frac{3}{5}}$ である．

【例題：指数と累乗】

次のうち，$a^{\frac{m}{n}}$ の形で表されたものは $\sqrt[n]{a^m}$ の形で表し，$\sqrt[n]{a^m}$ の形で表されたものは $a^{\frac{m}{n}}$ の形で表せ．

(1) $a^{\frac{1}{2}}$　(2) $a^{\frac{2}{5}}$　(3) $a^{-\frac{3}{2}}$　(4) $a^{-\frac{2}{5}}$

(5) $\sqrt[5]{a}$　(6) $\sqrt[3]{a^5}$　(7) $\sqrt[6]{a^{-3}}$　(8) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

【解答】

(1) $a^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{a}}$

(2) $a^{\frac{2}{5}} = \boldsymbol{\sqrt[5]{a^2}}$

(3) $a^{-\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\sqrt[2]{a^{-3}}}$

(4) $a^{-\frac{2}{5}} = \boldsymbol{\sqrt[5]{a^{-2}}}$

(5) $\sqrt[5]{a} = \boldsymbol{a^{\frac{1}{5}}}$

(6) $\sqrt[3]{a^5} = \boldsymbol{a^{\frac{5}{3}}}$

(7) $\sqrt[6]{a^{-3}} = a^{\frac{-3}{6}} = \boldsymbol{a^{-\frac{1}{2}}}$

(8) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{a^3}} = \sqrt[4]{a^{-3}} = \boldsymbol{a^{-\frac{3}{4}}}$

有理数に拡張された指数法則

有理数 x，y について次の等式が成り立つ．ただし，a，b は正の実数とする．

1) $a^x a^y = a^{x+y}$　2) $(a^x)^y = a^{xy}$　3) $(ab)^x = a^x b^y$

1') $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$　3') $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^y}$

【例題：有理数に拡張された指数】

$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$ として，上の『有理数に拡張された指数法則 1)，2)，3)』が成り立つのを確認せよ．

【解答】

1) の確認

$$(\text{左辺}) = a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{a}$$

$$= \sqrt[3]{a^3}$$
$$= a$$
$$(\text{右辺}) = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = a$$

となり，確かに成立する．

2) の確認

$$(\text{左辺}) = (a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^2}}$$
$$= \sqrt[9]{a^2}$$
$$(\text{右辺}) = a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{a^2}$$

となり，確かに成立する．

3) の確認

$$(\text{左辺}) = (ab)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(ab)^2} = \sqrt[3]{a^2b^2}$$
$$(\text{右辺}) = a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b^2}$$
$$= \sqrt[3]{a^2b^2}$$

◀『累乗根の基本性質 2)』(p.193)
◀『累乗根の基本性質 2)』(p.193)
◀『累乗根の基本性質 2)』(p.193)

【例題：指数の計算～その２～】

次の値を求めよ．

(1) $100^{\frac{1}{2}}$　　(2) $25^{-\frac{1}{2}}$

(3) $8^{-\frac{2}{3}}$　　(4) $16^{0.75}$

【解答】

(1) $100^{\frac{1}{2}} = \left(10^2\right)^{\frac{1}{2}}$
$$= 10^{2\times\frac{1}{2}}$$
$$= \mathbf{10}$$

(2) $25^{-\frac{1}{2}} = (5^2)^{-\frac{1}{2}}$
$$= 5^{2\times(-\frac{1}{2})}$$
$$= 5^{-1} = \mathbf{\frac{1}{5}}$$

(3) $8^{-\frac{2}{3}} = (2^3)^{-\frac{2}{3}}$
$$= 2^{2\times(-\frac{2}{3})}$$
$$= 2^{-2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

(4) $16^{0.75} = 16^{\frac{75}{100}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}}$
$$= 2^{4\times\frac{3}{4}}$$
$$= 2^3 = \mathbf{8}$$

◀『有理数に拡張された指数法則 2)』(p.201)
◀『有理数に拡張された指数法則 2)』(p.201)
◀『有理数に拡張された指数法則 2)』(p.201)
◀『有理数に拡張された指数法則 2)』(p.201)

【例題：累乗根の値を求める〜その２〜（再掲）】

p.195 の例題を，指数になおすことによって計算せよ．答えは根号を使わず，指数のままでよい．

(1) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}$　(2) $\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$　(3) $\sqrt[3]{216}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$　(5) $\sqrt[6]{8}$　(6) $\sqrt[15]{27}$

【解答】

(1) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{2^4}$

$= 2^{\frac{2}{3}}2^{\frac{4}{3}}$　◀『有理数に拡張された指数の定義』(p.201)

$= 2^{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}}$　◀『有理数に拡張された指数法則 1)』(p.201)

$= 2^2 = \mathbf{4}$

(2) $\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}} = \dfrac{96^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}$　◀『有理数に拡張された指数の定義』(p.201)

$= \left(\dfrac{96}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}}$　◀『有理数に拡張された指数法則 3’)』(p.201)

$= 2^{5\cdot\frac{1}{5}}$　◀『有理数に拡張された指数法則 2)』(p.201)

$= \mathbf{2}$

(3) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = \mathbf{6}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \left(729^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$　◀『有理数に拡張された指数の定義』(p.201)

$= 729^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$　◀『有理数に拡張された指数法則 2)』(p.201)

$= 729^{\frac{1}{6}} = (3^6)^{\frac{1}{6}}$

$= 3^{6\cdot\frac{1}{6}}$　◀『有理数に拡張された指数法則 2)』(p.201)

$= \mathbf{3}$

(5) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3}$

$= 2^{\frac{3}{6}}$　◀『有理数に拡張された指数の定義』(p.201)

$= \mathbf{2^{\frac{1}{2}}}$

(6) $\sqrt[15]{27} = \sqrt[15]{3^3}$

$= 3^{\frac{3}{15}}$　◀『有理数に拡張された指数の定義』(p.201)

$= \mathbf{3^{\frac{1}{5}}}$

4.2.3　指数の実数への拡張

■指数の実数への拡張

指数 x が無理数の場合にも，a^x を定めることができる．たとえば，$a^{\sqrt{2}}$ では，$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ だから

$a^1,\ a^{1.4},\ a^{1.41},\ a^{1.414},\ a^{1.4142},\ \cdots$

を考えると，これらはある一定の値に近づいていくので，その値を $a^{\sqrt{2}}$ と定める．このようにして，無理数 p に対して，a^p を定めると，指数法則が成り立つことが知られている．

実数に拡張された指数法則

実数 x，y について次の等式が成り立つ．ただし，a，b は正の実数とする．

1) $a^x a^y = a^{x+y}$　　2) $(a^x)^y = a^{xy}$　　3) $(ab)^x = a^x b^y$

1') $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$　　3') $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^y}$

§ **4.3**

指数関数

$y = a^x$ の a を $a > 1$ かつ $a \neq 1$ の条件で考えることにより，性質の整った扱いやすい関数になる．ここではこの関数（指数関数）の法則について理解していく．

4.3.1　$y = 2^x$ のグラフ

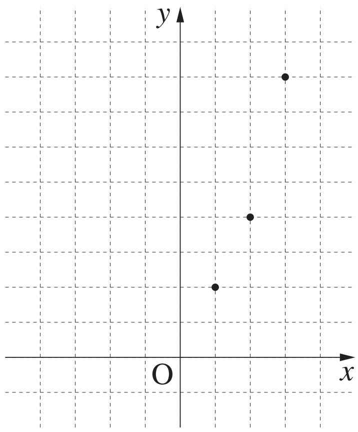
■指数が自然数の場合

ここでは，a を定数とし，$f(x) = a^x$ で表される関数について考えていく．以下では，例として $a = 2$ の場合，つまり $y = 2^x$ のグラフについてみていく．

『指数の拡張』(p.196) でみてきたように，指数 x が自然数の場合，整数の場合，有理数の場合と段階を追って確認していくことにする．

まず，x が自然数の場合には，関数 $y = 2^x$ の値は下の表のようにまとめることができる．

x	**1**	**2**	**3**	**4**	$\cdots$
y	**2**	**4**	**8**	**16**	$\cdots$

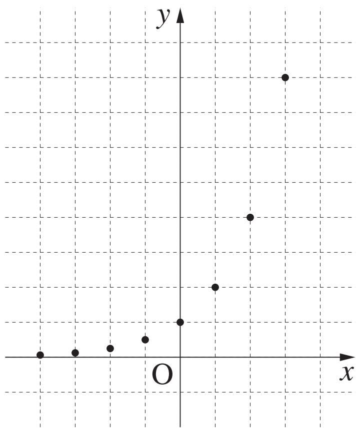


これらの値の組 (x, y) を座標とする点を，座標平面上にとっていくと，右図のようになる．ただし，$x \geqq 4$ のときは y の値が大きいので，グラフには入りきっていない．

■指数が整数の場合

x が整数の場合には，関数 $y = 2^x$ の値は下の表のようにまとめることができる．

x	$\cdots$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{-3}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	**0**	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	$\mathbf{\dfrac{1}{16}}$	$\mathbf{\dfrac{1}{8}}$	$\mathbf{\dfrac{1}{4}}$	$\mathbf{\dfrac{1}{2}}$	**1**	2	4	8	16	$\cdots$



これらの値の組 (x, y) を座標とする点を，座標平面上にとっていくと，右図のようになる．なお，x が -1 や -2 などのときには

$$2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

として計算している．

■指数が有理数の場合

x が有理数の場合には，x が整数の場合に加えて，さらに x が $\frac{1}{2}$ や $\frac{1}{4}$ や $\frac{3}{2}$ などの場合も含まれる．

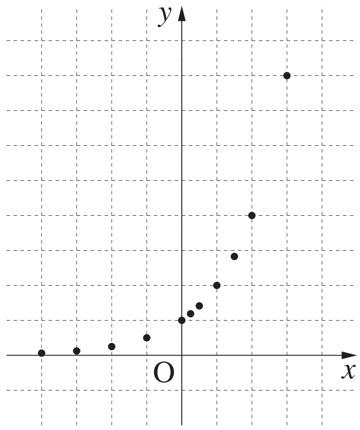
x がこれらの値となるときの y の値は

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \fallingdotseq 1.414$$

$$2^{\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1.414} \fallingdotseq 1.189$$

$$2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq 2 \times 1.414 = 2.828$$

などと計算できるので[*1]，下の表のようにまとめることができる．



x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	1	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	**1.189**	**1.414**	2	**2.828**	4	8	16	$\cdots$

これらの値の組 (x, y) を座標とする点を，座標平面上にとっていくと，右上図のようになる．

4.3.2　指数関数の性質

■単調増加関数と単調減少関数

いままでみてきた結果から，$y = 2^x$ のグラフは右に進むにつれ，上にあがっていく形になることが予想されるが，それを厳密に示すためにはどうすればよいだろうか．

x の値が増えるにつれ，2^x の値も増えることを示したいのだから，さまざまな(任意の)値 x_1，x_2 に対して

$$x_1 < x_2 \implies 2^{x_1} < 2^{x_2}$$

が証明できればよい．次の例題でそのことを確認してみよう．

【例題：指数関数の単調性】

関数 $y = 2^x$ について，次のことを証明せよ．ただし，x，x_1，x_2 は任意の有理数とする．

(1) $x > 0 \iff 2^x > 1$

(2) $x_1 < x_2 \implies 2^{x_1} < 2^{x_2}$

【解答】

(1) **⇒ の証明(背理法)**

有理数 $x\ (> 0)$ は $x = \dfrac{m}{n}$ $(m,\ n$ は自然数$)$ とおける．

◀ 結論 $2^x > 1$ の否定 $2^x \leqq 1$ を仮定して矛盾を導く

[*1] ルートの値を求める計算については，付録『開閉計算』(p.**??**) を参照のこと．

いま

$$2^x \leqq 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

と仮定すると

$$\begin{aligned} & (2^x)^n \leqq 1^n \\ \Leftrightarrow\ & (2^{\frac{m}{n}})^n \leqq 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2^m \leqq 1 \end{aligned}$$

となるが，m は自然数であるから

$$\begin{aligned} 2^m &= \overbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}^{m\text{ 個の積}} \\ &> 1 \times 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1 \end{aligned}$$

であることに矛盾する．よって，x が有理数であるとき，$x > 0 \ \Rightarrow 2^x > 1$ がいえる．

$\Leftarrow$ の証明（背理法）

◀ 結論 $x > 0$ の否定 $x \leqq 0$ を仮定して矛盾を導く

有理数 x は $x = \dfrac{m}{n}$（m は整数，n は自然数）とおける．いま，$x \leqq 0$，すなわち

$$m \leqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

と仮定すると

$$\begin{aligned} & (2^x)^n > 1^n \\ \Leftrightarrow\ & (2^{\frac{m}{n}})^n > 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2^m > 1 \end{aligned}$$

となるが，$2 > 1$ であり m は正でない整数であるから

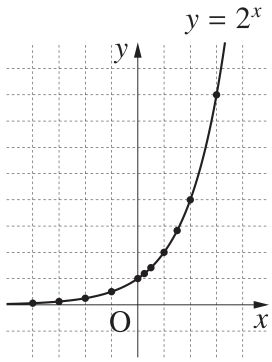
$$\begin{aligned} 2^m &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-m} \\ &= \overbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}^{-m\text{ 個の積}} \\ &< \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \cdots \times \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

であることに矛盾する．よって，x が有理数であるとき，$x > 0 \ \Leftarrow 2^x > 1$ がいえる．

(2)
$$\begin{aligned} & x_2 - x_1 > 0 \\ \Rightarrow\ & 2^{x_2 - x_1} > 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2^{x_2}}{2^{x_1}} > 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2^{x_2} > 2^{x_1} \end{aligned}$$

◀ (1) より

■



以上を参考に，$y = 2^x$ のグラフを描くと，右図のような曲線を描くことがわかる．この $y = 2^x$ のように，x の値が増加すると常に y の値も増加するような関数を単調増加関数という．このことを次にまとめておこう．

単調増加関数と単調減少関数の定義

関数 $f(x)$ の定義域内の任意の実数 x_1，x_2 について

1) $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
が成り立つとき，関数 $f(x)$ は**単調増加関数** (monotone increasing function) という[a]．

2) $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
が成り立つとき，関数 $f(x)$ は**単調減少関数** (monotone decreasing function) という．

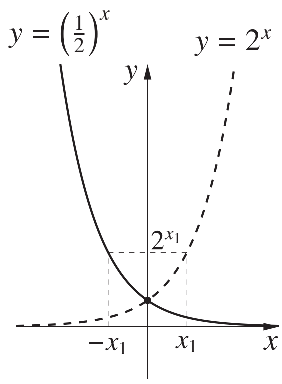
ある関数が単調増加関数であるか単調減少関数である場合に，その関数を単に**単調** (monotone) な関数という．

[a] $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqq f(x_2)$ を満たすとき，(広義の) 単調増加関数という場合もある．また，(広義の) 単調減少関数も同様である．

次に，関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを考えてみよう．

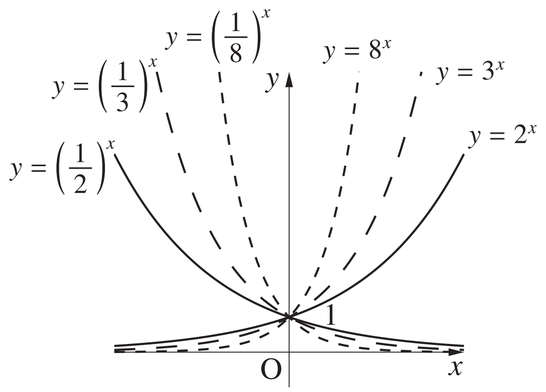
関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ の x に $-x_1$ を代入すると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x_1} = (2^{-1})^{-x_1} = 2^{x_1}$$



と計算できるが，これは関数 $y = 2^x$ の x に x_1 を代入したときの値と等しい．これより，$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは，右図のように $y = 2^x$ のグラフと y 軸に関して対称となるのがわかる．関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ は単調減少関数になっている．

関数 $y = a^x$ は a の値に応じて，次のように変化する．



■指数関数の定義

『a の n 乗根の表し方』(p.192) でもみたように，負の数 a の n 乗根は存在する場合と存在しない場合があり，それは n が実数のときでも同様である．簡単のため，以下では $a > 0$ の場合についてだけ考えるものとする．

また，$a = 1$ のときは a^x は常に 1 となり，それ以外の場合と大きく挙動が異なるので，$a = 1$ のときは(関数としては考えることができるが)指数関数というくくりには入れないことにする．

指数関数の定義

> $a > 0,\ a \neq 1$ とするとき，実数 x に対して
>
> $f(x) = a^x$
>
> で表される関数を，a を**底**(てい) (base) とする x の**指数関数** (exponential function) という．

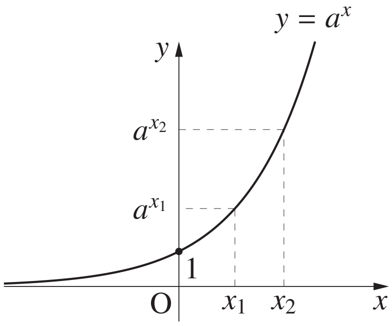
■指数関数の性質

『$y = 2^x$ のグラフ』(p.205) から学んできたことは，次のようにまとめることができる．指数関数 $y = a^x$ のグラフを見ながら 1 つ 1 つ確認しよう．

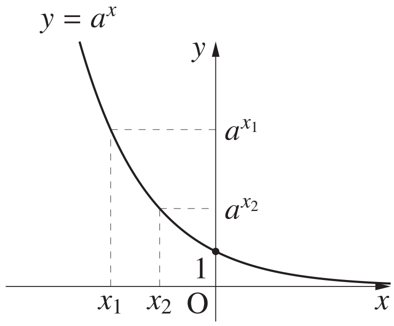
指数関数の性質

指数関数 $y = a^x$ について，次のようにまとめることができる．

$a > 1$ のとき



$0 < a < 1$ のとき



1) 定義域は実数全体，値域は正の実数全体である．

2) グラフは定点 (0, 1) を通り，x 軸が漸近線となる．

3) 単調な関数であるから，x の値と y の値は 1 対 1 に定まる，すなわち

$$a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2$$

が成り立つ．

4) 関数の増加と減少について

a) $a > 1$ のとき

$$x_1 < x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$$

b) $0 < a < 1$ のとき

$$x_1 < x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$$

$0 < a < 1$ のときは，x_1 と x_2 の大小関係と，a^{x_1} と a^{x_2} の大小関係は逆になることに注意しよう．たとえば，$4^2 < 4^3$ だが $(0.9)^2 > (0.9)^3$ である．

【例題：指数の大小関係（底が等しい場合）】

次の値を小さいものから順に並べよ．

(1) $\sqrt[3]{4}$，$\left(\sqrt{2}\right)^3$，$(0.5)^{\frac{1}{3}}$　　(2) $2^{0.3}$，$4^{-\frac{3}{2}}$，$8^{-\frac{1}{6}}$，$\left(\sqrt{2}\right)^3$

【解答】

(1) それぞれの値は

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$(0.5)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}}$$

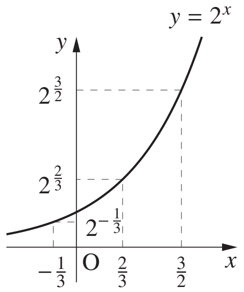
◀ 底を 2 でそろえてそれぞれの値を比較できるようにした

$y = 2^x$ は増加関数で，$-\dfrac{1}{3} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{2}$ だから

『指数関数の性質 4)』(p.210)

$$2^{-\frac{1}{3}} < 2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{2}}$$

◀



$$\therefore\ \boldsymbol{(0.5)^{\frac{1}{3}} < \sqrt[3]{4} < \left(\sqrt{2}\right)^3}$$

(2) それぞれの値は

$$2^{0.3} = 2^{\frac{3}{10}}$$

$$4^{-\frac{3}{2}} = \left(2^2\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-3}$$

$$8^{-\frac{1}{6}} = \left(2^3\right)^{-\frac{1}{6}} = 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}}$$

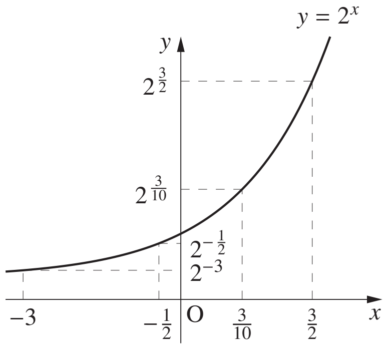
◀ 底を 2 でそろえてそれぞれの値を比較できるようにした

と計算でき，$y = 2^x$ は増加関数で，$-3 < -\dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{10} < \dfrac{3}{2}$ だから

『指数関数の性質 4)』(p.210)

$$2^{-3} < 2^{-\frac{1}{2}} < 2^{\frac{3}{10}} < 2^{\frac{3}{2}}$$

◀



$$\therefore\ \boldsymbol{4^{-\frac{3}{2}} < 8^{-\frac{1}{6}} < 2^{0.3} < \left(\sqrt{2}\right)^3}$$

【例題：指数を含む 1 次方程式・1 次不等式】

次の方程式，または不等式を解け．

(1) $4^x = 2^{x+1}$　　(2) $4^x > 2^{x+3}$

(3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2} = 27^x$　　(4) $9^x \geqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x}$

【解答】

(1) $4^x = 2^{x+1}$

$\Leftrightarrow\ 2^{2x} = 2^{x+1}$　◀ 底を 2 でそろえた

$\Leftrightarrow\ 2x = x + 1$　◀ 『指数関数の性質 3)』(p.210)

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x = 1}$

(2) $4^x > 2^{x+3}$

$\Leftrightarrow\ 2^{2x} > 2^{x+3}$　◀ 底を 2 でそろえた

$\Leftrightarrow\ 2x > x + 3$　◀ 『指数関数の性質 4)』(p.210)

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x > 3}$

(3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2} = 27^x$

$\Leftrightarrow\ 3^{-x+2} = 3^{3x}$　◀ 底を 3 でそろえた

$\Leftrightarrow\ -x + 2 = 3x$　◀ 『指数関数の性質 3)』(p.210)

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}}$

【別解：底を $\frac{1}{3}$ でそろえる場合】

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = \left(\frac{1}{3^3}\right)^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x}$$

◀底を $\frac{1}{3}$ でそろえた

$$\Leftrightarrow x - 2 = -3x$$

◀『指数関数の性質 3)』(p.210)

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$$

(4)
$$9^x \geqq \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} \geqq 3^{-1+x}$$

◀底を 3 でそろえた

$$\Leftrightarrow 2x \geqq -1 + x$$

◀『指数関数の性質 3)，4)』(p.210)

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x \geqq -1}$$

【別解：底を $\frac{1}{3}$ でそろえる場合】

$$\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-x} \geqq \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} \geqq \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$$

◀底を $\frac{1}{3}$ でそろえた

$$\Leftrightarrow -2x \leqq 1 - x$$

◀『指数関数の性質 3)，4)』(p.210)

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x \geqq -1}$$

【例題：指数を含む 2 次方程式・2 次不等式】

次の方程式，または不等式を解け．

(1) $4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$　　(2) $9^x - 24 \cdot 3^{x-1} - 9 = 0$

(3) $4^x - 2^x < 2$　　(4) $9^x - 25 \cdot 3^x - 54 > 0$

【解答】

(1) 式を変形すると

$$4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} - 2^2 \cdot 2^x - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 32 = 0$$

ここで，$2^x = t$ とおくと

$$t^2 - 4t - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+4)(t-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -4\,,\ 8 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

いま，t のとり得る値の範囲は $t = 2^x > 0$ なので，$t = -4$ は不適であり，①を満たす t は，$t = 8$ のみ．よって

◀『指数関数の性質 1)』(p.210)

$$2^x = 8$$

$$\Leftrightarrow\ 2^x = 2^3$$

$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x = 3}$$

◀『指数関数の性質 3)』(p.210)

(2) 式を変形すると

$$9^x - 24\cdot 3^{x-1} - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ 3^{2x} - 24\cdot 3^{-1}\cdot 3^x - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (3^x)^2 - 8\cdot 3^x - 9 = 0$$

ここで，$3^x = t$ とおくと

$$t^2 - 8t - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (t+1)(t-9) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ t = -1,\ 9 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

いま，t のとり得る値の範囲は $t = 3^x > 0$ なので，$t = -1$ は不適であり，②を満たす t は，$t = 9$ のみ．よって

◀『指数関数の性質 1)』(p.210)

$$3^x = 9$$
$$\Leftrightarrow\ 3^x = 3^2$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x = 2}$$

◀『指数関数の性質 3)』(p.210)

(3) 式を変形すると

$$4^x - 2^x < 2$$
$$\Leftrightarrow\ 2^{2x} - 2^x - 2 < 0$$
$$\Leftrightarrow\ (2^x)^2 - 2^x - 2 < 0$$

ここで，$2^x = t$ とおくと

$$t^2 - t - 2 < 0$$
$$\Leftrightarrow\ (t-2)(t+1) < 0$$
$$\Leftrightarrow\ -1 < t < 2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\ ③$$

いま，t のとり得る値の範囲は $t = 2^x > 0$ なので，これと③をあわせて，$0 < t < 2$．よって

◀『指数関数の性質 1)』(p.210)

$$0 < 2^x < 2$$
$$\Leftrightarrow\ 0 < 2^x < 2^1$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x < 1}$$

◀『指数関数の性質 4)』(p.210)

(4) 式を変形すると

$$
\begin{aligned}
&9^x - 25 \cdot 3^x - 54 > 0 \\
\Leftrightarrow\ &3^{2x} - 25 \cdot 3^x - 54 > 0 \\
\Leftrightarrow\ &(3^x)^2 - 25 \cdot 3^x - 54 > 0
\end{aligned}
$$

ここで，$3^x = t$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&t^2 - 25t - 54 > 0 \\
\Leftrightarrow\ &(t+2)(t-27) \\
\Leftrightarrow\ &-2 < t < 27 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④
\end{aligned}
$$

いま，t のとり得る値の範囲は $t = 3^x > 0$ なので，これと④をあわせて，$0 < t < 27$．よって

◀『指数関数の性質 1)』(p.210)

$$
\begin{aligned}
&0 < 3^x < 27 \\
\Leftrightarrow\ &0 < 3^x < 3^3 \\
\Leftrightarrow\ &\boldsymbol{x < 3}
\end{aligned}
$$

◀『指数関数の性質 4)』(p.210)
なお，すべての実数 x で $3^x > 0$ なので，x に下限はない

【例題：指数を含む 2 次関数】

次の関数の最大値を求めよ．

(1) $y = 4^{x+1} - 2^{x+2} + 2 \ \ (-2 \leqq x \leqq 2)$　　(2) $y = -4^x + 2^{x+1} + 1 \ \ (x \leqq 2)$

【解答】

(1) $2^x = t$ とおくと，$-2 \leqq x \leqq 2$ より

$$
\begin{aligned}
&2^{-2} \leqq t \leqq 2^2 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{4} \leqq t \leqq 4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

また

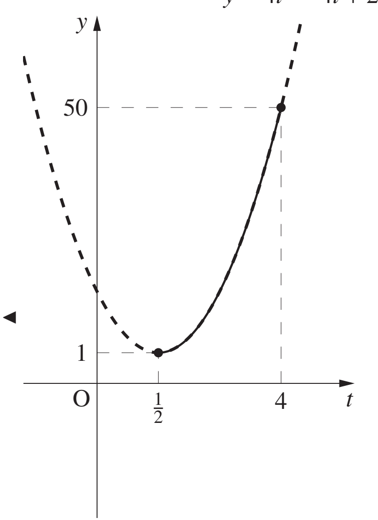
$$
\begin{aligned}
y &= 4^{x+1} - 2^{x+2} + 2 \\
&= 4 \cdot 4^x + 2^2 \cdot 2^x + 2 \\
&= 4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 2
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
y &= 4t^2 - 4t + 2 \\
&= 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1
\end{aligned}
$$

①の範囲では，このグラフは右欄外の図のようにな

◀



るので

$(t=4)$ $x=2$ のとき，最大値**50**

$\left(t=\dfrac{1}{2}\right)$ $x=-1$ のとき，最小値**1**

(2) $2^x=t$ とおくと，$x \leqq 2$ より

$$0<t \leqq 2^2$$
$$\Leftrightarrow\ 0<t \leqq 4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

また

$$y=-4^x+2^{x+1}+1$$
$$=-(2^x)^2+2\cdot 2^x+1$$

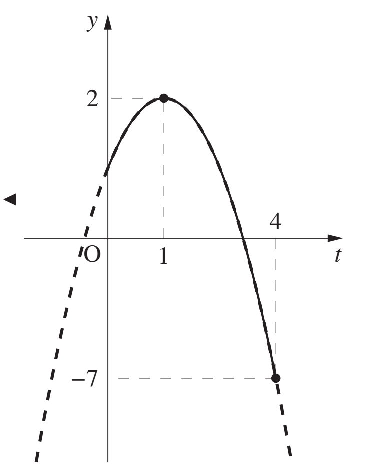
より

$$y=-t^2+2t+1$$
$$=-(t-1)^2+2$$

②の範囲では，このグラフは右欄外の図のようになるので

$(t=1)$ $x=0$ のとき，最大値**2**

$(t=4)$ $x=2$ のとき，最小値**−7**



第 5 章 対数と対数関数

§ 5.1 対数の定義

第**??**章『指数と指数関数』(p.**??**) では,「2 を 2 乗したり 3 乗したりするといくつになるのか」ということを考えてきた．この章では，逆に「2 は何乗すると 4 や 8 になるのか」という視点から話をすすめていく．その中で「2 は何乗すると 5 になるのか」の何乗のように，普通の分数のような形ではあらわせない数を表す方法である“対数”を以下で学んでいく．

5.1.1 対数の導入

■$2^x = 8$ や $2^x = \dfrac{1}{2}$ となる x を求める

たとえば，指数関数 $y = 2^x$ で $y = 8$ とすると

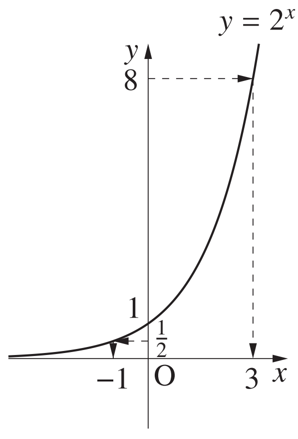
$$2^x = 8$$

となるが，$2^3 = 8$ であるから，この式を満たす x は 3 である．

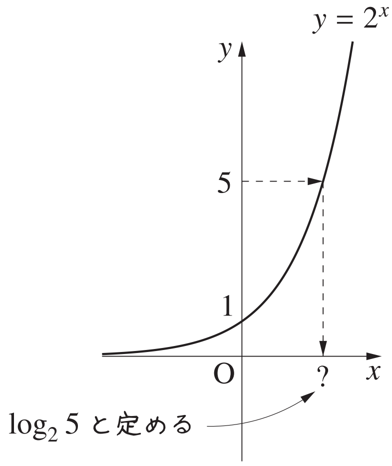
また，$y = \dfrac{1}{2}$ とすると

$$2^x = \frac{1}{2}$$

となるが，$2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ であるから，この式を満たす x は -1 である．



■$2^x = 5$ となる x を求める



このように，y の値からすぐに x の値が求まることもあるが，たとえば $y = 5$ として

$$2^x = 5$$

となる x の値は，下の例題でみるように無理数なので，小数や分数で表すことができない．

しかし，右の図からわかるように，$2^x = 5$ となる x が存在しているのは確かなので，この x を

$$\log_2 5$$

と表すことにする[*1]．

「3 乗したら 5 になる値」は無理数なので，新たに記号を作り $\sqrt[3]{5}$ と表した．同じように「$2^x = 5$ となる x の値」も無理数なので，新たに記号を作り $\log_2 5$ と表す．log という記号を何度か使ってみるまでは，少々違和感を感じるかもしれないが，慣れの問題であると達観し，落ち着いて取り組もう．

【例題：$\log_2 5$ が無理数であることの証明】

$\log_2 5$ が無理数であることを証明せよ．

【解答：背理法】

$\log_2 5$ が有理数であると仮定する．$\log_2 5$ は正の数なので，自然数 m，n をもちいて $\log_2 5 = \dfrac{m}{n}$，すなわち

$$2^{\frac{m}{n}} = 5$$

と表せることになる．

しかし，両辺を n 乗すると

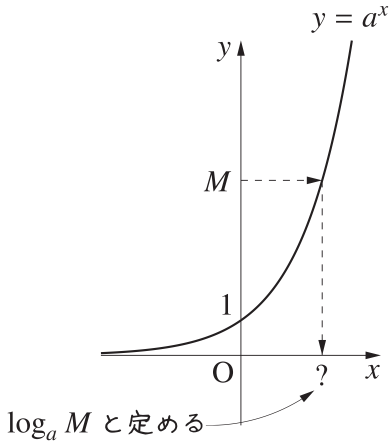
$$2^m = 5^n$$

となり，左辺は偶数，右辺は奇数となるので矛盾する．

よって，$\log_2 5$ は無理数である． ■

*1　$\log_2 5$ は約 2.3219 である．

■対数の定義



ここで，対数の定義をしておこう．

『指数関数の定義』(p.209) でみたように，指数関数 $y = a^x$ のグラフでは，どのような正の実数 M に対しても

$$a^x = M$$

となる x の値がただ 1 つ定まる．この値を，a を**底** (base) とする M の**対数** (logarithm) といい[*2]

$$x = \log_a M$$

で表す．また，この M のことを $\log_a M$ の**真数** (aniti-logarithm) という．

なお，『指数関数の定義』での $a > 0$，$a \neq 1$ という条件は，対数でも同様とする．

対数の定義

$a > 0$，$a \neq 1$，$M > 0$ のとき

$$a^x = M \iff x = \log_a M$$

とする．特に，$\log_a a^x = x$ である．

たとえば，2 を底とする 8 の対数，すなわち $\log_2 8$ は，$2^3 = 8$ だから

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

である．また，3 を底とする $\dfrac{1}{9}$ の対数，すなわち $\log_3 \dfrac{1}{9}$ は，$3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ だから

$$\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$$

である．

指数と対数は，瞬時に書き換えられるようにしておかなければならない．「a の x 乗は M」と唱えながら，右図のようなイメージで変換できるように練習しよう．

$$a^x = M \iff x = \log_a M$$

【例題：指数を対数になおす】

次の等式を $x = \log_a M$ の形に書きなおせ．

(1) $3^4 = 81$　　(2) $10^{-2} = 0.01$　　(3) $16^{-\frac{1}{4}} = 0.5$

【解答】

[*2] 簡単に「ログ a の M」と読む場合もある．

(1) 「3 の 4 乗は 81 である」は「4 は 3 を底とする 81 の対数である」ということと同じ．つまり

$3^4 = 81 \iff \mathbf{4 = \log_3 81}$

◀『対数の定義』(p.219)

(2) 「10 の -2 乗は 0.01 である」は「-2 は 10 を底とする 0.01 の対数である」ということと同じ．つまり

$10^{-2} = 0.01 \iff \mathbf{-2 = \log_{10} 0.01}$

◀『対数の定義』(p.219)

(3) 「16 の $-\frac{1}{4}$ 乗は 0.5 である」は「$-\frac{1}{4}$ は 16 を底とする 0.5 の対数である」ということと同じ．つまり

$16^{-\frac{1}{4}} = 0.5 \iff \mathbf{-\frac{1}{4} = \log_{16} 0.5}$

◀『対数の定義』(p.219)

【例題：対数を指数になおす】

次の等式を $a^x = M$ の形に書きなおせ．

(1) $2 = \log_{10} 100$　　(2) $\frac{1}{3} = \log_8 2$　　(3) $-3 = \log_5 \frac{1}{125}$

【解答】

(1) 「2 は 10 を底とする 100 の対数である」は「10 の 2 乗は 100 である」ということと同じ．つまり

$2 = \log_{10} 100 \iff \mathbf{10^2 = 100}$

◀『対数の定義』(p.219)

(2) 「$\frac{1}{3}$ は 8 を底とする 2 の対数である」は「8 の $\frac{1}{3}$ 乗は 2 である」ということと同じ．つまり

$\frac{1}{3} = \log_8 2 \iff \mathbf{8^{\frac{1}{3}} = 2}$

◀『対数の定義』(p.219)

(3) 「-3 は 5 を底とする $\frac{1}{125}$ の対数である」は「5 の -3 乗は $\frac{1}{125}$ である」ということと同じ．つまり

$-3 = \log_5 \frac{1}{125} \iff \mathbf{5^{-3} = \frac{1}{125}}$

◀『対数の定義』(p.219)

【例題：定義から対数の値を求める】

次の式の値を求めよ．

(1) $\log_4 64$　　(2) $\log_{27} 9$

(3) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$　　(4) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$

【解答】

(1) $\log_4 64 = x$ とおくと

$$\begin{aligned} & \log_4 64 = x \\ \Leftrightarrow\ & 4^x = 64 \\ \Leftrightarrow\ & 4^x = 4^3 \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{x = 3} \end{aligned}$$

◀『対数の定義』(p.219)

【別解】

『対数の定義』(p.219) より $\log_4 64 = \log_4 4^3 = \mathbf{3}$

(2) $\log_{27} 9 = x$ とおくと

$$\begin{aligned} & \log_{27} 9 = x \\ \Leftrightarrow\ & 27^x = 9 \\ \Leftrightarrow\ & 3^{3x} = 3^2 \\ \Leftrightarrow\ & 3x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{x = \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

◀『対数の定義』(p.219)

(3) $\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}} = x$ とおくと

$$\begin{aligned} & \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = x \\ \Leftrightarrow\ & 2^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow\ & 2^x = 2^{-\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{x = -\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

◀『対数の定義』(p.219)

(4) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{1}{2} = x$ とおくと

$$\begin{aligned} & \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} = x \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{x = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

◀『対数の定義』(p.219)

§ 5.2
対数の計算法則

対数の計算に関して，大変興味深いいくつかの計算法則が成り立つ．ここでは，その計算法則について見ていこう．

5.2.1　和と差に関する対数の性質

■和と差に関する対数の性質

付録『常用対数表』(p.346) には，10 を底とする対数の概算値がまとめてある．この表によれば

$$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010\ ,\quad \log_{10} 4 \fallingdotseq 0.6021\ ,\quad \log_{10} 8 \fallingdotseq 0.9031$$

なので

$$(\log_{10} 8 =)\ \log_{10}(2 \cdot 4) = \log_{10} 2 + \log_{10} 4$$

が成り立っているのがわかる．このような関係が成り立つのは偶然ではなく，一般的には次のようにまとめられる．

和と差に関する対数の性質

a は $a > 0$，$a \fallingdotseq 1$ を満たし，$M > 0$，$N > 0$ とするとき

1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

1’) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

が成り立つ.

たとえば，$\log_2 18 = \log_2 3 + \log_2 6$，$\log_3 \dfrac{2}{5} = \log_3 2 - \log_3 5$ などもいえる．

似ているが，下の式は成立しないので気をつけよう．

$$(\times)\ \log_a M \log_a N = \log_a M + \log_a N\ ,\quad (\times)\ \frac{\log_a M}{\log_a N} = \log_a M - \log_a N$$

【暗記：和と差に関する対数の性質の証明】

『実数に拡張された指数法則』(p.204)

1) $a^x a^y = a^{x+y}$　　1') $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

に，a を底とする対数を考えることにより，上の『和と差に関する対数の性質』

1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　　1') $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

を証明せよ．

【解答】

1) 指数法則 $a^x a^y = a^{x+y}$ において，a を底とする対数をとると

◀ 指数法則を対数の世界から眺めるため対数をとった

$$\log_a a^x a^y = \log_a a^{x+y}$$
$$\Leftrightarrow \log_a a^x a^y = x + y$$

◀『対数の定義』(p.219)

ここで，$a^x = M$，$a^y = N$ とおくと，$x = \log_a M$，$y = \log_a N$ なので

◀『対数の定義』(p.219)

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$ ■

1') 指数法則 $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ において，a を底とする対数をとると

◀ 指数法則を対数の世界から眺めるため対数をとった

$$\log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y}$$
$$\Leftrightarrow \log_a \frac{a^x}{a^y} = x - y$$

◀『対数の定義』(p.219)

ここで，$a^x = M$，$a^y = N$ とおくと，$x = \log_a M$，$y = \log_a N$ なので

◀『対数の定義』(p.219)

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$ ■

【例題：和と差に関する対数の性質の練習】

$a = \log_{10} 2$，$b = \log_{10} 3$ とするとき，次の対数を a，b で表せ．

(1) $\log_{10} 12$　(2) $\log_{10} 5$　(3) $\log_{10} \dfrac{1}{30}$　(4) $\log_{10} 225$

【解答】

(1) $\log_{10} 12 = \log_{10}(2 \cdot 2 \cdot 3)$
$= \log_{10} 2 + \log_{10} 2 + \log_{10} 3$
$= \boldsymbol{2a + b}$

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

(2) $\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2}$
$= \log_{10} 10 - \log_{10} 2$

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

$= \mathbf{1 - a}$

◀ $\log_{10} 10 = 1$ である

(3) $\log_{10} \dfrac{1}{30} = \log_{10} \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5}$

$= \log_{10} 1 - \log_{10}(2 \cdot 3 \cdot 5)$

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

$= 0 - (\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 5)$

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

$= -\{a + b + (1 - a)\}$

◀ (2) より

$= \mathbf{-1 - b}$

(4) $\log_{10} 225 = \log_{10}(5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3)$

$= \log_{10} 5 + \log_{10} 5 + \log_{10} 3 + \log_{10} 3$

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

$= (1 - a) + (1 - a) + b + b$

◀ (2) より

$= \mathbf{2 - 2a + 2b}$

5.2.2　実数倍に関する対数の性質

■実数倍に関する対数の性質

付録『常用対数表』(p.346) の表によれば

$\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.4771$，　$\log_{10} 9 \fallingdotseq 0.9542$

なので

$2\log_{10} 3 = \log_{10} 3^2$　$(= \log_{10} 9)$

が成り立っているのがわかる．このような関係が成り立つのは偶然ではなく，一般的には次のようにまとめられる．

実数倍に関する対数の性質

a は $a > 0$，$a \neq 1$ を満たし，$M > 0$，r は任意の実数のとき

2)　$\log_a M^r = r\log_a M$

が成り立つ．

真数にある指数は log の前に飛び出す，と覚えよう．

たとえば，$\log_3 2^3 = 3\log_3 2$，$\log_2 \left(\dfrac{3}{5}\right)^4 = 4\log_2 \dfrac{3}{5}$ などもいえる．

【暗記：実数倍に関する対数の性質の証明】

『実数に拡張された指数法則』(p.204)

2)　$(a^x)^y = a^{xy}$

に，a を底とする対数を考えることにより，上の『実数倍に関する対数の性質』

2)　$\log_a M^r = r\log_a M$

を証明せよ．

【解答】

2) 指数法則 $(a^x)^y = a^{xy}$ において，a を底とする対数をとると

◀ 指数を法則を対数の世界から眺めるため対数をとった

$$\log_a (a^x)^y = \log_a a^{xy}$$
$$\Leftrightarrow \log_a (a^x)^y = xy$$

◀ 『対数の定義』(p.219)

ここで，$a^x = M$，$y = r$ とおくと，$x = \log_a M$ なので

◀ 『対数の定義』(p.219)

$$\log_a M^r = r \log_a M$$ ■

【例題：対数の計算〜その１〜】

次の式を簡単にせよ．

(1) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

(2) $\log_5 45 + 2\log_5 \dfrac{5}{3}$

(3) $\log_3 72 - 3\log_3 2$

(4) $\log_2 \sqrt{5} - \dfrac{1}{2}\log_2 \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\log_2 \sqrt[3]{10}$

【解答】

(1) 式を変形すると

$$\begin{aligned}&\log_{10} 25 + \log_{10} 4\\ &= \log_{10}(25 \times 4)\\ &= \log_{10} 10^2 = \mathbf{2}\end{aligned}$$

◀ 『和と差に関する対数の性質』(p.222)

◀ 『対数の定義』(p.219)

(2) 式を変形すると

$$\begin{aligned}&\log_5 45 + 2\log_5 \frac{5}{3}\\ &= \log_5 45 + \log_5 \left(\frac{5}{3}\right)^2\\ &= \log_5 45 + \log_5 \frac{25}{9}\\ &= \log_5 \frac{45 \times 25}{9}\\ &= \log_5 5^3 = \mathbf{3}\end{aligned}$$

◀ 『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

◀ 『和と差に関する対数の性質』(p.222)

◀ 『対数の定義』(p.219)

(3) 式を変形すると

$$\begin{aligned}&\log_3 72 - 3\log_3 2\\ &= \log_3 72 - \log_3 2^3\\ &= \log_3 \frac{72}{8}\\ &= \log_3 3^2 = \mathbf{2}\end{aligned}$$

◀ 『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

◀ 『和と差に関する対数の性質』(p.222)

◀ 『対数の定義』(p.219)

(4) 式を変形すると

$$\log_2 \sqrt{5} - \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\log_2 \sqrt[3]{10}$$

$$= \log_2 5^{\frac{1}{2}} - \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \log_2 (10^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

◀『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

$$= \log_2 5^{\frac{1}{2}} - \log_2 \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} - \log_2 10^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_2 \frac{5^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 10^{\frac{1}{2}}}$$

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

$$= \log_2 \frac{5^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \log_2 2^{-1} = \mathbf{-1}$$

5.2.3　底の変換公式

■底の変換公式

ある対数の値は，底の違う別の対数の比で表すことができ

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

となる．

この式を使えば，たとえば底が 2 の対数である $\log_2 3$ も，付録『常用対数表』(p.346) をもちいて

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \fallingdotseq \frac{0.4771}{0.3010} \fallingdotseq 1.585$$

と計算することができる．

底の変換公式

a，b，c は正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ のとき

3) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

が成り立つ．特に，$b = c$ のとき，$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ である．

この公式を使うことにより，底の違う対数の和や差も，底をそろえ，計算できるようになる．これについては後の例題でみる．

【暗記：底の変換公式の証明】

$a^x = b$ が成り立っているとして，c を定数とする対数を考えることにより，上の『底の変換公式』

3) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

を証明せよ．ただし，a，b，c は正の数であり，$a \neq 1$，$c \neq 1$ とする．

【解答】

3) の証明

$a^x = b$ において，c を底とする対数を考えると

$$\log_c a^x = \log_c b$$
$$\Leftrightarrow\ x\log_c a = \log_c b$$
$$\Leftrightarrow\ x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

◀『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

いま，$a^x = b$ より $\log_a b = x$ なので，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

が成立する．■

【例題：対数の計算〜その２〜】

次の式を簡単にせよ．

(1) $\log_9 \sqrt{27}$　　(2) $\log_2 6 - \log_4 9$

(3) $\log_2 6 - \log_2 \sqrt{27} + \log_4 12$　　(4) $(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4)$

【解答】

(1) 式を変形すると

$$\log_9 \sqrt{27}$$
$$= \log_9 3^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{3}{2}\log_9 3$$
$$= \frac{3}{2}\log_9 9^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

◀『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

◀ $\log_9 3 = x \Leftrightarrow 9^x = 3 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3$ として $x = \dfrac{1}{2}$ を求めてもよい

(2) 式を変形すると

$$\log_2 6 - \log_4 9$$
$$= \log_2 6 - \frac{\log_2 9}{\log_2 4}$$
$$= \log_2 6 - \frac{1}{2}\log_2 9$$
$$= \log_2 6 - \log_2 9^{\frac{1}{2}}$$
$$= \log_2 6 - \log_2 3$$
$$= \log_2 \frac{6}{3}$$
$$= \log_2 2 = \mathbf{1}$$

◀『底の変換公式』(p.226)　この問いのように対数の底が異なる場合は，まず底をそろえることを考えるとよい

◀『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

(3) 式を変形すると

$$
\begin{aligned}
&\log_2 6 - \log_2 \sqrt{27} + \log_4 12\\
&= \log_2 6 - \log_2 3\sqrt{3} + \frac{\log_2 12}{\log_2 4}\\
&= \log_2 6 - \log_2 3\sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_2 12\\
&= \log_2 6 - \log_2 3\sqrt{3} + \log_2 12^{\frac{1}{2}}\\
&= \log_2 6 - \log_2 3\sqrt{3} + \log_2 2\sqrt{3}\\
&= \log_2 \frac{6\cdot 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\\
&= \log_2 2^2 = \mathbf{2}
\end{aligned}
$$

◀『底の変換公式』(p.226)　底を 2 でそろえた

◀『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

(4) 式を変形すると

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{(\log_2 9 + \log_8 3)}_{\text{底を 2 でそろえる}}\underbrace{(\log_3 16 + \log_9 4)}_{\text{底を 3 でそろえる}}\\
&= \left(\log_2 3^2 + \frac{\log_2 3}{\log_2 2^3}\right)\cdot\left(\log_3 2^4 + \frac{\log_3 2^2}{\log_3 3^2}\right)\\
&= \left(2\log_2 3 + \frac{\log_2 3}{3}\right)\cdot(4\log_3 2 + \log_3 2)\\
&= \frac{7}{3}\log_2 3\cdot 5\log_3 2\\
&= \frac{35}{3}\log_2 3\cdot\frac{1}{\log_2 3}\\
&= \mathbf{\frac{35}{3}}
\end{aligned}
$$

◀『底の変換公式』(p.226)

◀『底の変換公式』(p.226)　次の例題も参考

【例題：底の変換公式の活用】

次の問いに答えよ．

(1) $\log_a b\cdot\log_b c = \log_a c$ を証明せよ．
　ただし，a，b，c は正の数とし，$a \neq 1$，$b \neq 1$ とする．

(2) (1) を利用して

$$\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8\cdot\log_8 16$$

を計算せよ．

【解答】

(1) 式を変形すると

$$
\begin{aligned}
&\log_a b\cdot\log_b c\\
&= \log_a b\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b}
\end{aligned}
$$

◀『底の変換公式 iv)』(p.226)

$= \log_a c$ ■

(2) 式を変形すると

$$\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 \cdot \log_8 16$$
$$= \log_2 5 \cdot \log_5 8 \cdot \log_8 16$$ ◀ (1) より
$$= \log_2 8 \cdot \log_8 16$$ ◀ (1) より
$$= \log_2 16 = \mathbf{4}$$ ◀ (1) より

5.2.4　対数と指数の関係

■対数と指数の関係

$a^x = M$ が成り立つとき，対数の定義より $\log_a M = x$ である．この $x = \log_a M$ を $a^x = M$ に代入することにより

$$a^{\log_a M} = M$$

が成り立つ．

この式が成り立つ理由は次のように考えられる．

まず，$\log_a M$ は『対数の定義』(p.219) から「a は何乗すると M になるのか？」という問いの答えであった．そして，その値を実際に a の指数としてもちいるのだから，それが M になるのは当然である．

対数と指数の関係

a は $a > 0$，$a \fallingdotseq 1$ を満たし，$M > 0$ のとき

4) $a^{\log_a M} = M$

が成り立つ．

【例題：対数と指数の関係の利用】

次の式を簡単にせよ．

(1) $16^{\log_2 3}$　　(2) $25^{\log_{\frac{1}{5}} 4}$

【解答】

(1) 式を変形すると

$$16^{\log_2 3} = 2^{4\log_2 3}$$
$$= 2^{\log_2 3^4}$$ ◀『実数倍に関する対数の性質』(p.224)
$$= 3^4$$ ◀『対数と指数の関係』(p.229)
$$= \mathbf{81}$$

(2) 式を変形すると

$$
\begin{aligned}
25^{\log_{\frac{1}{5}} 4} &= \left(\frac{1}{5}\right)^{-2\log_{\frac{1}{5}} 4} \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{5}} 4^{-2}} \\
&= 4^{-2} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{16}}
\end{aligned}
$$

◀『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

◀『対数と指数の関係』(p.229)

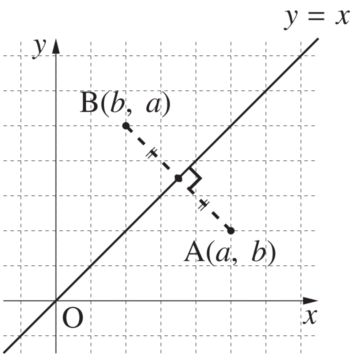
§ 5.3
対数関数

これまでは，対数の計算を中心にみてきたが，ここでは対数の関数としての振る舞いについて学ぶ．後半では対数を含む方程式や不等式のとき方についてみていく．

5.3.1　対数関数のグラフ

■点 $(a,\ b)$ と点 $(b,\ a)$ の関係

座標平面上のある点 $\mathrm{A}(a,\ b)\ (a \fallingdotseq b)$ に対して，この点の x 座標の値 a と y 座標の値 b を交換した点 $\mathrm{B}(b,\ a)$ をつくる．



このとき，2 点 A，B の中点の座標は $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a+b}{2}\right)$ なので，直線 $y = x$ 上にあることがわかる．また，2 点 A，B を結ぶ直線は，傾きが $\dfrac{a-b}{b-a} = -1$ なので，直線 $y = x$ と直交するのがわかる．以上のことから，2 点 A，B は，右図のように，直線 $y = x$ に関して対称となる．

このことを踏まえて，以下に述べる対数関数についてみていこう．

■対数関数とは何か

対数関数の定義

$a > 0,\ a \fallingdotseq 1$ のとき，正の実数 x に対して

$y = \log_a x$

で表される関数を，a を**底**（てい） (base) とする x の**対数関数** (logarithmic function) という．

この対数関数 $y = \log_z x$ のグラフがどのような形になるのかを調べるため，以下のように考えていく．

STEP1

まず，『対数の定義』(p.219) より

$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y$

であるから，指数関数 $y = a^x$ のグラフと，$x = \log_a y$ のグラフは等しい．

STEP2

この $x = \log_a y$ を満たす点 $(x,\ y)$ の x 座標と y 座標を入れ換えたものが，対数関数 $y = \log_a x$ を満たすものとなるから

$y = a^x$ と $y = \log_a x$ は，直線 $y = x$ に関して対称なグラフ

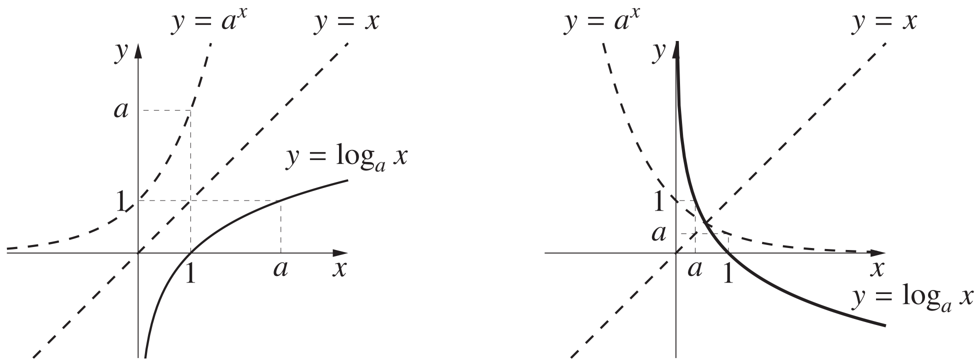
となる．

これをもとに対数関数 $y = \log_a x$ のグラフについてまとめると次のようになる[*3]．

指数関数と対数関数のグラフ

指数関数 $y = a^x$ と対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，次のような関係になる．

i) $\boldsymbol{a > 1}$ **のとき**　　ii) $\boldsymbol{0 < a < 1}$ **のとき**



5.3.2　対数関数の性質

■対数関数の性質

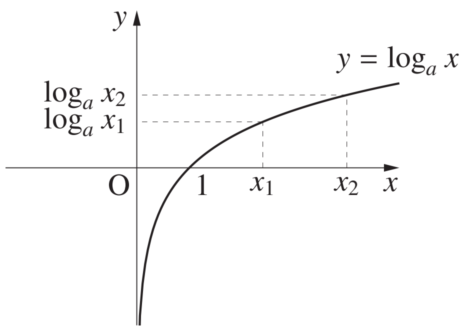
『対数関数のグラフ』(p.231) で学んできたことをまとめると，次のようになる．対数関数 $y = \log_a x$ のグラフを見ながら 1 つ 1 つ確認しよう．

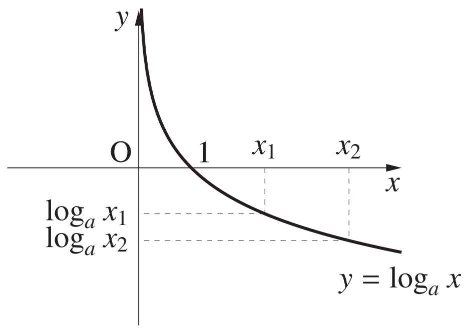
[*3] x の関数 $y = f(x)$ が与えられたとき，y のおのおのの値に対して，それに対応する x の値が定まるとき，この対応を $x = f^{-1}(y)$ と書き，もとの関数の**逆関数** (inverse function) という．逆関数については FTEXT 数学 III で詳しく扱う．

対数関数の性質

指数関数の性質について，次のようにまとめることができる．

$a > 1$ のとき　　　　　　　　$0 < a < 1$ のとき





1) 定義域は正の実数全体，値域は実数全体である．
2) グラフは定点 (1, 0) を通り，y 軸が漸近線となる．
3) 単調な関数であるから，x の値と y の値は 1 対 1 に定まる，すなわち

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \iff x_1 = x_2$$

4) 関数の増加と減少について
   a) $a > 1$ のとき，単調増加関数である，すなわち

   $$x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2$$

   b) $0 < a < 1$ のとき，単調減少関数である，すなわち

   $$x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 > \log_a x_2$$

$0 < a < 1$ のときは，x_1 と x_2 の大小関係と，$\log_a x_1$ と $\log_a x_2$ の大小関係は逆になることに注意しよう．たとえば，$\log_2 3 < \log_2 4$ だが，$\log_{0.5} 3 > \log_{0.5} 4$ である．

【例題：対数の大小関係】

次の値を小さいものから順に並べよ．

(1) $\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{1}{3}$，$-1$，$\log_2 3^{-1}$　　　(2) $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}\log_3 5$，$-\log_3\dfrac{1}{2}$

【解答】

(1) 左から順に

$$\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{3} = \log_2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_2\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-1 = \log_2 2^{-1} = \log_2\frac{1}{2}$$

$$\log_2 3^{-1} = \log_2\frac{1}{3}$$

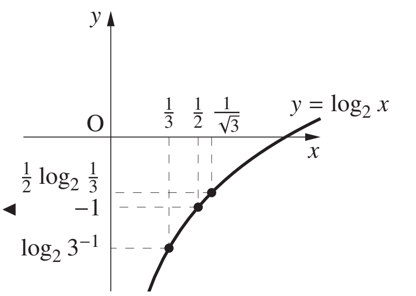
◀ まず底をそろえて大小を比較できるようにする

◀ すべて底を 2 でそろえた

$y = \log_2 x$ は増加関数で，$\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ だから

$$\log_2 \frac{1}{3} < \log_2 \frac{1}{2} < \log_2 \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\log_2 3^{-1} < -1 < \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{3}}$$



◀ 『対数関数の性質』(p.233)

(2) 左から順に

◀ まず底をそろえて大小を比較できるようにする

$$\frac{1}{2} = \log_3 (3)^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\log_3 5 = \log_3 5^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{5}$$

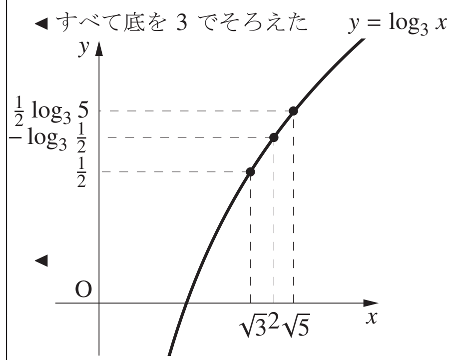
$$-\log_3 \frac{1}{2} = \log_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \log_3 2$$

◀ すべて底を 3 でそろえた

$y = \log_3 x$ は増加関数で，$\sqrt{3} < 2 < \sqrt{5}$ だから

$$\log_3 \sqrt{3} < \log_3 2 < \log_3 \sqrt{5}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{1}{2} < -\log_3 \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\log_3 5}$$



◀ 『対数関数の性質』(p.233)

【例題：対数を含む 1 次方程式・1 次不等式〜その 1 〜】

次の方程式，または不等式を解け．

(1) $\log_2 x = 2$　　(2) $\log_3 x < 1$

(3) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$　　(4) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 3$

【解答】

(1) 真数は正であるから $x > 0$ が必要．以下，この条件のもと

◀ まず真数条件をチェックする

$$\log_2 x = 2$$

$$\Leftrightarrow\ \log_2 x = \log_2 2^2$$

◀ $2 = \log_2 2^2$ として底をそろえた

$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x = 4}$$

◀ 『対数関数の性質』(p.233)

(2) 真数は正であるから

$$x > 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

が必要．以下，この条件のもと

◀ まず真数条件をチェックする

$$\log_3 x < 1$$

$\Leftrightarrow\ \log_3 x < \log_3 3$　◀ $1 = \log_3 3$ として底をそろえた

$\Leftrightarrow\ x < 3$ ……………………… ②　◀『対数関数の性質』(p.233)

①，② を両方満たす x を求めて，$\mathbf{0 < x < 3}$ となる．

(3) 真数は正であるから

$x > 0$ ……………………… ③

が必要．以下，この条件のもと　◀ まず真数条件をチェックする

$\log_{\frac{1}{3}} x > 1$

$\Leftrightarrow\ \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3}$　◀ $1 = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3}$ として底をそろえた

$\Leftrightarrow\ x < \dfrac{1}{3}$ ……………………… ④　◀『対数関数の性質』(p.233)

③，④ を両方満たす x を求めて，$\mathbf{0 < x < \dfrac{1}{3}}$ となる．

(4) 真数は正であるから $x+1>0$ つまり

$x > -1$ ……………………… ⑤

が必要．以下，この条件のもと　◀ まず真数条件をチェックする

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 3$

$\Leftrightarrow\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$　◀ $3 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ として底をそろえた

$\Leftrightarrow\ x+1 < \dfrac{1}{8}$　◀『対数関数の性質』(p.233)

$\Leftrightarrow\ x < -\dfrac{7}{8}$ ……………………… ⑥

⑤，⑥ を両方満たす x を求めて，$\mathbf{-1 < x < -\dfrac{7}{8}}$ となる．

(真数) >0 という条件(真数条件という)は，忘れやすいので気をつけよう．

【例題：対数を含む 1 次方程式・1 次不等式〜その２〜】

次の方程式，または不等式を解け．

(1) $\log_2(x+1) + \log_2(x-2) = 2$　(2) $\log_2(x+3) \geqq 1 + \log_2 x$

(3) $2\log_{10}(x-4) = \log_{10}(x-1) + \log_{10} 4$　(4) $2\log_2(x-4) < \log_2 2x$

【解答】

(1) 真数は正であるから，$x+1>0$ かつ $x-2>0$ が必要，つまり

$x > 2$ ……………………… ①

が必要である．以下，この条件のもと

◀ まず真数条件をチェックする

$$\log_2(x+1)+\log_2(x-2)=2$$

$\Leftrightarrow\ \log_2(x+1)+\log_2(x-2)=\log_2 2^2$

◀ $2=\log_2 2^2$ として底をそろえた

$\Leftrightarrow\ \log_2(x+1)(x-2)=\log_2 2^2$

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

$\Leftrightarrow\ (x+1)(x-2)=2^2$

◀『対数関数の性質』(p.233)

$\Leftrightarrow\ x^2-x-6=0$

$\Leftrightarrow\ (x+2)(x-3)=0$

$\Leftrightarrow\ x=-2,\ 3$ ……………………… ②

①，② を両方満たす x を求めて，$\boldsymbol{x=3}$ となる．

(2) 真数は正であるから，$x+3>0$ かつ $x>0$ が必要，つまり

$x>0$ ……………………… ③

が必要である．以下，この条件のもと

◀ まず真数条件をチェックする

$$\log_2(x+3)\geqq 1+\log_2 x$$

$\Leftrightarrow\ \log_2(x+3)\geqq\log_2 2+\log_2 x$

◀ $1=\log_2 2$ として底をそろえた

$\Leftrightarrow\ \log_2(x+3)\geqq\log_2 2x$

◀『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

$\Leftrightarrow\ x+3\geqq 2x$

◀『対数関数の性質』(p.233)

$\Leftrightarrow\ x\leqq 3$ ……………………… ④

③，④を両方満たす x を求めて，$\boldsymbol{0<x\leqq 3}$ となる．

(3) 真数は正であるから，$x-4>0$ かつ $x-1>0$ が必要，つまり

$x>1$ ……………………… ⑤

が必要である．以下，この条件のもと

◀ まず真数条件をチェックする

$$2\log_{10}(x-4)=\log_{10}(x-1)+\log_{10}4$$

$\Leftrightarrow\ \log_{10}(x-4)^2=\log_{10}(x-1)+\log_{10}4$

◀『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

$\Leftrightarrow\ \log_{10}(x-4)^2=\log_{10}4(x-1)$

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

$\Leftrightarrow\ (x-4)^2=4(x-1)$

◀『対数関数の性質』(p.233)

$\Leftrightarrow\ x^2-12x+20=0$

$\Leftrightarrow\ (x-2)(x-10)=0$

$\Leftrightarrow\ x=2,\ 10$ ……………………… ⑥

⑤，⑥を両方満たす x を求めて，$\boldsymbol{x=2,\ 10}$ となる．

(4) 真数は正であるから，$x-4>0$ かつ $2x>0$ が必要，

つまり

$$x > 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

が必要である．以下，この条件のもと

◀ まず真数条件をチェックする

$$\begin{aligned} & 2\log_2(x-4) < \log_2 2x \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(x-4)^2 < \log_2 2x \\ \Leftrightarrow\ & (x-4)^2 < 2x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 10x + 16 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)(x-8) < 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2 < x < 8 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧ \end{aligned}$$

◀『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

◀『対数関数の性質』(p.233)

⑦，⑧を両方満たす x を求めて，$\mathbf{2 < x < 8}$ となる．

【例題：対数を含む 2 次方程式・2 次不等式】

次の方程式，または不等式を解け．

(1) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 = 3$　　(2) $(\log_2 x)^2 + \log_2 x^2 - 3 < 0$

(3) $(\log_{10} x)^2 - 2\log_{10} x^2 + 3 = 0$　　(4) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 8 \geqq 0$

【解答】

(1) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x^2 > 0$ が必要，つまり

◀ まず真数条件をチェックする

$$x > 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が必要である．以下，この条件のもと

$$\begin{aligned} & (\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 = 3 \\ \Leftrightarrow\ & (\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0 \end{aligned}$$

ここで，$\log_3 x = t$ とおくと

$$\begin{aligned} & t^2 - 2t - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t+1)(t-3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & t = -1,\ 3 \end{aligned}$$

◀ $\log_3 x = t$ とおき 2 次方程式に帰着させた

よって，$\log_3 x = -1,\ 3$．これと ① を満たす x を求めて，$\boldsymbol{x = \frac{1}{3},\ 27}$ となる．

(2) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x^2 > 0$ が必要，つまり

◀ まず真数の満たすべき条件をチェックする

$$x > 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が必要である．以下，この条件のもと

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 3 < 0$$
$$\Leftrightarrow\ (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 < 0$$

ここで，$\log_2 x = t$ とおくと

$$t^2 - 2t - 3 < 0$$
$$\Leftrightarrow\ (t+1)(t-3) < 0$$
$$\Leftrightarrow\ -1 < t < 3$$

よって，$-1 < \log_2 x < 3$．これと ② を満たす x を求めて，$\boldsymbol{\dfrac{1}{3} < x < 27}$ となる．

(3) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x^2 > 0$ が必要，つまり

◀ まず真数の満たすべき条件をチェックする

$$x > 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が必要である．以下，この条件のもと

$$(\log_{10} x)^2 - 2\log_{10} x^2 + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (\log_{10} x)^2 - 4\log_{10} x + 3 = 0$$

ここで，$\log_{10} x = t$ とおくと

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (t-3)(t-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ t = 1,\ 3$$

よって，$\log_{10} x = 1,\ 3$．これと ③ を満たす x を求めて，$\boldsymbol{x = 3,\ 27}$ となる．

(4) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x^2 > 0$ が必要，つまり

◀ まず真数の満たすべき条件をチェックする

$$x > 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

が必要である．以下，この条件のもと

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 8 \geqq 0$$
$$\Leftrightarrow\ (\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 8 \geqq 0$$

ここで，$\log_3 x = t$ とおくと

$$t^2 - 2t - 8 \geqq 0$$

$\Leftrightarrow\ (t+2)(t-4) \geqq 0$

$\Leftrightarrow\ t \leqq -2,\ 4 \leqq t$

よって，$\log_3 x \leqq -2,\ 4 \leqq \log_3 x$．これと ④ を満たす x を求めて，$\boldsymbol{0 < x \leqq \frac{1}{9},\ 81 \leqq x}$ となる．

【例題：対数を含む 2 次関数の最大最小】

次の関数の最大値と最小値およびそのときの x の値を求めよ．

(1) $y = (\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 + 3\ \left(\frac{1}{3} \leqq x \leqq 9\right)$

(2) $y = \left(\log_2 \frac{x}{8}\right)\left(\log_4 \frac{x}{2}\right)\ (1 \leqq x \leqq 8)$

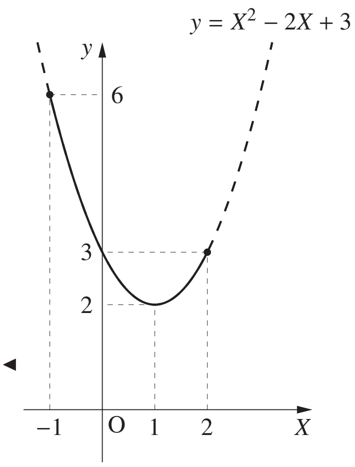
【解答】

(1) $\log_3 x = X$ とおくと，$\frac{1}{3} \leqq x \leqq 9$ より

$$\log_3 \frac{1}{3} \leqq \log_3 x \leqq \log_3 9$$
$$\Leftrightarrow\ \log_3 3^{-1} \leqq \log_3 x \leqq \log_3 3^2$$
$$\therefore\ -1 \leqq X \leqq 2$$

また

$$\begin{aligned} y &= (\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 + 3 \\ &= (\log_3 x)^2 - 2\log_3 x + 3 \\ &= X^2 - 2X + 3 \\ &= (X-1)^2 + 2 \end{aligned}$$



右図より，$X = -1$ すなわち，$\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$ のとき最大値 **6**，$X = 1$ すなわち，$\boldsymbol{x = 3}$ のとき最小値 **2** となる．

(2) $\log_2 x = X$ とおくと，$1 \leqq x \leqq 8$ より

$$\log_2 1 \leqq \log_2 x \leqq \log_2 8$$
$$\Leftrightarrow\ \log_3 2^0 \leqq \log_2 x \leqq \log_2 2^3$$
$$\therefore\ 0 \leqq X \leqq 3$$

また

$$\begin{aligned} y &= \left(\log_2 \frac{x}{8}\right)\left(\log_4 \frac{x}{2}\right) \\ &= (\log_2 x - \log_2 8)\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 4} \end{aligned}$$

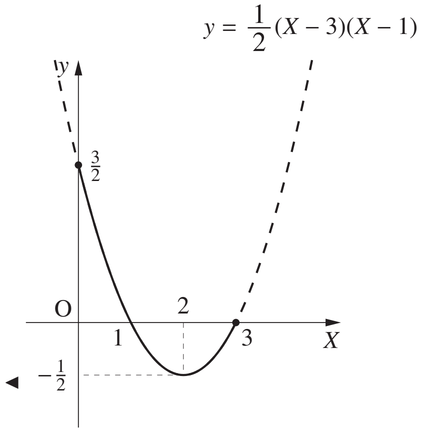
$$= (\log_2 x - \log_2 8)\frac{\log_2 x - \log_2 2}{\log_2 4}$$

$$= (\log_2 x - \log_2 2^3)\frac{\log_2 x - \log_2 2}{\log_2^2}$$

$$= \frac{1}{2}(\log_2 x - 3)(\log_2 x - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(X - 3)(X - 1)$$

右図より，$X = 0$ すなわち，$\boldsymbol{x = 1}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{3}{2}}$，$X = 2$ すなわち，$\boldsymbol{x = 4}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$ となる．



§ 5.4

常用対数

対数の発見は，実用計算法として極めて重要な功績である．対数を用いれば，かけ算をたし算で，わり算をひき算で求められる．まだ現代のように計算機が発達していなかった時代，天文学者や物理学者などは，時間のかかる単調な計算に苦労していたが，この対数の出現によってその苦労は大幅に軽減された．以下では，対数の中でも，私たちが普段にもちいている記数法である十進法と特に相性のよい，「常用対数」について学んでいく．

5.4.1　指数の利用

■指数で数を表すことの利点

地球と太陽の距離は約 1 億 5000 万 km であるが，これを 10 進法で表すと

150000000 [km]

となる．しかし，このように表すと一見何桁の数なのかわからず不便である．

このように大きな数を表すには，10 を底とする指数を用いて

1.5×10^8 km

とするとよい．このように表すことによって，10^8 の部分を見ればこの数が 9 桁であることをすぐに読み取れる．また，計算する上でも便利になる．指数で数を表すことについて，一般に次のことがいえる．

指数を使って数を表す方法〜その１〜

$x \geqq 1$ を満たす x は，整数部分が 1 桁の数 a $(1 \leqq a < 10)$ と，負でない整数 n を使って

$a \times 10^n$

という形ただ 1 通りに表すことができ，このときこの数は最高位が $n+1$ 桁の数である．

また，赤血球の直径は 1m の約 1 万 2500 分の 1 であるが，これを 10 進法で表すと

$\dfrac{1}{125000} = 0.000008$ [m]

となり，これも一見小数第何位に 0 でない数があるのかわかりづらい．

このような 0 に近い数を表すときにも，10 を底とする指数を用いて

8×10^{-6}

と表せば，10^{-6} の部分をみることによって，この数が小数第 6 位にはじめて 0 でない数があらわれることがすぐに読み取れる．こちらの場合もまとめると次のようになる．

指数を使って数を表す方法〜その２〜

$0 < x < 1$ を満たす x は，整数部分が 1 桁の数 a $(1 \leqq a < 10)$ と，負の整数 n を使って

$$a \times 10^n$$

という形でただ 1 通りに表すことができ，このとき小数第 n 位にはじめて 0 でない数があらわれる．

【例題：指数を使って数を表す】

次の問いに答えよ．

(1) 地球から月までの距離は約 380000 [km] である．これを，$a \times 10^n$ [km] の形で表せ．ただし，$1 \leqq a < 10$，n は整数とする．

(2) 地球から太陽までの距離は約 150000000 [km] である．このことと (1) を利用して，地球から太陽までの距離は，地球から月までの距離の約何倍か求めよ．

(3) 水素原子の質量は約 0.0000000000000000000000017 [g] である．これを，$a \times 10^n$ [g] の形で表せ．ただし，$1 \leqq a < 10$，n は整数とする．

(4) 炭素原子の質量は約 0.000000000000000000000020 [g] である．このことと (3) を利用して，炭素原子の質量は，水素原子の質量の約何倍か求めよ．

【解答】

(1) $380000 = \mathbf{3.8 \times 10^5}$.

(2) $150000000 = 1.5 \times 10^8$ であるから

$$\frac{1.5 \times 10^8}{3.8 \times 10^5} = \frac{1.5}{3.8} \times 10^3 = 394.7 \cdots$$

より，約 **395** 倍.

(3) $0.0000000000000000000000017 = \mathbf{1.7 \times 10^{-24}}$.

(4) $0.000000000000000000000020 = 2.0 \times 10^{-23}$ であるから

$$\frac{2.0 \times 10^{-23}}{1.7 \times 10^{-24}} = \frac{2.0}{1.7} \times 10 = 11.76 \cdots$$

より，約 **11.8** 倍.

5.4.2　常用対数の利用

■常用対数の定義

常用対数の定義

10 を底とする対数 $\log_{10} x$ を**常用対数** (common logarithm) という.

巻末の付録『常用対数表』(p.346) には，1.00 から 9.99 までの常用対数の値が，その小数第 5 位を四捨五入して，小数第 4 位まで載せてある．これを利用して，さまざまな正の数の対数の値を求めることができる.

【例題：常用対数表から対数の値を求める】

巻末の付録『常用対数表』(p.346) を用いて，次の値について小数第 4 位を四捨五入して小数第 3 位まで求めよ.

(1) $\log_{10} 3250$　(2) $\log_{10} 0.0237$　(3) $\log_{10} \dfrac{11}{7}$

(4) $\log_{10} \sqrt{5}$　(5) $\log_2 3.4$　(6) $\log_{3.19} \sqrt[4]{3}$

【解答】

(1) 計算していくと

$$\begin{aligned}
\log_{10} 3250 &= \log_{10}(3.25 \times 10^3) \\
&= \log_{10} 3.25 + \log_{10} 10^3 \\
&= \log_{10} 3.25 + 3 \\
&= 0.5119 + 3 = 3.5119
\end{aligned}$$

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

よって，$\log_{10} 3250 \fallingdotseq$ **3.512** となる.

(2) 計算していくと

$$\begin{aligned}
\log_{10} 0.0237 &= \log_{10}(2.37 \times 10^{-2}) \\
&= \log_{10} 2.37 + \log_{10} 10^{-2} \\
&= \log_{10} 2.37 - 2 \\
&= 0.3747 - 2 = -1.6253
\end{aligned}$$

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

よって，$\log_{10} 0.0237 \fallingdotseq$ **−1.625** となる.

(3) 計算していくと

$$\begin{aligned}
\log_{10} \frac{11}{7} &= \log_{10} 11 - \log_{10} 7 \\
&= \log_{10}(1.1 \times 10) - \log_{10} 7 \\
&= \log_{10} 1.1 + \log_{10} 10 - \log_{10} 7 \\
&= \log_{10} 1.1 + 1 - \log_{10} 7 \\
&= 0.0414 + 1 - 0.8451 = 0.1963
\end{aligned}$$

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

◀『和と差に関する対数の性質』(p.222)

よって，$\log_{10}\dfrac{11}{7} \fallingdotseq \mathbf{0.196}$ となる.

(4) 計算していくと

$$\begin{aligned}\log_{10}\sqrt{5} &= \log_{10} 5^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\log_{10} 5\\ &= \frac{1}{2}\times 0.6990 = 0.3495\end{aligned}$$

◀『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

よって，$\log_{10}\sqrt{5} \fallingdotseq \mathbf{0.350}$ となる.

(5) 計算していくと

$$\begin{aligned}\log_2 3.4 &= \frac{\log_{10} 3.4}{\log_{10} 2}\\ &= \frac{0.5315}{0.3010} = 1.7657\cdots\end{aligned}$$

◀『底の変換公式』(p.226)

よって，$\log_2 3.4 \fallingdotseq \mathbf{1.766}$ となる.

(6) 計算していくと

$$\begin{aligned}\log_{3.19}\sqrt[4]{3} &= \frac{\log_{10}\sqrt[4]{3}}{\log_{10} 3.19}\\ &= \frac{\log_{10} 3^{\frac{1}{4}}}{\log_{10} 3.19}\\ &= \frac{\frac{1}{4}\log_{10} 3}{\log_{10} 3.19}\\ &= \frac{\frac{1}{4}\times 0.4771}{0.5038} = 0.2367\cdots\end{aligned}$$

◀『底の変換公式』(p.226)

◀『実数倍に関する対数の性質』(p.224)

よって，$\log_{3.19}\sqrt[4]{3} \fallingdotseq \mathbf{0.237}$ となる.

【例題：対数をもちいて積や商の計算を簡単にする】

巻末の付録『常用対数表』(p.346) を用いて，次の値について小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ.

(1) $124^2\times(0.37)^8$　　(2) $\dfrac{721^5}{3.1^4\times 143^5\times\sqrt{143}}$

【解答】

(1) $x = 124^2\times(0.37)^8$ とおき，x の常用対数を考えると

$$\begin{aligned}\log_{10} x &= \log_{10}\left\{124^2\times(0.37)^8\right\}\\ &= \log_{10} 124^2 + \log_{10}(0.37)^8\\ &= 2\log_{10} 124 + 8\log_{10} 0.37\\ &= 2\log_{10}(1.24\times 10^2) + 8\log_{10}(3.7\times 10^{-1})\end{aligned}$$

$$= 2(\log_{10} 1.24 + \log_{10} 10^2)$$
$$\quad + 8(\log_{10} 3.7 + \log_{10} 10^{-1})$$
$$= 2(0.0934 + 2) + 8(0.5682 - 1) = 0.7324$$

よって，表から $x = 5.40$ とわかるので，求める値は **5.4** となる．

(2) $x = \dfrac{721^5}{3.1^4 \times 143^5 \times \sqrt{143}}$ とおき，x の常用対数を考えると

$$\begin{aligned}
&\log_{10} x \\
&= \log_{10} \frac{721^5}{3.1^4 \times 143^5 \times \sqrt{143}} \\
&= \log_{10} \frac{721^5}{3.1^4 \times 143^{5.5}} \\
&= 5\log_{10} 721 - (4\log_{10} 3.1 + 5.5\log_{10} 143) \\
&= 5\log_{10}(7.21 \times 10^2) - 4\log_{10} 3.1 \\
&\qquad -5.5\log_{10}(1.43 \times 10^2) \\
&= 5(\log_{10} 7.21 + 2) - 4\log_{10} 3.1 \\
&\qquad -5.5(\log_{10} 1.43 + 2) \\
&= 5(0.8579 + 2) - 4 \cdot 0.4914 - 5.5(0.1553 + 2) \\
&= 0.46975
\end{aligned}$$

よって，表から $x = 2.95$ とわかるので，求める値は **3.0** となる．

現代のように計算機（コンピュータ）の発達していなかった時代の天文学者や物理学者は，大きな数の掛け算や割り算を上の例題のように工夫して計算していた．当時，付録『常用対数表』(p.346) の作成には，ネイピア (Johon Napier) やブリッグス (Henry Briggs) などが何十年もの歳月をかけて行った．後の数学者ラプラス (Pierre Simonn de Laplace) は，この業績を評価して「(対数の発見は）天文学者の寿命を 2 倍にした」と語ったという．

■桁数と最高位の数の評価

【例題：桁数と最高位の数の評価】

$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$，$\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.4771$ を利用して次の問いに答えよ．

(1) 5^{101} は何桁の整数か求めよ．また，5^{101} の最高位の数を求めよ．

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}$ は小数第何位にはじめて 0 でない数があらわれるか求めよ．また，その数はいくつか求めよ．

【解答】

(1) 5^{101} の常用対数を考えると

$$
\begin{aligned}
&\log_{10} 5^{101}\\
&= 101\log_{10} 5\\
&= 101(\log_{10} 10 - \log_{10} 2)\\
&= 101(1 - 0.3010)\\
&= 70.599
\end{aligned}
$$

より，$5^{101} = 10^{70.599}$ とわかる．
ここで，$10^{70.599}$ は $10^{0.599+70}$ だから

$$\underbrace{10^{0.599}}_{A} \times \underbrace{10^{70}}_{B}$$

と 2 つの部分に分けることができ，A の部分は

$$(1 =)\ \ 10^0 \leqq 10^{0.599} < 10^1\ \ (= 10)$$

を満たすので，B の指数部分から，$10^{0.599} \times 10^{70}$ つまり 5^{101} は **71 桁**とわかる．

◀『指数を使って数を表す方法〜その 1 〜』(p.241)

さらに

$$
\begin{aligned}
&1 = 10^0\\
&2 = 10^{0.3010}\\
&3 = 10^{0.4771}\\
&4 = 2^2 = 10^{0.3010\times 2} = 10^{0.6020}
\end{aligned}
$$

などと求まるが，いま A の部分は

$$(3 =)\ \ 10^{0.4771} < 10^{0.599} < 10^{0.6020}\ \ (= 4)$$

を満たすので，$10^{0.599} = 3.\cdots$ となり，5^{101} の最高位の数は **3** とわかる．

◀ $5^{101} = 10^{0.599} \times 10^{70} = 3.\cdots \times 10^{70}$

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}$ の常用対数を考えると

$$
\begin{aligned}
&\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\\
&= \log_{10} 3^{-20}\\
&= -20\log_{10} 3\\
&= -20 \times 0.4771\\
&= -9.542
\end{aligned}
$$

より，$5^{101} = 10^{-9.542}$ とわかる．

ここで，$10^{-9.542}$ は $10^{0.458-10}$ だから

$$\underbrace{10^{0.458}}_{A}\times\underbrace{10^{-10}}_{B}$$

と 2 つの部分に分けることができ，A の部分は

$$(1=)\ \ 10^{0} \leqq 10^{0.458} < 10^{1}\ \ (=10)$$

を満たすので，B の指数部分から，$10^{0.458}\times10^{-10}$ つまり 5^{101} は**小数第 10 位**にはじめて 0 でない数字があらわれる．

◀『指数を使って数を表す方法〜その２〜』(p.242)

さらに

$$1=10^{0}$$
$$2=10^{0.3010}$$
$$3=10^{0.4771}$$

などと求まるが，いま A の部分は

$$(2=)\ \ 10^{0.3010} < 10^{0.458} < 10^{0.4771}\ \ (=3)$$

を満たすので，$10^{0.458}=2.\cdots$ となり，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}$ の求める数は **2** とわかる．

◀ $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}=10^{0.458}\times10^{-10}=2.\cdots\times10^{-10}$