第 3 章

三角関数

§ 3.1

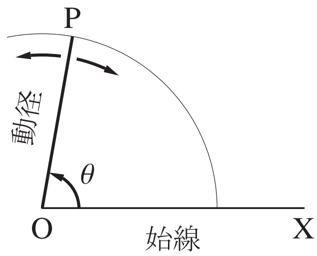
一般角と弧度法

FTEXT数学 I で学んだ三角比によって，さまざまな図形の辺の長さや角を計算で求めることができるようになった．この章では三角比を拡張した三角関数について学んでいこう．三角関数の応用範囲は広く，たとえばモーターの回転，ばねの伸縮，波の伝播などを数式で記述することができるようになる．まずは準備として，角度について新しい単位を導入してく．

3.1.1　一般角

■動径

平面上で，点 O を中心として半直線 OP を回転させるとき，この半直線 OP を**動径** (radius vector) といい，はじめの固定された半直線 OX を**始線** (initial line) という．



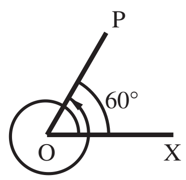
■角度の拡張

固定された図形にあらわれる角度の大きさは，0° から 360° である．この視点で見れば，時計の 1 時の長針と 2 時 30 分の長針のなす角度は 1800° であり，1 時の長針と 3 時 30 分の長針のなす角度も 1800° である．しかし，時刻の変化に伴う長針の回転量は，前者と後者では明らかに異なる．また，長針を 1 時から 10 分進めても，10 分戻してもどちらも 60° 回転するが，向きは逆である．

これらの点を考慮できるように 360° 以上の角や，回転の向きを考えた角を導入することにしよう．

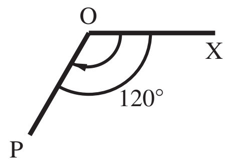
1) 360° 以上の角度

動点 P は（反時計回りに）1 周より多く動いてもよいとする．たとえば，右の図では，P が反時計回りに 1 周と 60° 回転しているので，∠POX = 360° + 60° = 420° と考える．



2) 負の角度

動点 P は，X から時計回りに動いてもよいとし，この場合は ∠POX を負の値で定める．たとえば，右の図では，P が時計回りに 120° 回転しているので，∠POX = −120° と考える．



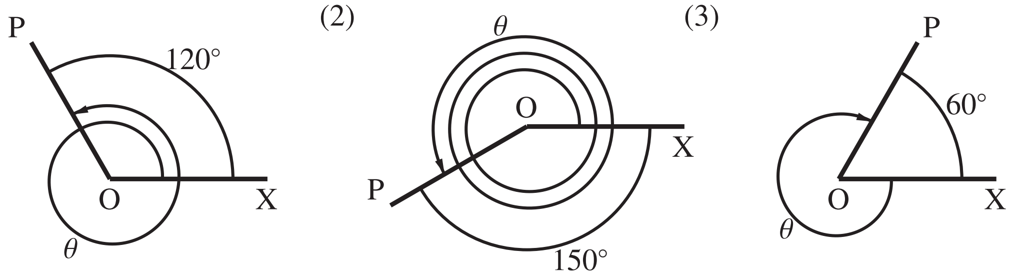
これらのように，360° 以上回転する場合や，回転の向きも考えた角を**一般角** (general angle) という．

また，一般角 θ に対して，始線 OX から角 θ だけ回転した位置にある動径 OP を，θ の動径という．

【例題：一般角の練習〜その１〜】

次の図の θ を一般角で表せ．

(1)　(2)　(3)



【解答】

(1) 動径 OP は，反時計回りに 1 周と 120° 進んだので

$$\theta = 360^\circ + 120^\circ = \mathbf{480^\circ}$$

(2) 動径 OP は，反時計回りに 2 周と 210° 進んだので　◀ $360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$

$$\theta = 360^\circ \times 2 + 210^\circ = \mathbf{930^\circ}$$

(3) 動径 OP は，時計回りに 300° 進んだので　◀ $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

$$\theta = \mathbf{-300^\circ}$$

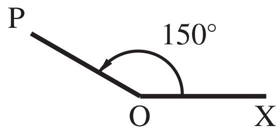
【例題：一般角の練習〜その２〜】

次の角の動径を図示せよ．

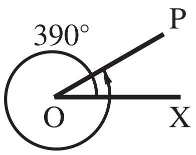
(1) 150°　(2) 390°　(3) −90°　(4) −690°

【解答】

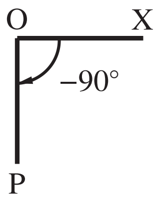
(1)



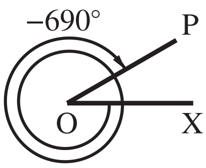
(2)



(3)

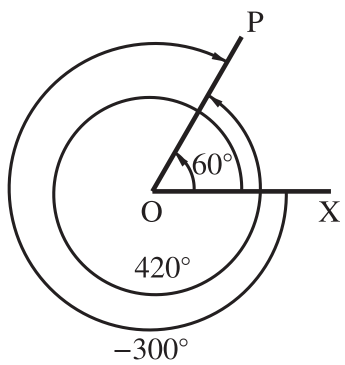


(4)



■**動径の表す角**

動径は 360° 回転するともとの位置に戻るので，たとえば，60° の動径は，右図のように



$420°\ (=60°+360°)$

$780°\ (=60°+360°\times 2)$

$-300°\ (=60°-360°)$

などの角の動径と同じ位置にくる．すなわち，$60°+360°\times n$（n は整数）の動径はすべて同じ位置にくる．これらの角を動径 OP の表す角という．

一般に，次のことがいえる．

動径の表す角

動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す角 θ は

$$\theta=\alpha+360°\times n\quad (n \text{ は整数})$$

のようにあらわされる．

【例題：動径の表す角】

次の角の動径を OP とするとき，動径 OP の表す角を

$\alpha + 360^\circ \times n$ （n は整数）

の形で表せ．ただし，$0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$ とする．

(1) 420°　　(2) 1450°　　(3) -80°　　(4) -895°

【解答】

(1) $420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$ なので $\boldsymbol{60^\circ + 360^\circ \times n}$

(2) $1450^\circ = 360^\circ \times 4 + 10^\circ$ なので $\boldsymbol{10^\circ + 360^\circ \times n}$

(3) $-80^\circ = 360^\circ \times (-1) + 280^\circ$ なので $\boldsymbol{280^\circ + 360^\circ \times n}$

(4) $-895^\circ = 360^\circ \times (-3) + 185^\circ$ なので $\boldsymbol{185^\circ + 360^\circ \times n}$

3.1.2　弧度法

■度数法の問題点

これまで，角度の大きさは「1 周は 360°」と定義して表してきた．この方法は**度数法** (degree measure) と呼ばれ，紀元前から用いられてきたものである[*1]．しかし，度数法で表わされた角の値は便宜的なもので数学的根拠がなく，数学の発展と共に不便が生じてきた[*2]．

■弧度法の定義

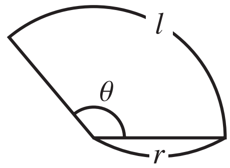
そこで，これらの不便を解消するための新しい角度を導入しよう．

弧度法

弧の長さが l，半径が r の円弧のなす中心角 θ を

$$\theta = \frac{l}{r}$$

で定義する．



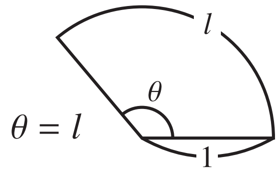
このような角度の表し方を**弧度法** (circular measure) という．弧度法は比で角度の大きさを表すため，単位が無いが[*3]，あえて単位を付けたいときには**ラジアン** (radian) や**弧度**をもちいる．

[*1] 1 周の角度を表すために用いられた「360」という値の由来は，1 年はほぼ 360 日であること，360 は約数を多く持つことの 2 点にあるのではないかといわれている．前者では天体の星の位置が 1 日で約 1 度ずれること，後者では円周を分割した際に角度が整数になりやすいことなどの利点がある．

[*2] たとえば，すぐ後にみる扇形の面積がきれいな式で表せなかったり，FTEXT数学 III で学ぶ三角関数の微分・積分において煩雑な計算が起こったりする．

[*3] 単位が無い値のことを**無名数** (abstract number) という．

上の定義において，$r = 1$ とすると $\theta = l$ となる．これは，単位円で考えたときには，中心角は対応する弧の長さで表されることを意味している．すなわち



$360^\circ = 2\pi$ ラジアン

である．

主な角について，度数法と弧度法の値をまとめると次のようになる．

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度法	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\dfrac{5}{6}\pi$	π	$\dfrac{3}{2}\pi$	2π

弧度法についても『動径の表す角』(p.146) について，次のことがいえる．

弧度法での動径の表す角

動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す角 θ は

$\theta = \alpha + 2n\pi$　(n は整数)

のようにあらわされる．

【例題：度数法を弧度法になおす】

次の角を弧度法で表せ．また，$\alpha + 2n\pi$ (n は整数) の形で表せ．ただし，$0 \leqq \alpha < 2\pi$ とする．

(1) 15°　(2) 550°　(3) 80°　(4) -570°

【解答】

(1) $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{12}}$，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{12} + 2n\pi}$

(2) $\boldsymbol{\dfrac{55}{18}\pi}$，$\boldsymbol{\dfrac{19}{18}\pi + 2n\pi}$

(3) $\boldsymbol{\dfrac{4}{9}\pi}$，$\boldsymbol{\dfrac{4}{9}\pi + 2n\pi}$

(4) $\boldsymbol{-\dfrac{19}{6}\pi}$，$\boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi + 2n\pi}$

【例題：弧度法を度数法になおす】

次の角を度数法で表せ．

(1) 8π　(2) $-\dfrac{7}{3}\pi$　(3) $-\dfrac{43}{12}\pi$　(4) $-\dfrac{21}{10}\pi$

【解答】

(1) $\mathbf{1440^\circ}$

(2) $\mathbf{-420^\circ}$

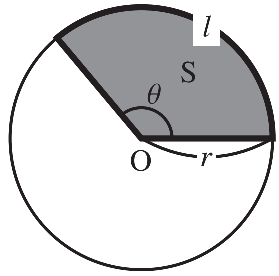
(3) $\mathbf{-645^\circ}$

(4) $\mathbf{-378^\circ}$

■扇形の弧の長さと面積

扇形の弧の長さと面積を，弧度法をもちいて表してみよう．

右図のように半径が r，中心角が θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると，弧度法の定義より $\theta = \dfrac{l}{r}$ だから



$$\therefore\ l = r\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

面積と中心角の比から

$$S : \theta = \pi r^2 : 2\pi$$

$$\therefore\ S = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

以上，①，②より，$S = \dfrac{1}{2}rl$ となる．

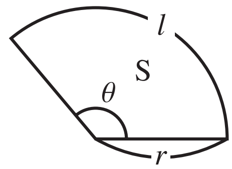
扇形の弧の長さと面積

半径が r，中心角が θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると

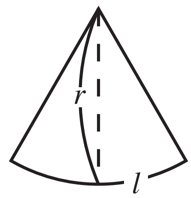
$$l = r\theta$$

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

である．



右図のように，扇形を，あたかも底辺が l，高さが r の三角形のように考え，(底辺)×(高さ)÷2 から，$S = \dfrac{1}{2}rl$ と覚えておけばよい．



【例題：扇形の弧の長さと面積】

次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ．

(1) 半径が 9，中心角が $\dfrac{2}{3}\pi$　　(2) 半径が 3，中心角が $\dfrac{\pi}{5}$

【解答】

(1) $l = 9 \times \dfrac{2}{3}\pi = \boldsymbol{6\pi}$，$S = \dfrac{1}{2} \times 9 \times 6\pi = \boldsymbol{27\pi}$

(2) $l = 3 \times \dfrac{\pi}{5} = \boldsymbol{\dfrac{3}{5}\pi}$，$S = \dfrac{1}{2} \times 3 \times \dfrac{3}{5}\pi = \boldsymbol{\dfrac{9}{10}\pi}$

§ 3.2
三角関数

FTEXT数学 I の三角比で使う角度 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ だったが，ここからは，扱う角を任意の実数にまで拡張した三角関数についてみていくことにする．

3.2.1　三角関数の定義

■三角関数の定義

FTEXT数学 I で学んだ**三角比** (trigonometric ratio) で扱う角を任意の実数とすれば，次の**三角関数** (trigonometric function) の定義となる．

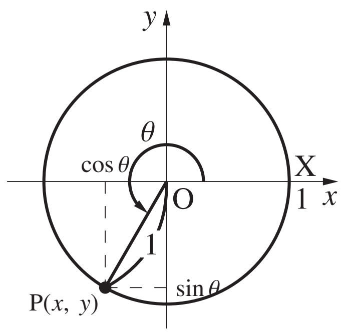
三角関数の定義

単位円周と動径の交点を P，X(1，0) とする．
$\angle \mathrm{POX} = \theta$ (θ は任意の実数) とするとき

$$\cos\theta = (\text{動点 P の } x \text{ 座標})$$

$$\sin\theta = (\text{動点 P の } y \text{ 座標})$$

$$\tan\theta = \frac{(\text{動点 P の } y \text{ 座標})}{(\text{動点 P の } x \text{ 座標})} = (\text{動径 OP の傾き})$$

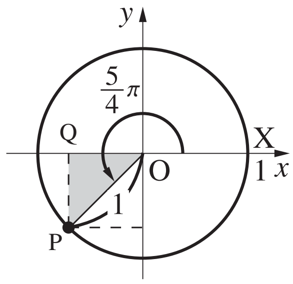


とする．ただし，動点 P の x 座標が 0 のとき，
つまり $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) のときは $\tan\theta$ は定義されない．

具体的な例で確認してみよう．

1) $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$ のとき

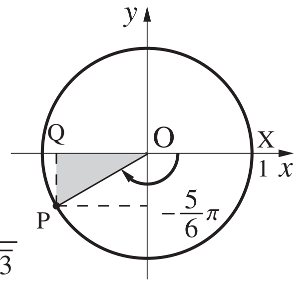
$\triangle \mathrm{OPQ}$ は $\mathrm{PQ} : \mathrm{QO} : \mathrm{OP} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ の直角三角形である．つまり，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ なので



$$^{*4}\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \tan\frac{5}{4}\pi = 1$$

[*4] π の正の実数倍に対する三角関数では，$\cos\dfrac{5}{4}\pi$ のように括弧をつけない．

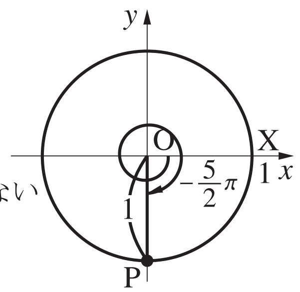
2) $\theta = -\dfrac{5}{6}\pi$ のとき



$\triangle$OPQ は PQ : QO : OP = 1 : $\sqrt{3}$: 2 の直角三角形である．つまり，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ なので

[*5] $\cos\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$\sin\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right) = -\dfrac{1}{2}$，　$\tan\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

3) $\theta = -\dfrac{5}{2}\pi$ のとき



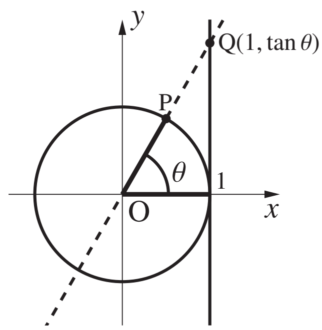
$-\dfrac{5}{2}\pi = -\dfrac{1}{2}\pi - 2\pi$ より，X から負の方向へ $-\dfrac{1}{2}\pi$ 移動した (0,　− 1) に P があるので

$\cos\left(-\dfrac{5}{2}\pi\right) = 0$，$\sin\left(-\dfrac{5}{2}\pi\right) = -1$，　$\tan\left(-\dfrac{5}{2}\pi\right)$ は定義できない

$\tan\theta$ には次のような意味もあることを理解しておこう．

$\tan\theta$ の図形的意味

$\tan\theta$ の定義は，動径 OP の傾きであるが，傾きとは x 軸方向に 1 増加するときの y 軸方向の増加量である．そのため，右図のように直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を Q とすると，Q の y 座標が $\tan\theta$ になる．



■三角関数の定義域と値域

以上のことから，三角関数の定義域と値域は次のようにまとめられる．

三角関数の定義域と値域

1) 三角関数の定義域

a) $\sin\theta$，$\cos\theta$ の θ は，任意の実数をとることができる．

b) $\tan\theta$ の θ は，$\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数)以外の任意の実数をとることができる．

2) 三角関数の値域

a) 任意の実数 θ に対し，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は -1 以上 1 以下の値をとる．

b) $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数)以外の任意の実数 θ に対し，$\tan\theta$ は任意の実数をとる．

■三角関数の符号と動径の象限

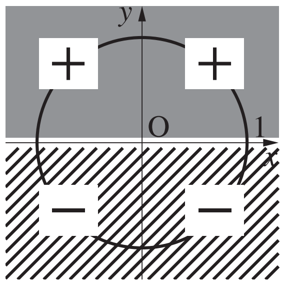
三角関数の値の符号は，その角の動径がどの象限に含まれるかで決定する．まとめると次のようになる．

[*5] $\cos\left(-\dfrac{5}{2}\pi\right)$ のように，π の負の実数倍に対する三角関数では，括弧をつけることが一般的である．

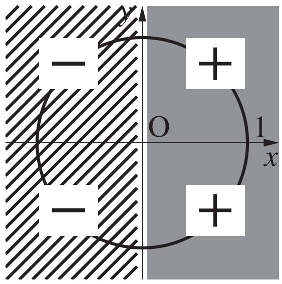
三角関数の符号と動径の象限

三角関数の値の符号は，動径のある象限によって次のように決まる．

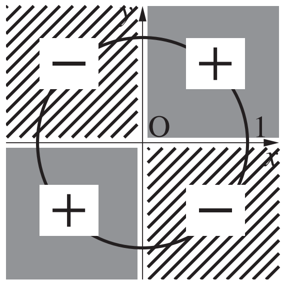
1) $\sin\theta$ の符号



2) $\cos\theta$ の符号



3) $\tan\theta$ の符号



【例題：任意の角に対する三角関数の値】

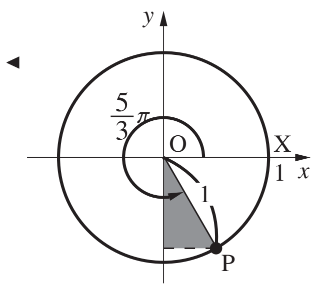
以下の角度に対する，正弦，余弦，正接の値をそれぞれ求めよ．

(1) $\frac{5}{3}\pi$　　(2) $\frac{7}{6}\pi$　　(3) $\frac{23}{3}\pi$　　(4) $-\frac{15}{4}\pi$

【解答】

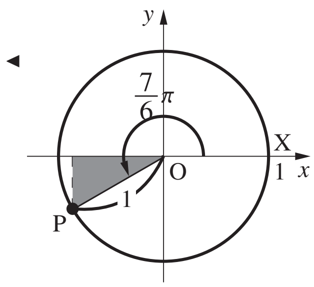
(1) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ なので

$$\cos\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2}$$
$$\sin\frac{5}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\frac{5}{3}\pi = -\sqrt{3}$$



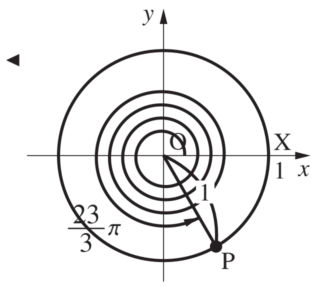
(2) $\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ なので

$$\cos\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{7}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



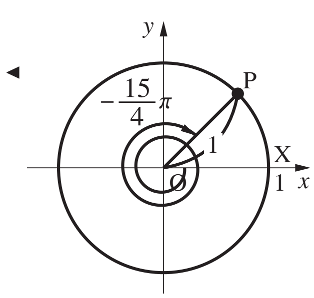
(3) $\frac{23}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi + 3\cdot 2\pi$ より，$\frac{5}{3}\pi$ の三角関数に等しい．(1) より

$$\cos\frac{23}{3}\pi = \frac{1}{2}$$
$$\sin\frac{23}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\frac{23}{3}\pi = -\sqrt{3}$$



(4) $-\frac{15}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi + (-2)\cdot 2\pi$ より，$\frac{1}{4}\pi$ の三角関数に等しい．よって

$$\cos\left(-\frac{15}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\left(-\frac{15}{4}\pi\right) = 1$$

【例題：三角関数を含む方程式】

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ を満たす θ を求めよ.

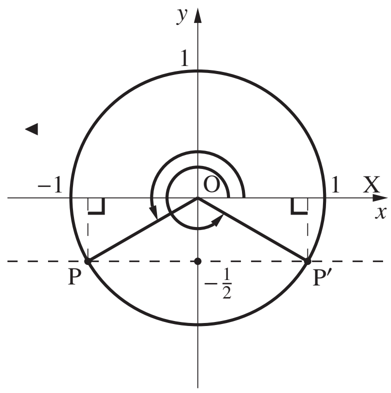
(2) $0 \leqq \theta < 4\pi$ のとき，$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ を満たす θ を求めよ.

(3) θ を任意の実数とする．$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ を満たす θ を求めよ.

(4) $-\pi \leqq \theta < \pi$ のとき，$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ を満たす θ を求めよ.

【解答】

（動点の y 座標の値）$= -\frac{1}{2}$ であればよいので，求める θ は，右図の $\angle$POX, $\angle$P′OX に等しい.



(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\angle \mathrm{POX} = \frac{7}{6}\pi,\ \angle \mathrm{P'OX} = \frac{11}{6}\pi$$

となる．つまり，$\boldsymbol{\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi}$.

(2) $0 \leqq \theta < 4\pi$ の範囲では

$$\angle \mathrm{POX} = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi + 2\pi$$
$$\angle \mathrm{P'OX} = \frac{11}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi + 2\pi$$

となる．つまり，$\boldsymbol{\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi}$.

(3) θ は任意なので，n を整数として

$$\angle \mathrm{POX} = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi,\ \angle \mathrm{P'OX} = \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$$

となる．つまり，$\boldsymbol{\theta = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi,\ \frac{11}{6}\pi + 2n\pi}$.

(4) $-\pi \leqq \theta < \pi$ の範囲では

$$\angle \mathrm{POX} = \frac{7}{6}\pi - 2\pi,\ \angle \mathrm{P'OX} = \frac{11}{6}\pi - 2\pi$$

となる．つまり，$\boldsymbol{\theta = -\frac{5}{6}\pi,\ -\frac{1}{6}\pi}$.

【例題：三角関数を含む不等式】

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\cos\theta < \dfrac{1}{2}$ を満たす θ の範囲を求めよ.

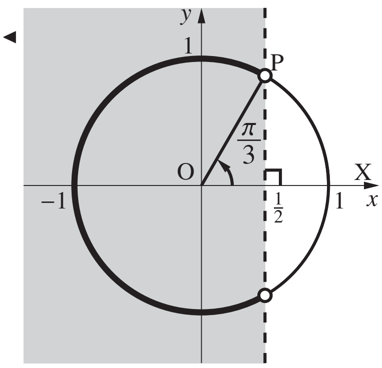
(2) $0 \leqq \theta < 4\pi$ のとき，$\cos\theta < \dfrac{1}{2}$ を満たす θ の範囲を求めよ.

(3) θ を任意の実数とする．$\cos\theta < \dfrac{1}{2}$ を満たす θ の範囲を求めよ.

(4) $-\pi \leqq \theta < \pi$ のとき，$\cos\theta < \dfrac{1}{2}$ を満たす θ の範囲を求めよ.

【解答】

（動点の x 座標の値）$< \dfrac{1}{2}$ であればよい．そのためには，動点が右図の太線部分にあればよい.



(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\pi < \theta < \dfrac{5}{3}\pi}$.

(2) $0 \leqq \theta < 4\pi$ の範囲では，(1) の答えに加えて

$$\frac{1}{3}\pi + 2\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi + 2\pi$$

も満たすので，$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\pi < \theta < \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi < \theta < \dfrac{11}{3}\pi}$.

(3) θ は任意なので，

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}\pi + 2n\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi + 2n\pi}\ \textbf{（}\boldsymbol{n}\ \textbf{は整数）}$$

が求める答えとなる.

(4) $-\pi \leqq \theta < \pi$ の範囲では

$$-\pi \leqq \theta < \frac{5}{3}\pi - 2\pi,\quad \frac{1}{3}\pi < \theta < \pi$$

となる．つまり，$\boldsymbol{-\pi \leqq \theta < -\dfrac{1}{3}\pi,\ \dfrac{1}{3}\pi < \theta < \pi}$.

【例題：範囲をもつ変数の置き換え】

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$, $\theta' = 2\theta - \dfrac{\pi}{3}$ とする．θ' のとりうる範囲を求めよ.

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値を求めよ.

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の範囲を求めよ.

【解答】

(1)
$$0 \leqq \theta < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leqq 2\theta < 4\pi$$

◀ 2 倍しても大小関係は変わらない

$$\Leftrightarrow 0 - \frac{\pi}{3} \leqq 2\theta - \frac{\pi}{3} < 4\pi - \frac{\pi}{3}$$

◀ $\dfrac{\pi}{3}$ を引いても大小関係は変わらない

より $\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta' < \dfrac{11}{3}\pi}$ と分かる.

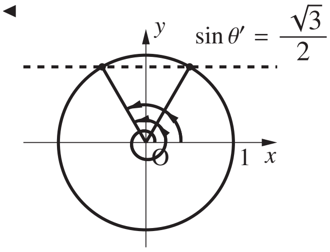
(2) (1) の θ' を用いると，与えられた方程式は $\sin\theta' =$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる．(1) より $-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta' < \dfrac{11}{3}\pi$ なので，右図より $\theta' = \dfrac{1}{3}\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi$ となる．

$\theta = \dfrac{\theta'}{2} + \dfrac{\pi}{6}$ なので

$$\boldsymbol{\theta = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi}$$

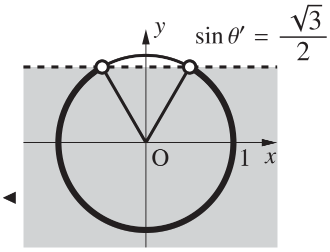
◀



(3) (1) の θ' を用いると，与えられた不等式は $\sin\theta' < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる．(1) より $-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta' < \dfrac{11}{3}\pi$ なので

$$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta' < \frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi < \theta' < \frac{7}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi < \theta' < \frac{11}{3}\pi$$

◀



となる．$\theta' = 2\theta - \dfrac{\pi}{3}$ を代入して θ について解けば

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi}$$

◀ たとえば

$\dfrac{2}{3}\pi < 2\theta - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$

$\Leftrightarrow\ \pi < 2\theta < \dfrac{8}{3}\pi\ \Leftrightarrow\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{4}{3}\pi$

3.2.2　三角関数の相互関係

■三角関数の相互関係

三角関数においても，FTEXT数学 I で学んだ三角比の相互関係

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,\quad 1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta},\quad \tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

が成り立つ．

拡張された三角関数の相互関係

任意の実数 θ について，次の式が成り立つ（ただし，分母が 0 となる場合を除く）．

1) $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の関係

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

2) $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の関係

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

3) $\tan\theta$ と $\sin\theta$ の関係

$$1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

4) $\cos\theta$ と $\tan\theta$ の関係

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

3) と 4) は記憶しなくても，1) と 2) からすぐに導ける．2) の両辺を $\sin^2\theta$ や $\cos^2\theta$ で割って作ればよい，ということだけ覚えておこう．

【例題：三角関数の相互関係の利用】

(1) $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，以下の問いに答えなさい．

(a) $0 < \theta < \pi$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい．

(b) $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい．

(2) $\pi < \theta < 2\pi$，$\tan\theta = 2$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めなさい．

【解答】

(1) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \dfrac{8}{9}$ より，$\sin\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

◀『拡張された三角関数の相互関係 ii)』(p.154)

(a) $0 < \theta < \pi$ より，$\sin\theta > 0$ なので

$\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$．また，$\tan\theta = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$．

◀『拡張された三角関数の相互関係 i)』(p.154)

(b) $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\theta$ は正負どちらでもよい．よって $\boldsymbol{\sin\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$，$\tan\theta = \dfrac{\pm 2\sqrt{2}/3}{1/3} = \boldsymbol{\pm 2\sqrt{2}}$．

(2) $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 5$ より，$\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1}{5}}$．ここで，$\pi < \theta < 2\pi$，$\tan\theta > 0$ より θ は第 3 象限の角に対応し，$\cos\theta < 0$．よって，$\boldsymbol{\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$．

◀『拡張された三角関数の相互関係 iv)』(p.154)

また，$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$．

◀『拡張された三角関数の相互関係 i)』(p.154)

【例題：$\sin\theta \pm \cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ の関係】

(1) (a) $\cos\theta + \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin\theta - \cos\theta$ の値を求めなさい．

(b) さらに，$0 < \theta < \pi$ であるとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(2) $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，$\cos\theta\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

【解答】

(1) (a) $\cos\theta + \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗して

$$1 + 2\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{4} \iff \boldsymbol{\cos\theta\sin\theta = -\frac{3}{8}}$$

◀『拡張された三角関数の相互関係 ii)』(p.154)

また，この値を代入すれば，

$$(\cos\theta - \sin\theta)^2 = 1 - 2\cos\theta\sin\theta = \frac{7}{4}$$

よって，$\boldsymbol{\cos\theta - \sin\theta = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$．

（b）(1) より，次の連立方程式が成立する．

$$\begin{cases} \cos\theta + \sin\theta = \dfrac{1}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \cos\theta - \sin\theta = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①−② より $2\sin\theta = \dfrac{1 \mp \sqrt{7}}{2}$ であるが, $0 < \theta < \pi$ より $\sin\theta > 0$ なので，$\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{1+\sqrt{7}}{4}}$.

つまり，$\cos\theta - \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ と分かるので，

① + ② より $\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{1-\sqrt{7}}{4}}$ となる．

(2) まず，$\cos\theta \pm \sin\theta$ の 2 乗をそれぞれ考えて

$$(\cos\theta + \sin\theta)^2 = 1 + 2\cos\theta\sin\theta = \frac{5}{3}$$

$$(\cos\theta - \sin\theta)^2 = 1 - 2\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\theta + \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{3},\quad \cos\theta - \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

◀『拡張された三角関数の相互関係 ii)』(p.154)

である．ここで，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta > 0$. $\cos\theta\sin\theta > 0$ なので $\sin\theta > 0$ と分かる．

よって，$\cos\theta > 0$, $\sin\theta > 0$ から $\cos\theta + \sin\theta > 0$.

$$\begin{cases} \cos\theta + \sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \\ \cos\theta - \sin\theta = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

この連立方程式を解いて（複合同順）

$$\boldsymbol{(\cos\theta,\ \sin\theta) = \left(\frac{\sqrt{15} \pm \sqrt{3}}{6},\ \frac{\sqrt{15} \mp \sqrt{3}}{6}\right)}$$

3.2.3　三角関数の性質

■$\pi+2n\pi$ の三角関数

n が整数のとき，角 $\theta+2n\pi$ の動径は，角 θ の動径と一致するので，次の公式が成り立つ．

$\pi+\theta$ の三角比

任意の角 θ について

$$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$$
$$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$$
$$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$$

が成り立つ．ただし，n は整数とする．

■$-\theta$ の三角関数

【暗記：$-\theta$ の三角関数】

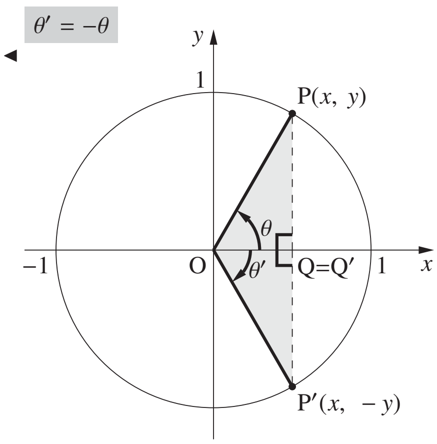
$\sin(-\theta)$，$\cos(-\theta)$，$\tan(-\theta)$ を，それぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ で表せ．

【解答】

右図のように，単位円周上に角 θ の動径 OP と角 $-\theta$ ($=\theta'$ とする）の動径 OP$'$ をとる．

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\triangle$OPQ と $\triangle$OP$'$Q$'$ は合同なので，点 P$'$ の座標は $(x,\ -y)$ となるから

$$\sin\theta'=-y=\mathbf{-\sin\theta}$$
$$\cos\theta'=x=\mathbf{\cos\theta}$$
$$\tan\theta'=\frac{-y}{x}=\mathbf{-\tan\theta}$$

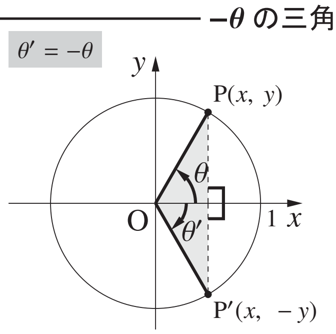


$-\theta$ の三角比

任意の角 θ について

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

が成り立つ．



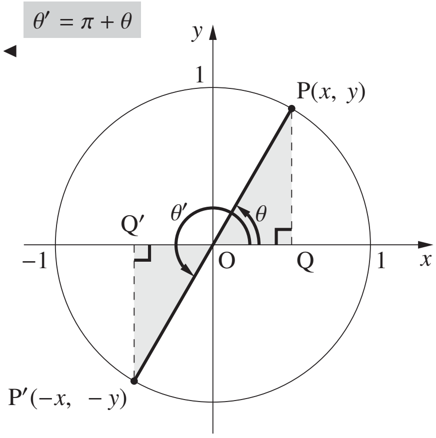
■$\theta+\pi$ の三角関数

【暗記：$\theta+\pi$ の三角関数】

$\sin(\theta+\pi)$，$\cos(\theta+\pi)$，$\tan(\theta+\pi)$ を，それぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ で表せ．

【解答】

右図のように，単位円周上に角 θ の動径 OP と角 $\pi+\theta$ $(=\theta'$ とする$)$ の動径 OP$'$ をとる．



点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\triangle$OPQ と $\triangle$OP$'$Q$'$ は合同なので，点 P$'$ の座標は $(-x,\ -y)$ となるから

$$\sin\theta' = -y = \boldsymbol{-\sin\theta}$$

$$\cos\theta' = -x = \boldsymbol{-\cos\theta}$$

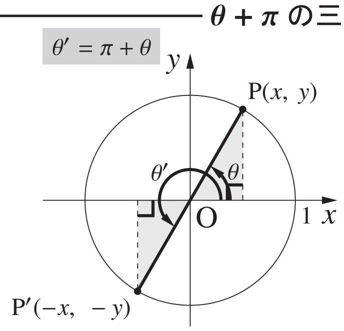
$$\tan\theta' = \frac{-y}{-x} = -\frac{y}{x} = \boldsymbol{\tan\theta}$$

$\theta+\pi$ の三角比

任意の角 θ について

$$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$$
$$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$$
$$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$$

が成り立つ．



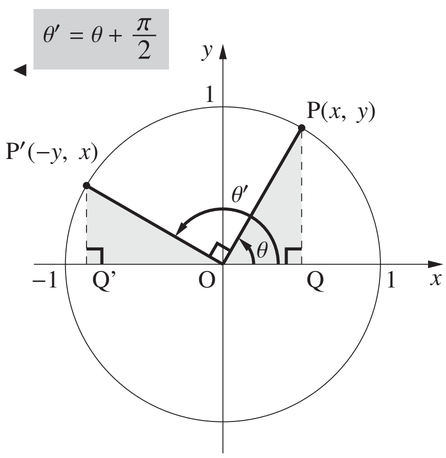
■$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数

【暗記：$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数】

$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ を，それぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ で表せ．

【解答】

右図のように，単位円周上に角 θ の動径 OP と角 $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ $(=\theta'$ とする$)$ の動径 OP$'$ をとる．



点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\triangle$OPQ と $\triangle$OP$'$Q$'$ は合同なので，点 P$'$ の座標は $(-y,\ x)$ となるから

$$\sin\theta' = x = \boldsymbol{\cos\theta}$$

$$\cos\theta' = -y = \boldsymbol{-\sin\theta}$$

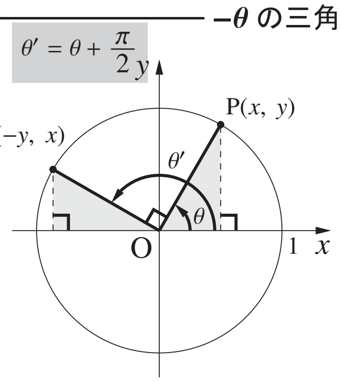
$$\tan\theta' = \frac{x}{-y} = \boldsymbol{-\frac{1}{\tan\theta}}$$

$-\theta$ の三角比

任意の角 θ について

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$$
$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$$
$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$$

が成り立つ.



この節で学んだ公式は丸暗記するようなものではない．図を書いてすぐに導けるように練習しておこう.

§ 3.3
三角関数のグラフ

三角関数はグラフに描くとサインカーブという独特の曲線を描く．ここでは，そのグラフについて調べていこう．

3.3.1　$y = \sin x$ のグラフとその周辺のグラフ

■三角関数の表しかた

$\sin\theta$ などの三角関数を定義したとき，θ は角度を意味していた．

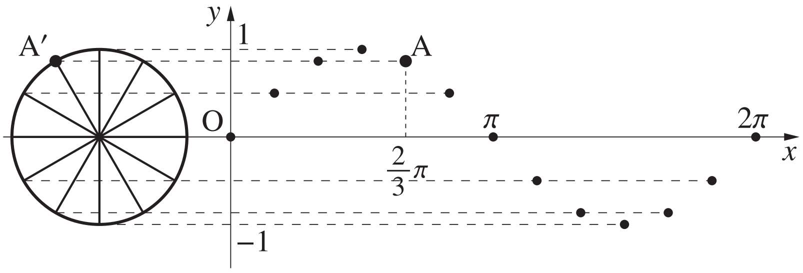
しかし，三角関数を，ある数 θ に対応する数を与える式，とより抽象的にみるならば，θ の意味を角度に限定する必要はない．このため，変数を θ で表さず，$y = \sin x$ のように x で表すことも多く，以下でもそのように扱っていく．

■$y = \sin x$ のグラフ

関数 $y = \sin x$ について，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で x と y の関係を表にすると，以下のようになる．x の値は $\frac{1}{6}\pi$ 刻みでとってある．

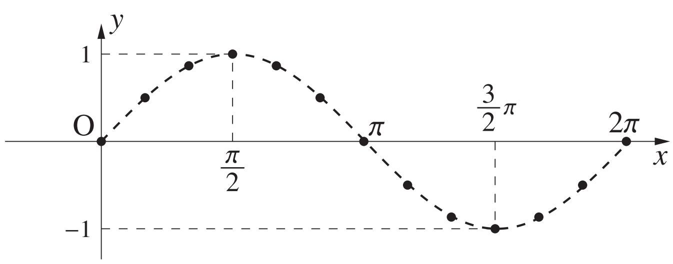
x	$\cdots$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	$\cdots$
y	$\cdots$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\cdots$

この関係をグラフで表すと下の図のようになる．

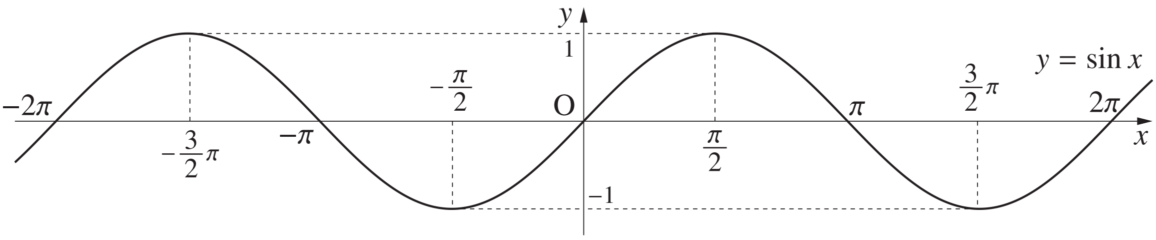


たとえば，上の図の点 A の y 座標は動径のなす角が $\frac{2}{3}\pi$ であるときの動点 A′ の y 座標である．

上の図の各点をなめらかにつなぐと右の図のようになる．



さらに，x の値が 2π 増えるごとに $\sin x$ は同じ値を取ることに注意して，任意の実数を定義域としたグラフを書くと，下の図のようになる．



この $y = \sin x$ のグラフに表れる曲線のことを，**正弦曲線**（sine curve）という．

正弦曲線の値域の長さの半分を**振幅**（amplitude）という．$y = \sin x$ の振幅は 1 である．

■周期関数の定義

$y = \sin x$ のように，x の変化に応じて同じ値をとる関数は，次のようにまとめることができる．

周期関数の定義

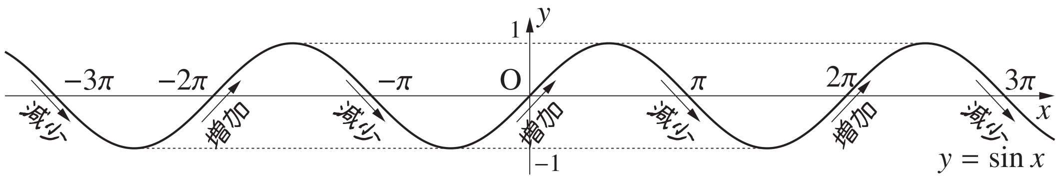
関数 $f(x)$ が，ある正の実数 p に対して次の条件

どんな実数 x に対しても $f(x) = f(x+p)$ が成立

を満たすとき，この関数 $f(x)$ のことを**周期関数**（periodic function）という．また，上の条件を満たす実数 p のうち，正の値で最小のものを，この周期関数 $f(x)$ の**周期**（period）という[*6]．

$f(x) = \sin x$ とおくと，任意の実数 x について $f(x) = f(x+2\pi)$ が成り立つので，関数 $y = f(x) = \sin x$ は周期関数であり，周期は 2π である．グラフ $y = f(x)$ においては「x が 2π 増加するたびに同じ形が表れる」ことになる．

$y = \sin x$ のグラフの特徴

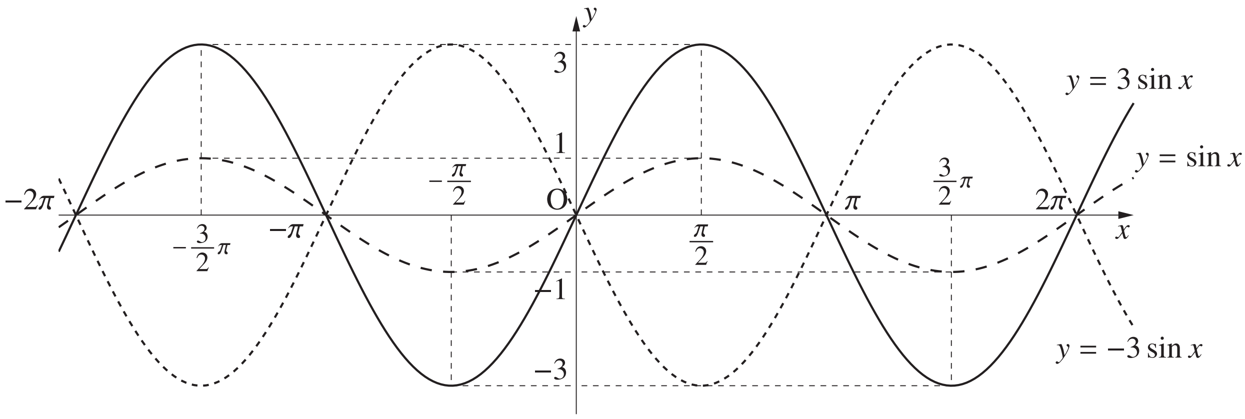


- 振幅 1，周期 2π の正弦曲線であり，y 切片は 0．
- x の値の増加に対し，y の値は増加と減少を交互に繰り返す．

■$y = A\sin x$ のグラフとその性質

たとえば，$y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に 3 倍すると $y = 3\sin x$ のグラフになり，$y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に -3 倍すると $y = -3\sin x$ のグラフになる．

[*6] より厳密には，条件を満たす任意の p の値を周期，そのうち最小の正の値を基本周期という．たとえば，$y = \sin x$ の周期は $2n\pi$（n は整数），基本周期は 2π となる．ただし，通常は「周期」という用語で，厳密な意味での「基本周期」を表す．



$y = A\sin x$ のグラフの特徴

- $y = \sin x$ のグラフを，y 軸方向に A 倍したグラフである，
- 振幅は $|A|$，周期は関数 $y = \sin x$ と同じ 2π である．

■$y = \sin(x - \alpha)$ のグラフ

例として，2 つの関数

$y = \sin x$

$y = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

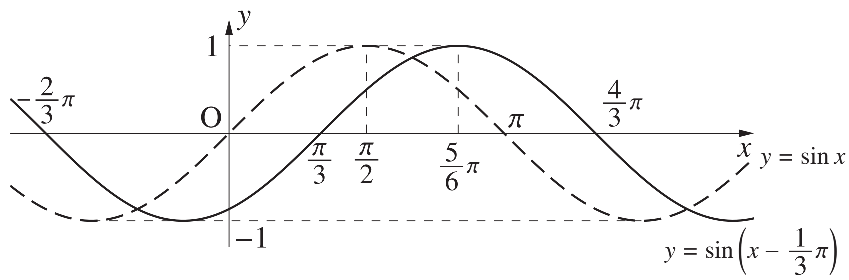
x	$\cdots$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\cdots$
$\sin x$	$\cdots$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\cdots$
$\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$

の関係を考えてみよう．

$y = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ の y の値と $y = \sin x$ の y の値を一致させるには，$y = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ の x に，$y = \sin x$ の x より $\frac{1}{3}\pi$ 大きい値を代入しなければならない．

つまり，$y = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ の正弦曲線は，$y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{3}\pi$ だけ平行移動した正弦曲線であると分かる．

このことは，右上の表においても確認することができる．



$y = \sin(x - \alpha)$ のグラフ

$y = \sin(x - \alpha)$ のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを

「x 軸方向に α 平行移動」

したグラフ，周期と振幅も $y = \sin x$ と同じであり，それぞれ 2π と 1 である．

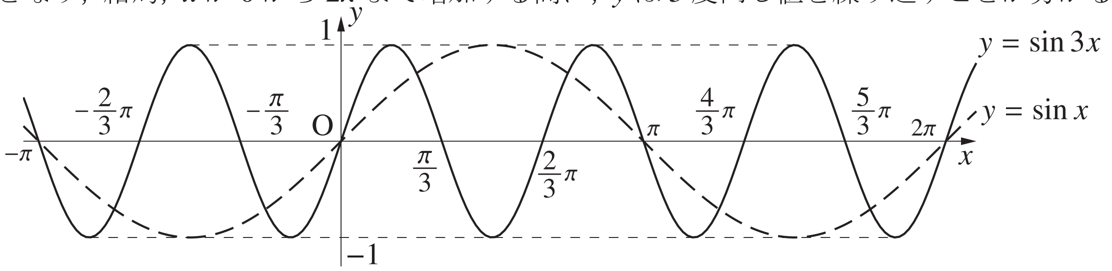
■$y = \sin bx$ のグラフ

例として，関数 $y = f(x) = \sin 3x$*7 のグラフについて考えてみよう．この関数は

*7　このように，$\sin(3x)$ の括弧は普通省略され，$\sin 3x$ を意味する．

$$f(0) = \sin 0 = 0,\ f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin 2\pi = 0,\ f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sin 4\pi = 0,\ f(2\pi) = \sin 6\pi = 0$$

となり，結局，x が 0 から 2π まで増加する間に，y は 3 度同じ値を繰り返すことが分かる．



こうして，$y = \sin x$ のグラフを，y 軸に対して x 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍したグラフが，関数 $y = \sin 3x$ のグラフであると分かる．

$y = \sin bx$ のグラフ

$y = \sin bx$ のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に b 倍したものであり

周期は $\dfrac{2\pi}{|b|}$，振幅は 1 である．

【例題：三角関数のグラフ〜その１〜】

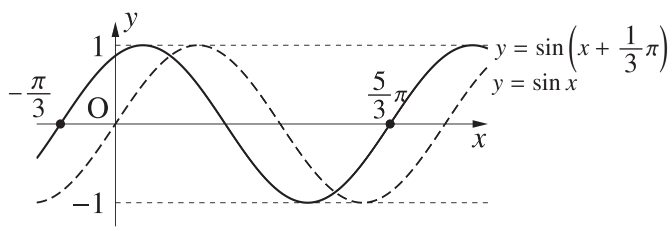
以下の関数のグラフを書け．また，周期と振幅を求めよ．

(1) $y = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$ (2) $y = 2\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ (3) $y = \sin 2x$ (4) $y = \sin\frac{x}{3}$

【解答】

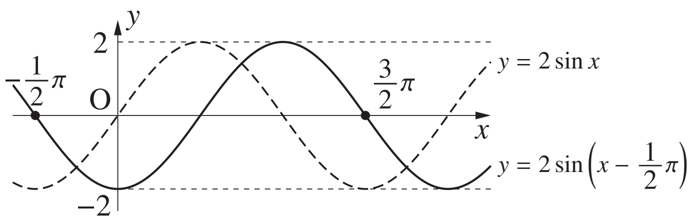
(1) $y = \sin\left\{x - \left(-\frac{1}{3}\pi\right)\right\}$ なので，$y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{1}{3}\pi$ 平行移動したグラフになる．**周期は 2π，振幅は 1** である．

◀ $y = \sin x$ と同じ

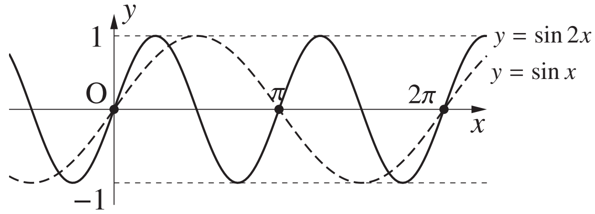


(2) $y = 2\sin x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{2}\pi$ 平行移動したグラフになる．**周期は 2π，振幅は 2** である．

◀ $y = 2\sin x$ と同じ

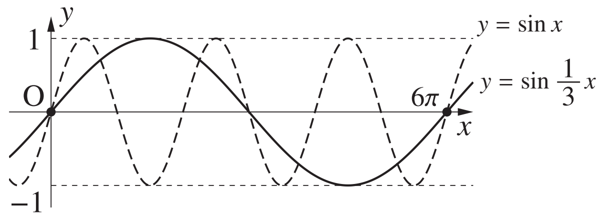


(3) $y = \sin 2x$ は，$y = \sin x$ の周期を $\frac{1}{2}$ にしたグラフになる．周期は $2\pi \div 2 = \pi$，**振幅は 1** である．



(4) $y = \sin \dfrac{1}{3}x$ は，$y = \sin x$ の周期を 3 倍したグラフになる．周期は $2\pi \times 3 = \boldsymbol{6\pi}$，**振幅は 1** である．

◀ $\dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ 倍



■$y = A\sin(bx - \alpha)$ のグラフ

たとえば，関数 $y = 2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ について考えてみよう．

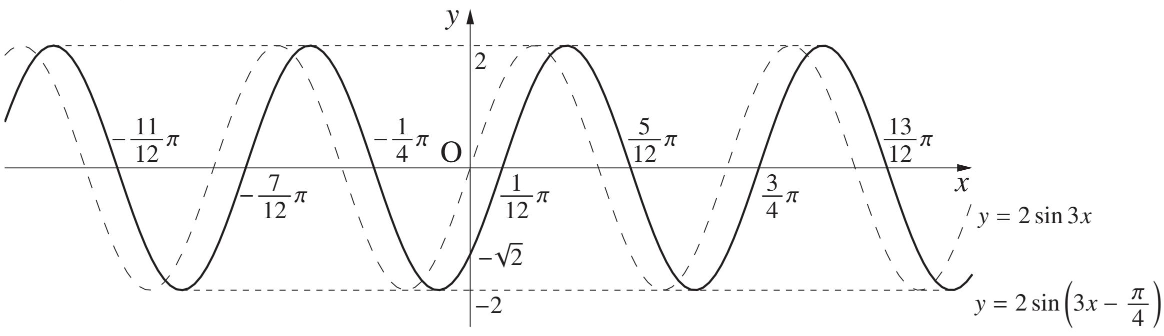
この関数の式は，$y = 2\sin 3\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right)$ と書けるので[*8]，次のことが分かる．

i. 振幅は 2 である．

ii. 周期は $y = 2\sin 3x$ と同じ $\dfrac{2}{3}\pi$ である．

iii. $y = 2\sin 3x$ を x 軸方向に $\dfrac{1}{12}\pi$ 平行移動したグラフになる．つまり，$x = \dfrac{\pi}{12}$ のとき $y = \sin 0$ であり，$x = \dfrac{3}{4}\pi\left(= \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2}{3}\pi\right)$ のとき，$y = \sin 2\pi$ である．

以上より，グラフは次のようになる．



$y = A\sin(bx - \alpha)$ のグラフ

$y = A\sin(bx - \alpha) = A\sin b\left(x - \dfrac{\alpha}{b}\right)$ のグラフは，$y = A\sin bx$ のグラフを「x 軸方向に $\dfrac{\alpha}{b}$ 平行移動」したグラフである．
周期も振幅も $y = A\sin bx$ と同じであり，それぞれ $\dfrac{2\pi}{|b|}$，A である．

■三角関数のグラフを書く手順

三角関数のグラフを書く時は，おおよそ上の iii., ii., i. の順で考えるとよい．つまり

[*8] 厳密には $y = 2\sin\left\{3\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right)\right\}$ となるが，このような場合，中括弧 { } は省略されることが多い．

iii. y 座標が $\sin 0$ になるときの x の値を求める．正弦曲線はそこから始まる．
ii. 周期を求め，y 座標が $\sin 2\pi$ になるときの x の値を求める．これにより，iii. で求めた値から始まる正弦曲線の 1 周期分の終端が決まる．
i. 振幅を決める．最後に，y 切片を計算できる場合は計算する．

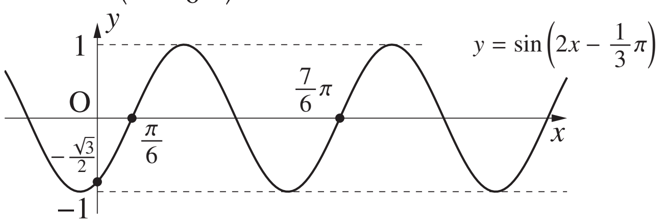
【例題：三角関数のグラフ～その２～】

以下の関数のグラフを書け．

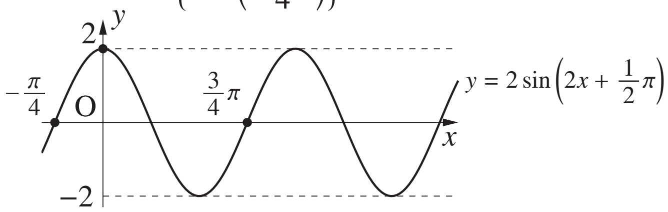
(1) $y = \sin\left(2x - \dfrac{1}{3}\pi\right)$　(2) $y = 2\sin\left(2x + \dfrac{1}{2}\pi\right)$　(3) $y = \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)$

【解答】

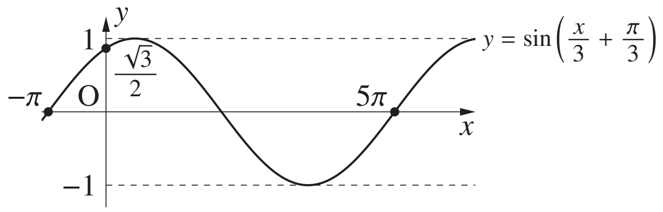
(1) $y = \sin 2\left(x - \dfrac{1}{6}\pi\right)$ なので



(2) $y = 2\sin 2\left\{x - \left(-\dfrac{1}{4}\pi\right)\right\}$ なので



(3) $y = \sin\dfrac{1}{3}\{x - (-\pi)\}$ なので

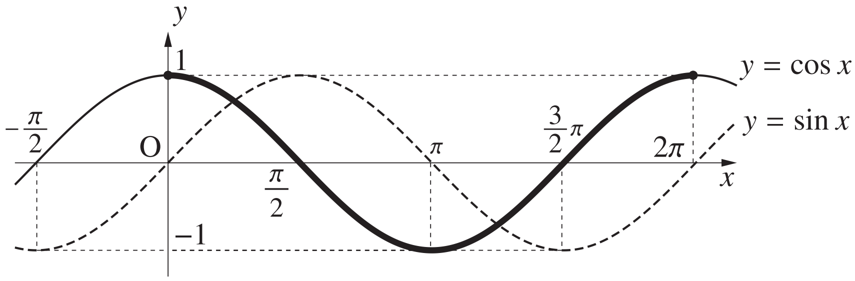


3.3.2　$y = \cos x$, $y = \tan x$ のグラフとその周辺のグラフ

■$y = \cos x$ のグラフ

$\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$，つまり $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ 平行移動させたものが，$y = \cos x$ のグラフである．それゆえ，$y = \cos x$ のグラフも正弦曲線になる．

グラフ $y = \cos x$ の 1 周期分を下の図の太線で示した．



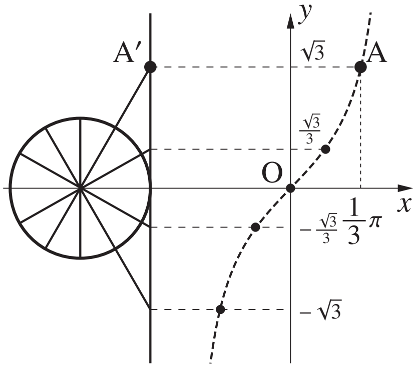
$y = \cos x$ のグラフの特徴

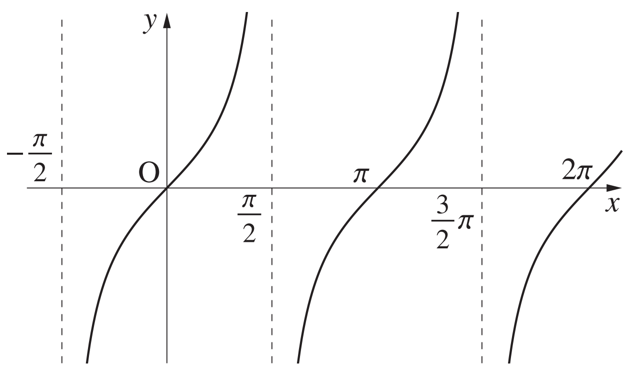
- 周期が 2π，振幅が 1 の正弦曲線であり，y 切片が 1 である．

■$y = \tan x$ のグラフ

関数 $y = \tan x$ について，$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で x と y の関係を表にすると，以下のようになる．x の値は $\frac{1}{6}\pi$ 刻みでとってある．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\cdots$
$\sin x$	$\cdots$		$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$		$\cdots$

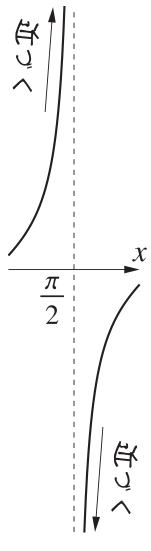




これをグラフで表し，曲線でつなぐと左上の図のようになる．たとえば，単位円の半径は 1 なので，A′ の y 座標は $\tan\frac{1}{3}\pi$ となり，これは，A の y 座標と一致する．

さらに，x の値が π 増えるごとに，tan の値は同じ値を取ったので，x を任意の実数を定義域としてグラフを書くと，右上のようになる．

ここで，$x = \frac{\pi}{2}$ の近くでは $y = \tan x$ のグラフがどうなっているか考えてみよう．右の図は，$x = \frac{\pi}{2}$ の付近のグラフを拡大したものである．



- x が 0 から $\frac{\pi}{2}$ に向かって大きくなるにつれ，y 座標は無限大へ近づき，グラフは直線 $x = \frac{\pi}{2}$ に限りなく近づく．
- x が π から $\frac{\pi}{2}$ に向かって小さくなるにつれ，y 座標は負の無限大へ近づき，グラフは直線 $x = \frac{\pi}{2}$ に限りなく近づく．

このように，曲線 C がある直線 l に限りなく近づくとき，直線 l を曲線 C の**漸近線** (asymptotic line) という．

$y = \tan x$ のグラフの特徴

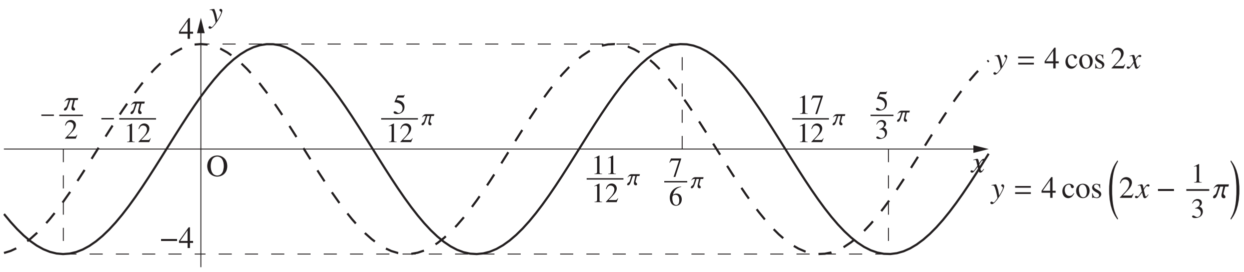
- 周期が π の曲線である．
- $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$（$n$ は整数）が漸近線になる．

■$y = A\cos(bx+\alpha)$, $y = A\tan(bx+\alpha)$ **のグラフ**

基本的には，$y = A\sin(bx+\alpha)$ の時と同じように考えればよい．

たとえば，関数 $y = 4\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ の場合は，$y = 4\cos 2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ とも表せるので，次のことが分かる．

- y 座標が $\cos 0$ になるのは $x = \dfrac{1}{6}\pi$ のとき．
- 周期は $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$，y 座標が $\cos 2\pi$ になるのは $x = \dfrac{1}{6}\pi + \pi = \dfrac{7}{6}\pi$ のとき．
- 振幅は 4，y 切片は $4\cos\left(-\dfrac{1}{3}\pi\right) = 2$ である．



【例題：三角関数のグラフ〜その３〜】

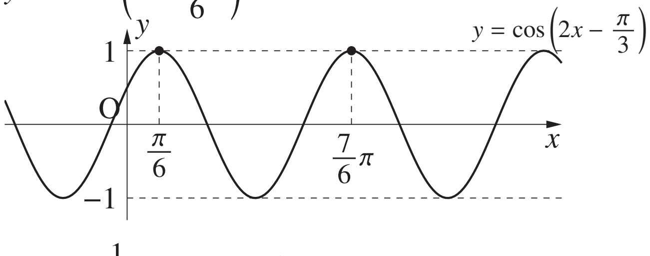
以下の関数のグラフを書きなさい．漸近線があればその式を求めなさい．

(1) $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$　　(2) $y = \cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)$

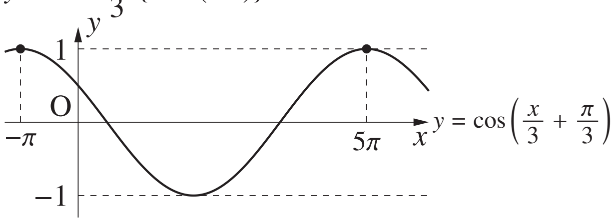
(3) $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$　　(4) $y = \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

【解答】

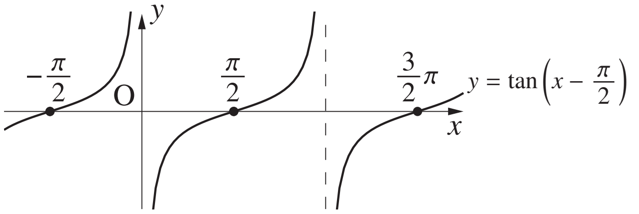
(1) $y = \cos 2\left(x - \dfrac{1}{6}\pi\right)$ なので



(2) $y = \cos\dfrac{1}{3}\{x - (-\pi)\}$ なので

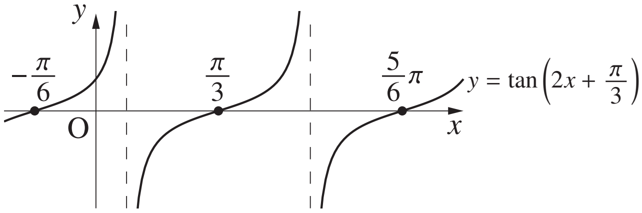


(3) $y = \tan x$ を x 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ 平行移動すればよいので



漸近線は直線 $\boldsymbol{x = n\pi}$（$\boldsymbol{n}$ は整数）になる.

(4) $y = \tan 2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ なので



漸近線は直線 $\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{n}{2}\pi}$（$\boldsymbol{n}$ は整数）になる.

§ 3.4

三角関数の加法定理とその応用

ここでは，三角関数の加法定理を学ぶ．また，加法定理から導かれる重要な等式，倍角・半角の公式，三角関数の合成などについて学ぶ．

3.4.1　三角関数の加法定理

■正弦と余弦の加法定理

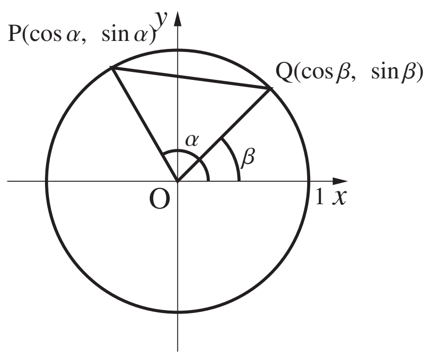
2 つの角の和や差の三角関数は，それぞれの角の三角関数で表すことができる．まずはじめに

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となることを証明してみよう．

【証明】

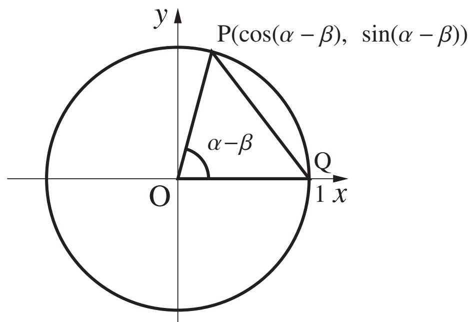
右図のように，点 P$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ と点 Q$(\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとると，2 点間の距離の公式より



$$\begin{aligned}PQ^2&=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

である．

次に，右図のように，2 点 P，Q を原点を中心に $-\beta$ だけ回転させた図形を考える．このとき，動径 OP のなす角は $\alpha-\beta$ となるので，2 点間の距離の公式より



$$\begin{aligned}PQ^2&=(1-\cos(\alpha-\beta))^2+\sin^2(\alpha-\beta)\\&=2-2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

よって

$$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad ■$$

【暗記：正弦と余弦の加法定理の導出】

上の①を利用して，次の等式を証明せよ．

(1) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(3) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

【解答】

(1) ①で β を $-\beta$ におきかえると

$$\cos\{\alpha-(-\beta)\}=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\Leftrightarrow\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

◀『$-\theta$ の三角関数』(p.157)

(2) ①で β を $\beta-\frac{\pi}{2}$ におきかえると

$$\cos\left\{\alpha-\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\cos\alpha\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\alpha\sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\left\{(\alpha-\beta)+\frac{\pi}{2}\right\}=\cos\alpha\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\alpha\sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ -\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$$

$$\Leftrightarrow\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

(3) (2) で β を $-\beta$ におきかえると

$$\sin\{\alpha-(-\beta)\}=\sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

◀『$-\theta$ の三角関数』(p.157)

正弦と余弦の加法定理

1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

【例題：正弦と余弦の加法定理】

(1) $45^\circ-30^\circ=15^\circ$ であることに注意して，$\sin 15^\circ$ と $\cos 15^\circ$ の値を求めよ．

(2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{12}\pi$ であることに注意して $\sin\frac{5}{12}\pi$ と $\cos\frac{5}{12}\pi$ の値を求めよ．

【解答】

(1) 加法定理をもちいて

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$
$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

(2) 加法定理をもちいて

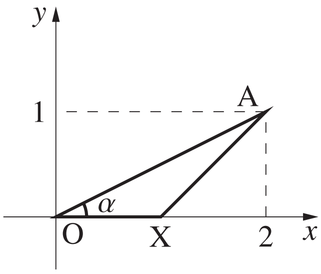
$$\sin\frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$
$$\cos\frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

【例題：三角関数の加法定理と平面図形】

右図のように X(1, 0) と A(2, 1) があり，$\angle \mathrm{AOX} = \alpha$ とする．

(1) $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ の値を求めよ．

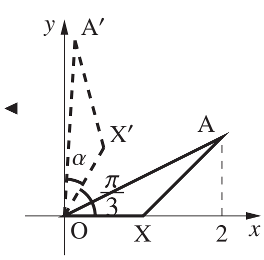
(2) $\triangle \mathrm{AOX}$ を O を中心に $\frac{\pi}{3}$ 回転移動し，$\triangle \mathrm{A'OX'}$ になったとする．このとき，X′，A′ の座標を求めよ．



【解答】

(1) $\mathrm{OA} = \sqrt{5}$ より，$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}}$，$\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}}$．

(2) 右図のように書くことができ，$\mathrm{X'}\left(\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3}\right)$ なので $\boldsymbol{\mathrm{X'}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$．



$$\mathrm{A}'\left(\sqrt{5}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right),\ \sqrt{5}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$ であり，

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$

◀『三角関数の加法定理』(p.169)

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$

◀『三角関数の加法定理』(p.169)

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

より，$\mathbf{A}'\left(\dfrac{\mathbf{2-\sqrt{3}}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{1+2\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}\right)$.

◀ $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ $\sqrt{5}$ 倍した

■正接の加法定理

正弦と余弦の加法定理から，次のような正接の加法定理を導くことができる.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \cdots\cdots ②$$

【証明】

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

←分母と分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割った

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

■

【暗記：正弦と余弦の加法定理の導出】

上の②を利用して，次の等式を証明せよ.

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

【解答】

②の β を $-\beta$ におきかえると

$$\tan\{\alpha+(-\beta)\}=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

◀『$-\theta$ の三角関数』(p.157)

正接の加法定理

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

【例題：正接の加法定理】

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ で，$\tan\alpha=5$，$\tan\beta=\frac{3}{2}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) $\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ．

(2) $\alpha+\beta$ の値を求めよ．

【解答】

(1) 正接の加法定理より

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5+\frac{3}{2}}{1-5\cdot\frac{3}{2}}=\mathbf{-1}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5-\frac{3}{2}}{1+5\cdot\frac{3}{2}}=\mathbf{\frac{7}{17}}$$

(2) $0<\alpha+\beta<\pi$ および, $\tan(\alpha+\beta)=-1$ より, $\alpha+\beta=\mathbf{\frac{3}{4}\pi}$ である．

■2 直線のなす角

正接の加法定理を利用すると，2 直線のなす角の正接の値を求めることができる．そのことを次の例題で確認しよう．

【例題：2 直線のなす角〜その１〜】

直線 $l: y=2x-1$，$m: y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 直線 l，m が x 軸の正の向きとなす角を α，β とするとき，$\tan\alpha$，$\tan\beta$ の値を求めよ．ただし，角は反時計回りを正の向きとする．

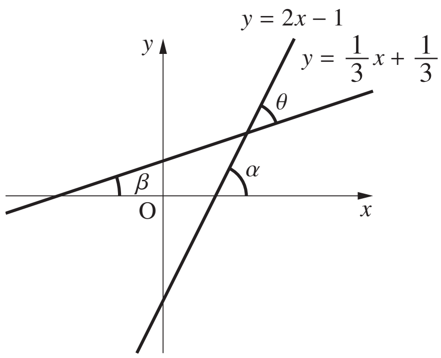
(2) 2 直線 l，m のなす鋭角を θ とする．正接の加法定理を利用し θ の値を求めよ．

【解答】

(1) 直線 l と m の傾きはそれぞれ, 2, $\frac{1}{3}$ なので, $\tan\alpha=\mathbf{2}$, $\tan\beta=\mathbf{\frac{1}{3}}$ である．

(2) $\theta=\beta-\alpha$ なので

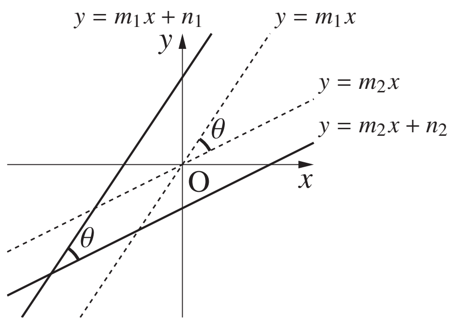
$\tan\theta$



$$
\begin{aligned}
&= \tan(\alpha - \beta) \\
&= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \\
&= \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$ となる．

以下では，交わる 2 直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ のなす鋭角 θ について，一般的に考えてみよう．



右図のように，直線を平行移動しても 2 直線のなす角は変わらないので，$y = m_1x$，$y = m_2x$ の場合について考えてゆけばよい．

直線 $y = m_1x$, $y = m_2x$ が x 軸の正の向きとなす，正の角をそれぞれ α，β $(\alpha > \beta)$ とする．

正接の値は直線の傾きを表していたので，$\tan\alpha = m_1$，$\tan\beta = m_2$ である．

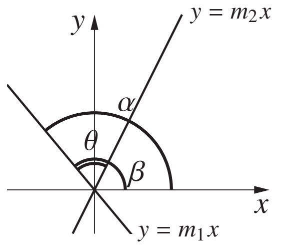
いま，正接の加法定理から

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

と計算できる．

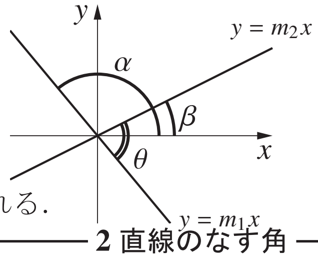
(1) $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} > 0$，すなわち $0 < \alpha - \beta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\ (> 0)$$



(2) $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} < 0$，すなわち $\dfrac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \pi$ のとき

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan\{\pi - (\alpha - \beta)\}\\ &= -\tan(\alpha - \beta) = -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\ (> 0)\end{aligned}$$



いずれにしても，$\tan\theta > 0$ なので，次のようにまとめられる．

2 直線のなす角

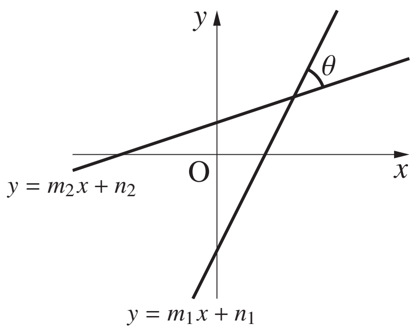
直交しない 2 直線

$y = m_1 x + n_1$　　　$y = m_2 x + n_2$

のなす鋭角を θ とすると

$$\tan\theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

と表すことができる．



【例題：2 直線のなす鋭角〜その２〜】

(1) 2 直線 $y = 2x - 1$, $y = -x + 3$ なす角を θ とするとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．
(2) 直線 $y = 2x + 3$ とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ である直線の傾き m を求めよ．

【解答】

(1) それぞれ傾きは 2，-1 なので

$$\tan\theta = \left| \frac{2 - (-1)}{1 + 2 \cdot (-1)} \right| = |-3| = \mathbf{3}$$

(2) 傾きは 2, m である 2 直線のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ なので

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left| \frac{2 - m}{1 + 2 \cdot m} \right| \Leftrightarrow 1 = \left| \frac{2 - m}{2m + 1} \right|$$

よって，$2m + 1 = 2 - m$ または $2m + 1 = m - 2$ であればよいので，$\boldsymbol{m = \dfrac{1}{3},\ -3}$.

3.4.2　2 倍角・半角の公式

■2 倍角の公式

三角関数の加法定理において，$\beta = \alpha$ とすると，次の **2 倍角の公式** (formula of double angle) が得られる．

2 倍角の公式

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$　　2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$　　3) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1$$

【証明】

正弦の加法定理 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ において，$\beta = \alpha$ とすると

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \blacksquare$$

また，正接の加法定理 $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ において，$\beta = \alpha$ とすると

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \blacksquare$$

【暗記：2 倍角の公式の導出】

余弦の 2 倍角の公式

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

を証明せよ.

【解答】

余弦の加法定理 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ において，$\beta = \alpha$ とすると

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$$
$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \blacksquare$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より，$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ だから

$$\cos 2\alpha = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \blacksquare$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より，$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ だから

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \blacksquare$$

2 倍角の公式は，三角関数の加法定理から自力で導けるように練習しておこう.

■半角の公式

『2 倍角の公式』(p.175) から，次の**半角の公式** (formula of half angle) を得る.

半角の公式

(1) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$　(2) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$　(3) $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

【暗記：半角の公式の導出】

次の『半角の公式』を証明せよ．

(1) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$　(2) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$　(3) $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

【解答】

(1) 余弦の倍角の公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ より

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，α を $\dfrac{\alpha}{2}$ とおきかえて

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \quad ■$$

(2) 余弦の倍角の公式 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ より

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，α を $\dfrac{\alpha}{2}$ とおきかえて

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2} \quad ■$$

(3) $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より

$$\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{2}{1+\cos 2\alpha}=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

◀ ①，②を使った

ここで，α を $\dfrac{\alpha}{2}$ とおきかえて

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \quad ■$$

半角の公式も，2 倍角の公式から自力で導けるように練習しておこう．

【例題：半角の公式の利用】

$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とするとき，$\cos x$，$\sin x$，$\tan x$ を t の式で表せ．

【解答】

$t^2 = \tan^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ より

$$(1 + \cos x)t^2 = 1 - \cos x$$

$$\Leftrightarrow\ (t^2 + 1)\cos x = 1 - t^2$$

$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}}$$

また，倍角の公式より

$$\tan x = \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \boldsymbol{\frac{2t}{1 - t^2}}$$

なので

$$\sin x = \cos x \tan x$$

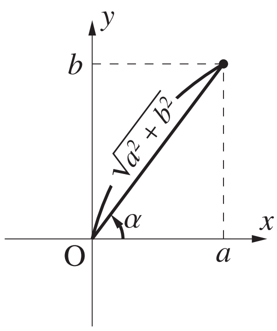
$$= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \cdot \frac{2t}{1 - t^2} = \boldsymbol{\frac{2t}{1 + t^2}}$$

3.4.3　三角関数の合成

■三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta$ の形をしている式は，加法定理をもちいてより簡単な形に直すことができる．

右図のように，$\sin\theta$ の係数を x 座標とし，$\cos\theta$ の係数を y 座標とする点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとり，線分 OP が x 軸の正の向きとなす，正の向きの角を α とすると



$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ ,\quad \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

だから

$$a\sin\theta + b\cos\theta$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\theta\right) \qquad \leftarrow \sqrt{a^2 + b^2}\ \text{で式全体をくくった}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) \qquad \leftarrow ①\text{を使った}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha) \qquad \leftarrow \text{加法定理を使った}$$

この変形のことを，**三角関数の合成** (combination of trigonometric function) という．

三角関数の合成

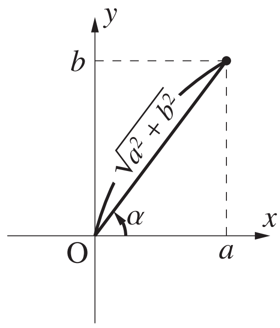
$a\sin\theta + b\cos\theta$ は

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\quad \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす α をもちいて

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

と変形できる．



【例題：三角関数の合成】

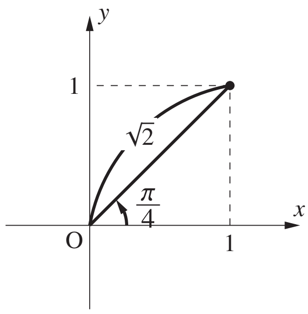
次の三角関数を合成して，$A\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ．α の値が求められるときには求めよ（ただし，$0 \leqq \alpha < 2\pi$ とする）．

(1) $\sin\theta + \cos\theta$　　(2) $-\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$　　(3) $3\sin\theta - 4\cos\theta$

【解答】

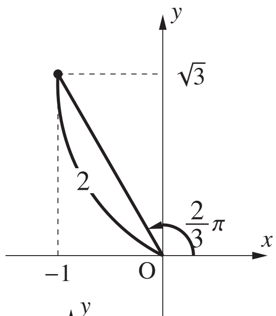
(1)

$$\begin{aligned}
&\sin\theta + \cos\theta \\
&= \sqrt{1^2+1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta + \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta\right) \\
&= \boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$



(2)

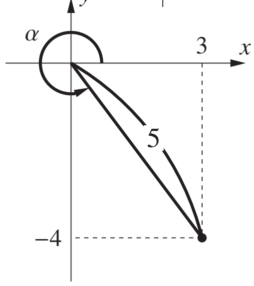
$$\begin{aligned}
&-\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \\
&= \sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}\left(\frac{-1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) \\
&= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}\sin\theta + \sin\frac{2\pi}{3}\cos\theta\right) \\
&= \boldsymbol{2\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)}
\end{aligned}$$



(3)

$$\begin{aligned}
&3\sin\theta - 4\cos\theta \\
&= \sqrt{3^2+(-4)^2}\left(\frac{3}{5}\sin\theta - \frac{4}{5}\cos\theta\right) \\
&= 5(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) \\
&= \boldsymbol{5\sin(\theta+\alpha)}
\end{aligned}$$

ただし，α は右図のような角度である．



3.4.4　三角関数を含む関数・方程式・不等式

■三角関数を含む関数・方程式・不等式

【例題：三角関数を含む方程式・不等式〜その１〜】

(1) 関数 $y = \cos^2\theta - 2\sin\theta + 1\ \ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ の最大値・最小値を求めよ.

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin^2\theta = \cos\theta + 1$ を解きなさい.

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $2\cos^2\theta + \sin\theta > 2$ を解きなさい.

【解答】

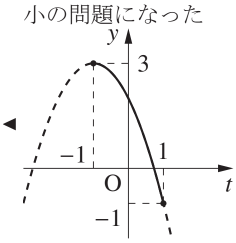
(1)
$$\begin{aligned} y &= \cos^2\theta - 2\sin\theta + 1 \\ &= (1 - \sin^2\theta) - 2\sin\theta + 1 \end{aligned}$$

◀『拡張された三角関数の相互関係』(p.154) を用いて $\sin\theta$ にそろえた

$\sin\theta = t$ とおく．$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ なので

$$\begin{aligned} y &= -t^2 - 2t + 2 \\ &= -(t + 1)^2 + 3\ \ (-1 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$

◀ t についての 2 次関数の最大・最小の問題になった



$y = -t^2 - 2t + 2$

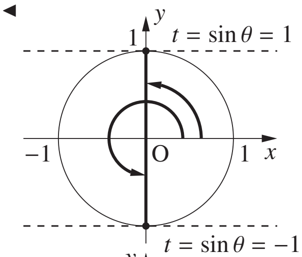
右図より，y は

$t = -1$ のとき最大値 3，$t = 1$ のとき最小値 -1

をとる．$t = \sin\theta$ なので

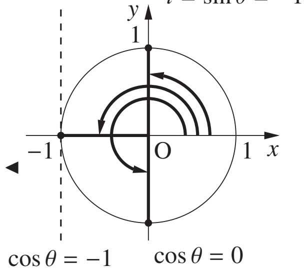
$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最大値 3

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 -1



(2)
$$\begin{aligned} & \sin^2\theta = \cos\theta + 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - \cos^2\theta = \cos\theta + 1 \\ \Leftrightarrow\ & \cos^2\theta + \cos\theta = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos\theta(\cos\theta + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos\theta = 0,\ -1 \end{aligned}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = 0,\ -1$ を満たす θ は，右図より $\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}$.



(3)
$$\begin{aligned} & 2\cos^2\theta + \sin\theta > 2 \\ \Leftrightarrow\ & 2(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta > 2 \\ \Leftrightarrow\ & -2\sin^2\theta + \sin\theta > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin\theta(2\sin\theta - 1) < 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 < \sin\theta < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

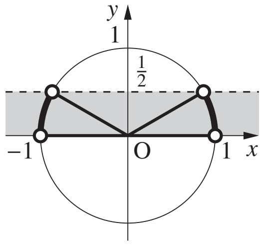
◀『拡張された三角関数の相互関係』(p.154) を用いて $\cos\theta$ にそろえた.

◀ $\sin^2\theta$ の係数を正にするため，両辺を -1 で割ってから因数分解した

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で上の不等式を満たす θ の範囲は,

右図の太線部分である．すなわち

$$\mathbf{0 < \sin\theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi}$$



【例題：三角関数を含む関数・方程式・不等式〜その２〜】

(1) 関数 $y = -\cos 2\theta - 2\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の最大値・最小値を求めよ．

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 2\theta = \cos\theta$ を解きなさい．

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\tan^2\dfrac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$ を解きなさい．

(4) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos 2\theta - \cos\theta \geqq 0$ を解きなさい．

(5) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos^2\dfrac{\theta}{2} \geqq \cos\theta + 1$ を解きなさい．

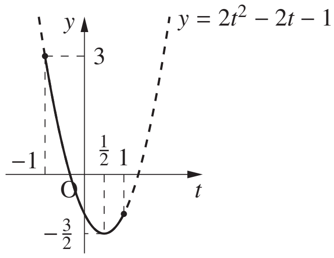
【解答】

(1)
$$y = = -\cos 2\theta - 2\sin\theta$$
$$= -(1 - 2\sin^2\theta) - 2\sin\theta$$

◀『倍角の公式』(p.175) を用いて $\sin\theta$ にそろえた．

$\sin\theta = t$ とおく．$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ なので

$$y = 2t^2 - 2t - 1$$
$$= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\quad (-1 \leqq t \leqq 1)$$



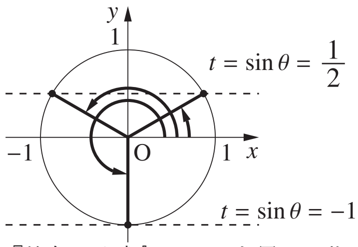
右図より，y は

$t = -1$ のとき最大値 3，$t = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{2}{3}$

をとる．$t = \sin\theta$ なので

$\boldsymbol{\theta = \dfrac{3}{2}\pi}$ **のとき最大値 3**

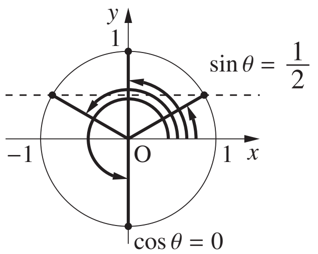
$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}}$



(2)
$$\sin 2\theta = \cos\theta \quad \Leftrightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$$
$$\Leftrightarrow\ \cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ \cos\theta = 0,\ \sin\theta = \frac{1}{2}$$

◀『倍角の公式』(p.175) を用いて共通因数を作った．

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = 0, \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ は，右図より $\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}$.



(3)
$$\tan^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = 1 - \cos\theta$$
$$\Leftrightarrow\ 1 - \cos\theta = (1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)$$

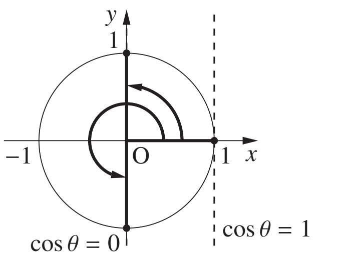
◀『半角の公式』(p.176) を用いて $\cos\theta$ にそろえた．

$\Leftrightarrow\ \cos^2\theta - \cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow\ \cos\theta(\cos\theta - 1) = 0$

$\Leftrightarrow\ \cos\theta = 0,\ \cos\theta = 1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ を満たす θ は，右図より $\boldsymbol{\theta = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi}$.



(4) $\cos 2\theta - \cos\theta \geqq 0 \Leftrightarrow (2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta \geqq 0$

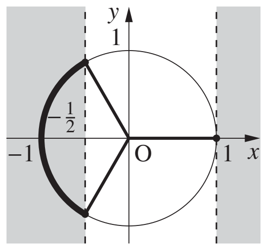
$\Leftrightarrow (2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) \geqq 0$

$\Leftrightarrow \cos\theta \leqq -\frac{1}{2},\ 1 \leqq \cos\theta$

◀『倍角の公式』(p.175) を用いて $\cos\theta$ でそろえた

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で上の不等式を満たす θ の範囲は，右図の網掛け部分である．すなわち

$$\boldsymbol{\theta = 0,\ \frac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{4}{3}\pi}$$



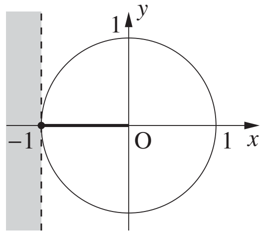
(5) $\cos^2\frac{\theta}{2} \geqq \cos\theta + 1 \Leftrightarrow \frac{1+\cos\theta}{2} \geqq \cos\theta + 1$

$\Leftrightarrow 1 + \cos\theta \geqq 2\cos\theta + 2$

$\Leftrightarrow \cos\theta \leqq -1$

◀『半角の公式』(p.176) を用いて $\cos\theta$ でそろえた

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で上の不等式を満たす θ の範囲は，右図の太線部分である．すなわち $\boldsymbol{\theta = \pi}$.



【例題：三角関数を含む関数・方程式・不等式〜その３〜】

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$ を解きなさい．

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin\theta + \cos\theta < 0$ を解きなさい．

(3) 関数 $y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ の最大値・最小値を求めよ．

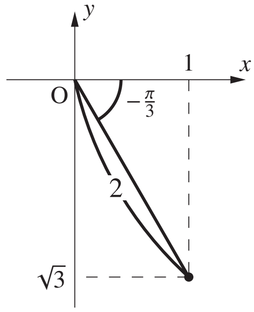
【解答】

(1) 『三角関数の合成』(p.178) より

$$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\left\{\frac{1}{2}\sin\theta + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\theta\right\} = 1$$

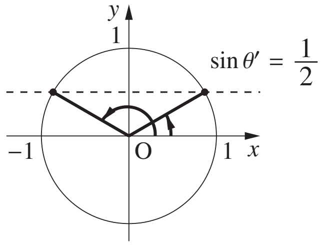
$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$



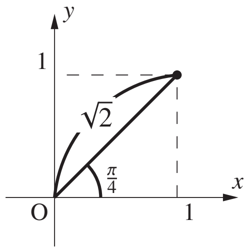
$\theta - \frac{\pi}{3} = \theta'$ とおくと $\sin\theta' = \frac{1}{2}$.

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta' < \frac{5}{3}\pi$ である．この範囲で $\sin\theta' = \frac{1}{2}$ を満たす θ' は，右図より $\theta' = \frac{1}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi$.

$\theta = \theta' + \frac{\pi}{3}$ なので $\boldsymbol{\theta = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{7}{6}\pi}$.



(2) 『三角関数の合成』(p.178) より



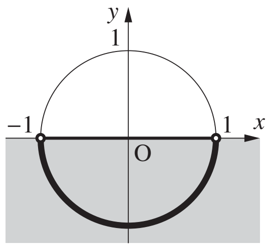
$$\sin\theta + \cos\theta < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{1}{4}\pi\right) < 0$$

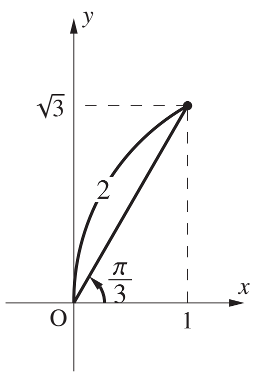
$\theta + \dfrac{1}{4}\pi = \theta'$ とおくと $\sin\theta' < 0$.

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\dfrac{1}{4}\pi \leqq \theta' < \dfrac{9}{4}\pi$ なので，この範囲で上の不等式を満たす θ' は，右図の網掛け部分である．すなわち $\pi < \theta' < 2\pi$.



$\theta = \theta' - \dfrac{1}{4}\pi$ なので $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{7}{4}\pi}$.

(3)『三角関数の合成』(p.178) より



$$y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$\theta' = \theta + \dfrac{\pi}{3}$ とおくと，この三角関数は $y = 2\sin\theta'$.

$0 \leqq \theta < 2\theta$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta' < \dfrac{7}{3}\pi$ なので，$\theta' = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 2，$\theta' = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -2.

$\theta = \theta' - \dfrac{\pi}{3}$ なので

$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最大値 2

$\boldsymbol{\theta = \dfrac{7}{6}\pi}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-2}$

【例題：$t = \sin x + \cos x$ とおく】

関数 $f(x) = \sin x\cos x - \sin x - \cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ について以下の問いに答えよ.

(1) $t = \sin x + \cos x$ とする．$f(x)$ を t の式で表せ.

(2) t のとりうる値を求めよ.

(3) $f(x)$ の最大値・最小値と，それぞれを与える x の値を求めよ.

【解答】

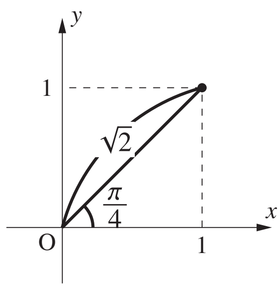
(1) $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ なので

$$\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

これを代入すれば

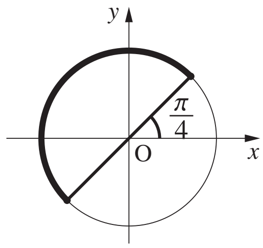
$$f(x) = \frac{t^2-1}{2} - (\sin x + \cos x)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2}}$$

(2) 『三角関数の合成』(p.178) より



$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

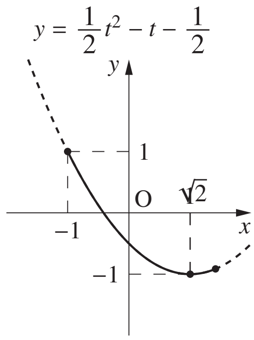
$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$\frac{\pi}{4} \leqq x + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$ なので右図より $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ である．つまり，$t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ のとりうる範囲は $\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$.



(3) (1), (2) より，$f(x) = \frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2}$ $(-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$ である．これを t について平方完成すると

$$f(x) = \frac{1}{2}(t-1)^2 - 1$$

となる．右図より，$f(x)$ は



$t = -1$ のとき 1 で最大，$t = 1$ のとき -1 で最小となる．それぞれのときの x の値を求めると

$$t = -1 \iff \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$
$$\iff \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff x + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi \quad \iff x = \pi$$
$$t = 1 \iff \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$\iff \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi \quad \iff x = 0,\ \frac{\pi}{2}$$

以上をまとめて，$f(x)$ は

$x = \pi$ のとき 1 で最大

$x = 0,\ \frac{\pi}{2}$ のとき -1 で最小

■3 倍角の公式

【暗記：3 倍角の公式の導出】

$\sin 3\alpha$ を $\sin\alpha$ だけの式で表せ．また，$\cos 3\alpha$ を $\cos\alpha$ だけの式で表せ．

【解答】

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha\\ &= (2\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha\\ &= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha\\ &= \mathbf{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha\\ &= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha + (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha\\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha + 2\sin^2\alpha\cos\alpha\\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha + 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\\ &= \mathbf{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}\end{aligned}$$

◀『三角関数の加法定理』(p.170)
◀『倍角の公式』(p.175)
◀『拡張された三角関数の相互関係』(p.154)
◀『三角関数の加法定理』(p.170)
◀『倍角の公式』(p.175)
◀『拡張された三角関数の相互関係』(p.154)

3 倍角の公式

1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$　　2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

【例題：3 倍角の公式の利用】

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，不等式 $\cos 3x + 2\cos x = 0$ を満たす x を求めよ．

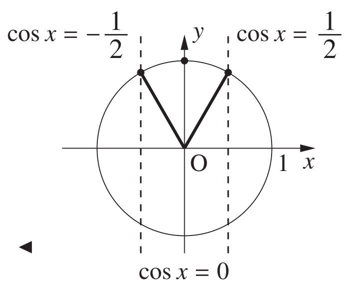
【解答】

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ なので

$$\begin{aligned}&\cos 3x + 2\cos x = 0\\ \Leftrightarrow\ &4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos x = 0\\ \Leftrightarrow\ &(4\cos^2 x - 1)\cos x = 0\\ \Leftrightarrow\ &\cos x = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲でこれを解いて，$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi}$

◀



3.4.5　三角関数の和と積の公式

■積和の公式

加法定理を組み合わせることにより，次のような公式が得られる．

三角関数の積を和に変換する公式

1) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

2) $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

3) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

4) $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

【証明】

1) 正弦についての加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ①$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$

において，① + ② より

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\Leftrightarrow\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\} \quad ■$$

2) 同じく ① − ② より

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\} \quad ■$$

【暗記：和積の公式の導出】

次の等式を証明せよ．

(1) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

(2) $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

【解答】

(1) 余弦についての加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ③$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ④$$

において，③ + ④ より

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\} \quad ■$$

(2) 同じく ③ − ④ より

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Leftrightarrow\ \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\} \quad ■$$

この公式は，三角関数の積を三角関数の和で書き換えるという意味があり，三角関数の次数を下げる効果がある．FTEXT数学 III で学ぶ三角関数の積分法などでよくもちいられる．

■**和積の公式**

『三角関数の積を和に変換する公式』(p.186) について

$\alpha+\beta=A$ ……………………… ①

$\alpha-\beta=B$ ……………………… ②

とおくと，(① + ②) ÷ 2 より $\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，(① − ②) ÷ 2 より $\beta=\dfrac{A-B}{2}$ であるから，次の公式を得る．

三角関数の和を積に変換する公式

1) $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

2) $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

3) $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

4) $\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

和を積に変換する公式には，因数分解のような効果があるため，三角関数を含む方程式・不等式を解く際にもちいられることが多い．

【例題：三角関数を含む方程式・不等式〜その４〜】

(1) $0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $\sin 4x+\sin 3x+\sin 2x+\sin x=0$ を解け．

(2) $0\leqq x<2\pi$ のとき，不等式 $\cos x-\cos 2x+\cos 3x<\cos 4x$ を解け．

【解答】

(1)

$$
\begin{aligned}
&\sin 4x+\sin 3x+\sin 2x+\sin x=0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin 4x+\sin 2x)+(\sin 3x+\sin x)=0\\
\Leftrightarrow\ &2\sin\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2}\\
&\qquad+2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=0\\
\Leftrightarrow\ &2(\sin 3x\cos x+\sin 2x\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin 3x+\sin 2x)\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(2\sin\frac{3x+2x}{2}\cos\frac{3x-2x}{2}\right)\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2}\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin\frac{5}{2}x=0,\ \cos\frac{x}{2}=0,\ \cos x=0
\end{aligned}
$$

◀ $4x-2x=3x-x$ に着目．$4x+x=3x+2x$ や $4x-3x=2x-x$ に着目しても共通因数を作れるが，分数が出てきて煩雑である．

◀ 『三角関数の和を積に変換する公式』(p.187)

◀ 共通因数 $\cos x$ ができた

◀ 『三角関数の和を積に変換する公式』(p.187)

それぞれの方程式を解くと

$$0 \leqq \frac{5}{2}x < 5\pi \text{ より } \sin\frac{5}{2}x = 0$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{5}{2}x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, 4\pi$$
$$\Leftrightarrow\ x = \frac{2}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{8}{5}\pi$$
$$0 \leqq \frac{x}{2} < \pi \text{ より } \cos\frac{x}{2} = 0\ \Leftrightarrow\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow\ x = \pi$$
$$0 \leqq x < 2\pi \text{ より } \cos x = 0\ \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

よって，$\boldsymbol{x = \frac{2}{5}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ \pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{8}{5}\pi}$.

(2)
$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x < \cos 4x$$
$$\Leftrightarrow\ \cos 3x + \cos x < \cos 4x + \cos 2x$$
$$\Leftrightarrow\ 2\cos\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2} < \cos\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2}$$
$$\Leftrightarrow\ \cos 2x\cos x < \cos 3x\cos x$$
$$\Leftrightarrow\ (\cos 3x - \cos 2x)\cos x > 0$$
$$\Leftrightarrow\ \left(-2\sin\frac{3x+2x}{2}\sin\frac{3x-2x}{2}\right)\cos x > 0$$
$$\Leftrightarrow\ \sin\frac{5}{2}x\sin\frac{x}{2}\cos x < 0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

◀ $3x - x = 4x - 2x$ に着目．$4x+x = 3x+2x$ や $4x-3x = 2x-x$ に着目しても共通因数を作れるが，分数が出てきて煩雑である．

◀『三角関数の和を積に変換する公式』(p.187)

◀ 共通因数 $\cos x$ ができた

◀『三角関数の和を積に変換する公式』(p.187)

ここで，$0 \leqq \frac{x}{2} < \pi$ より $\sin\frac{x}{2} \geqq 0$ である．

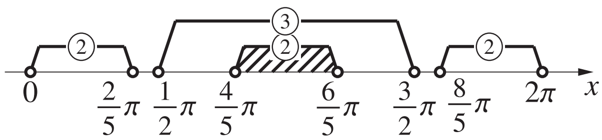
1) $\sin\frac{x}{2} = 0$，つまり，$x = 0,\ 2\pi$ のとき①は不適．

2) $\sin\frac{x}{2} > 0$ より，①は $\sin\frac{5}{2}x\cos x < 0$ となる．

- $\sin\frac{5}{2}x > 0,\ \cos x < 0$ のとき

$$\begin{cases} 0 < \theta < \frac{2}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi < \theta < \frac{6}{5}\pi,\ \frac{8}{5}\pi < \theta < 2\pi & \cdots\cdots\ ② \\ \frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi & \cdots\cdots\ ③ \end{cases}$$

◀ $\sin\frac{5}{2}x > 0$ を解くと
$0 < \frac{5}{2}x < \pi,\ 2\pi < \frac{5}{2}x < 3\pi,$
$4\pi < \frac{5}{2}x < 5\pi$

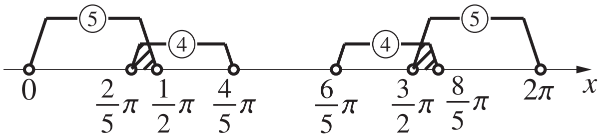


なので，$\frac{4}{5}\pi < x < \frac{6}{5}\pi$.

- $\sin\frac{5}{2}x < 0,\ \cos x > 0$ のとき

◀ $\sin\frac{5}{2}x < 0$ を解くと
$\pi < \frac{5}{2}x < 2\pi,\ 3\pi < \frac{5}{2}x < 4\pi$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5}\pi < \theta < \dfrac{4}{5}\pi,\ \dfrac{6}{5}\pi < \theta < \dfrac{8}{5}\pi & \cdots\cdots\cdots ④ \\ 0 < \theta < \dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi & \cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$



なので，$\dfrac{2}{5}\pi < x < \dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < x < \dfrac{8}{5}\pi.$

以上をまとめて

$\boldsymbol{\dfrac{2}{5}\pi < x < \dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{4}{5}\pi < x < \dfrac{6}{5}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < x < \dfrac{8}{5}\pi.}$