第2章

図形と方程式

§ 2.1

数直線と座標平面上の点

この章では座標をもちいて直線や円の性質について学んでいく．まずは準備として，数直線や座標平面上の点について考えていく．

2.1.1 数直線上の点

■2 点間の距離

まずは，数直線上の点に関する知識から確認していこう．

FTEXT数学 I でも学んだように，数直線上の 2 点間の距離は次のようになる．

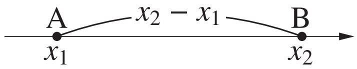
数直線上の 2 点間の距離

数直線上の 2 点 A(x_1)，B(x_2) 間の距離 AB は

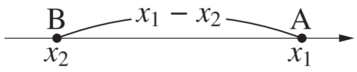
$$AB = |x_2 - x_1|$$

である．

$x_1 > x_2$ のとき



$x_2 < x_1$ のとき



■内分・外分とは何か

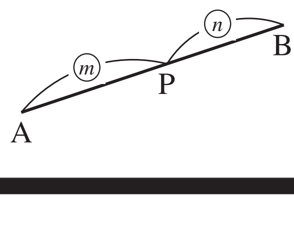
線分の分割を表すのに，内分と外分という 2 つの方法がある．

内分

正の数 m，n とする．線分 AB 上の点 P について

$$AP : PB = m : n$$

が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に**内分** (interior devision) するといい，点 P のことを内分点という．



外分

正の数 m, n とする．線分 AB の延長上の点 Q について

$$AQ : QB = m : n$$

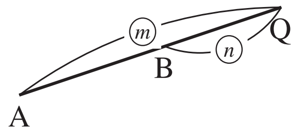
が成り立つとき，点 Q は線分 AB を $m : n$ に**外分** (exterior devision) するといい，点 Q のことを外分点という．

右図のように，点 Q は

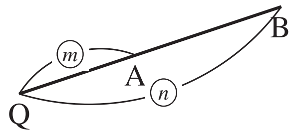
1) $m > n$ のときは，線分 AB の B の方向への延長上
2) $m < n$ のときは，線分 AB の A の方向への延長上

にある．

1) $m > n$ のとき



2) $m < n$ のとき



■**内分点の座標**

数直線上の 2 点 $A(x_1)$，$B(x_2)$ に対して，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標 (x) を求めてみよう．

$AP : PB = m : n$ だから

$nAP = mPB$ ……………………… ①

ここで，右図より

1) $x_1 < x_2$ のとき，$x_1 < x < x_2$ だから
   $AP = x - x_1$，$PB = x_2 - x$
2) $x_1 > x_2$ のとき，$x_1 > x > x_2$ だから
   $AP = x_1 - x$，$PB = x - x_2$

1)，2) のいずれにせよ，①は

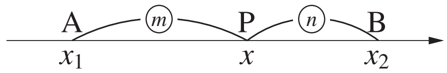
$$n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\Leftrightarrow\ (m + n)x = nx_1 + mx_2$$

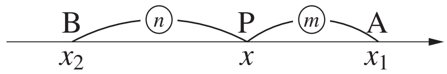
$$\therefore\ x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}$$

となる．

1) $x_1 > x_2$ のとき



2) $x_2 < x_1$ のとき



数直線上の内分点

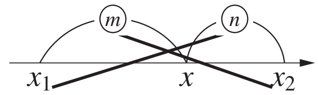
数直線上の 2 点 $A(x_1)$，$B(x_2)$ に対し，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標 (x) は

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}$$

である．

…．

分子の $nx_1 + mx_2$ は，右図のように座標と比を交差して掛けたものを足し合わせたもの，と覚えるとよい．



特に，P が中点のとき，$m = n$ より，$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ である．

■外分点の座標

【暗記：数直線上の外分点】

『数直線上の内分点』を参考に，数直線上の 2 点 A(x_1)，B(x_2) に対し，線分 AB を $m : n$ に外分する点 Q の座標 (x) は

$$x = \frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}$$

であることを示せ．ただし，$x_1 < x_2$ とする．

【解答】

AQ : QB $= m : n$ だから

nAQ $= m$QB　……………………　①

ここで，右図より

1) $m > n$ のとき，$x_1 < x_1 < x$ だから
　AQ $= x - x_1$，QB $= x - x_2$

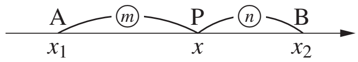
2) $m < n$ のとき，$x > x_1 > x_2$ だから
　AQ $= x_1 - x$，QB $= x_2 - x$

1)，2) のいずれにせよ，①は

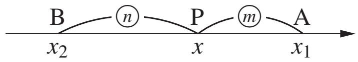
$$n(x - x_1) = m(x - x_2)$$
$$\Leftrightarrow\ (m - n)x = -nx_1 + mx_2$$
$$\therefore\ x = \frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}$$

である．■

◀ 1) $x_1 > x_2$ のとき



2) $x_2 < x_1$ のとき



上の例題は $x_1 > x_2$ の場合でも同様の結論になるので，次のようにまとめられる．

数直線上のの外分点

数直線上の 2 点 A(x_1)，B(x_2) に対し，線分 AB を $m : n$ に外分する点 Q の座標 (x) は

$$x = \frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}$$

である．

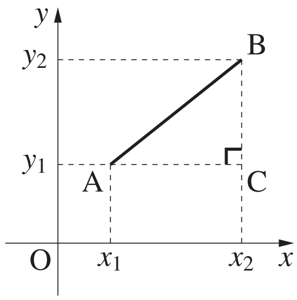
$\dfrac{-nx_1 + mx_2}{m - n}$ は，分母分子に -1 を掛けることにより，$\dfrac{nx_1 - mx_2}{-m + n}$ と表すこともできるので，外分点の公式は，m，n のうちどちらかにマイナスをつけて内分点の公式に代入すると覚えるとよい．

2.1.2　座標平面上の点

■2 点間の距離

座標平面上の 2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB について考えよう．

右図のように点 C をとると



$$AC = |x_2 - x_1|\ ,\quad BC = |y_2 - y_1|$$

なので，三平方の定理より

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

なので，$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ となる．

座標平面上の 2 点間の距離

座標平面上の 2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 間の距離は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

である．

【例題：2 点間の距離】

2 点 A, B が次の座標にあるとき，2 点 A, B の間の距離を求めよ．

(1) A(1, 3)，B(5, 6)　　(2) A(−3, −5)，B(2, 3)　　(3) A(6, −1)，B(−2, 4)

【解答】

(1) $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2} = \mathbf{5}$

(2) $AB = \sqrt{\{2-(-3)\}^2 + \{3-(-5)\}^2} = \boldsymbol{\sqrt{89}}$

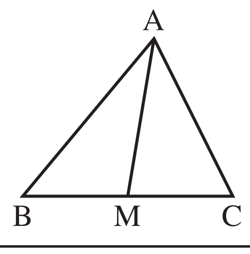
(3) $AB = \sqrt{(-2-6)^2 + \{4-(-1)\}^2} = \boldsymbol{\sqrt{89}}$

【例題：中線定理の証明】

△ABC において，辺 BC の中点を M とする．このとき

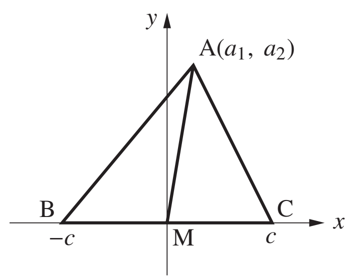
$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + MB^2)$$

であることを，座標平面を用いて示せ．



【解答】

点 A, B, C, M を右図のように座標平面上で $A(a_1,\ a_2)$，$B(-c,\ 0)$，$C(c,\ 0)$，$M(0,\ 0)$ とおいても一般性を失わない．座標平面状の 2 点間の距離を考えて



$$AB^2 + AC^2$$

$$= \left(\sqrt{(a_1+c)^2+a_2{}^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(a_1-c)^2+a_2{}^2}\right)^2$$
$$= a_1{}^2 + 2a_1c + c^2 + a_2{}^2 + a_1{}^2 - 2a_1c + c^2 + a_2{}^2$$
$$= 2(a_1{}^2 + a_2{}^2 + c^2)$$

同様に

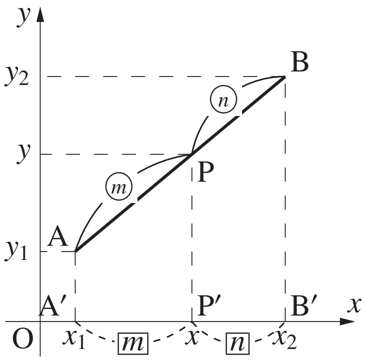
$$2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{MB}^2)$$
$$= 2\left\{\left(\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\right)^2 + \left(\sqrt{c^2}\right)^2\right\}$$
$$= 2(a_1{}^2 + a_2{}^2 + c^2)$$

よって，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{MB}^2)$ が成り立つ．■

この例題のように，座標を用いて幾何(図形)の証明問題を解くこともできる．このようなアプローチの幾何学を**座標幾何学** (coordinate geometry) という[*1]．

■内分点の座標

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の座標 $(x,\ y)$ を求めてみよう．



右図のように P′ は線分 A′B′ を $m:n$ に内分する点なので

$$x = \frac{nx_1+mx_2}{m+n}$$

であり，y 座標の方も同様にして

$$y = \frac{ny_1+my_2}{m+n}$$

である．

座標平面上の内分点

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の座標 $(x,\ y)$ は

$$x = \frac{nx_1+mx_2}{m+n}\ ,\quad y = \frac{ny_1+my_2}{m+n}$$

である．

特に，P が中点のとき，$m=n$ より，$x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$ である．

[*1] **解析幾何** (analytic geometry) ともいう．デカルトが自著において，この方法を最初に用いたとされる．

【例題：座標平面上の内分点】

以下の点 A, B について，それぞれ，線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P，線分 AB を 2 : 3 に内分する点 Q，線分 AB の中点 M の座標を求めよ．

(1) A(2, 5)，B(3, 2)　　(2) A(−2, 3)，B(3, −1)　　(3) A(0, 0)，B(3, −4)

【解答】

(1) P の座標は $\left(\dfrac{1\cdot2+3\cdot3}{3+1},\ \dfrac{1\cdot5+3\cdot2}{3+1}\right)$

Q の座標は $\left(\dfrac{3\cdot2+2\cdot3}{2+3},\ \dfrac{3\cdot5+2\cdot2}{2+3}\right)$

M の座標は $\left(\dfrac{2+3}{2},\ \dfrac{5+2}{2}\right)$ なので

$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{11}{4},\ \dfrac{11}{4}}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{12}{5},\ \dfrac{19}{5}}\right)$, $\mathrm{M}\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}}\right)$

(2) P の座標は $\left(\dfrac{1\cdot(-2)+3\cdot3}{3+1},\ \dfrac{1\cdot3+3\cdot(-1)}{3+1}\right)$

Q の座標は $\left(\dfrac{3\cdot(-2)+2\cdot3}{2+3},\ \dfrac{3\cdot3+2\cdot(-1)}{2+3}\right)$

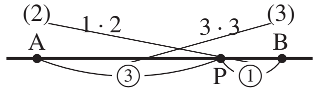
M の座標は $\left(\dfrac{-2+3}{2},\ \dfrac{3+(-1)}{2}\right)$ なので

$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{7}{4},\ 0}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{0,\ \dfrac{7}{5}}\right)$, $\mathrm{M}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{2},\ 1}\right)$

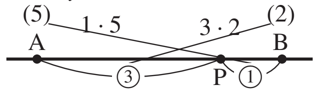
(3) $\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{9}{4},-3}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{6}{5},\ -\dfrac{8}{5}}\right)$, $\mathrm{M}\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2},-2}\right)$

◀ 次のような図を描いて考えよう．

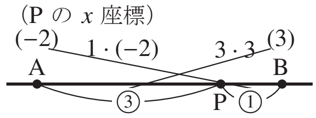
(P の x 座標)



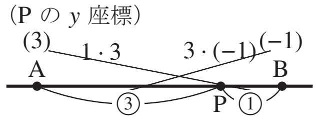
(P の y 座標)



◀ (P の x 座標)



(P の y 座標)



◀ $\mathrm{P}\left(\dfrac{1\cdot0+3\cdot3}{3+1},\ \dfrac{1\cdot0+3\cdot(-4)}{3+1}\right)$

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{3\cdot0+2\cdot3}{2+3},\ \dfrac{3\cdot0+2\cdot(-4)}{2+3}\right)$

$\mathrm{M}\left(\dfrac{0+3}{2},\ \dfrac{0+(-4)}{2}\right)$

■外分点の座標

【暗記：座標平面上の外分点】

『座標平面上の内分点』を参考に座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ に対し，線分 AB を $m : n$ に外分する点 Q の座標 $(x,\ y)$ は

$$x=\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}\ ,\quad y=\frac{-ny_1+my_2}{m-n}$$

であることを示せ．

【解答】

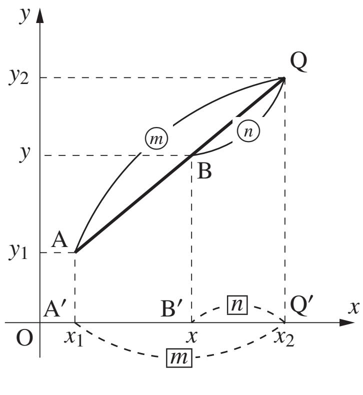
右図のように P′ は線分 A′B′ を $m : n$ に外分する点なので

$$x=\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}$$

であり，y 座標の方も同様にして

$$y=\frac{-ny_1+my_2}{m-n}$$

◀



である．

座標平面上の外分点

座標平面上の 2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ に対し，線分 AB を $m : n$ に外分する点 Q の座標 $(x,\ y)$ は

$$x = \frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}\ ,\quad y = \frac{-ny_1 + my_2}{m - n}$$

である．

【例題：座標平面上の外分点】

以下の点 A, B について，それぞれ，線分 AB を 3 : 1 に外分する点 P，2 : 3 に外分する点 Q，4 : 3 に外分する点 R の座標を求めよ．

(1) A(2, 5)，B(3, 2)　　　(2) A(−2, 3)，B(3, −1)

【解答】

- 点 P は線分 AB を 3 : (−1) に内分した点
- 点 Q は線分 AB を (−2) : 3 に内分した点
- 点 R は線分 AB を 4 : (−3) に内分した点

と考えて，公式に当てはめればよい．

◀ 1 の方が小さいので 1 を (−1) 倍

◀ 2 の方が小さいので 2 を (−1) 倍

◀ 3 の方が小さいので 3 を (−1) 倍

(1) P の座標は $\left(\dfrac{(-1)\cdot 2 + 3\cdot 3}{3+(-1)},\ \dfrac{(-1)\cdot 5 + 3\cdot 2}{3+(-1)}\right)$

Q の座標は $\left(\dfrac{3\cdot 2 + (-2)\cdot 3}{(-2)+3},\ \dfrac{3\cdot 5 + (-2)\cdot 2}{(-2)+3}\right)$

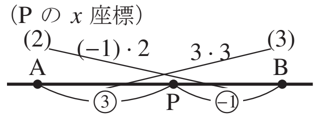
R の座標は $\left(\dfrac{(-3)\cdot 2 + 4\cdot 3}{4+(-3)},\ \dfrac{(-3)\cdot 5 + 4\cdot 2}{4+(-3)}\right)$

なので $\mathbf{P\left(\frac{7}{2},\ \frac{1}{2}\right)}$, **Q (0, 11)**, **R (6, −7)**

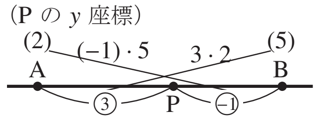
(2) $\mathbf{P\left(\frac{11}{2}, -3\right)}$, **Q (−12, 11)**, **R (18, −13)**

◀ 次のような図を描いて考えよう．

（P の x 座標）



（P の y 座標）



◀ $P\left(\dfrac{(-1)\cdot(-2) + 3\cdot 3}{3+(-1)},\ \dfrac{(-1)\cdot 3 + 3\cdot(-1)}{3+(-1)}\right)$

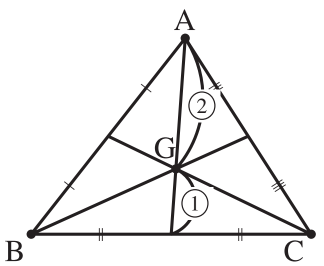
$Q\left(\dfrac{3\cdot(-2) + (-2)\cdot 3}{(-2)+3},\ \dfrac{3\cdot 3 + (-2)\cdot(-1)}{(-2)+3}\right)$

$R\left(\dfrac{(-3)\cdot(-2) + 4\cdot 3}{4+(-3)},\ \dfrac{(-3)\cdot 3 + 4\cdot(-1)}{4+(-3)}\right)$

■三角形の重心

どんな三角形でも，各頂点から引いた 3 本の中線は 1 点で交わる．この点を三角形の**重心** (centroid, center of gravity) という．右の図に示したように，重心は三角形の中線を 2 : 1 に内分する．

以下では，座標平面上のにある三角形の重心の座標を求めてみよう．



【暗記：平面図形と座標】

座標平面上に A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2)，C(x_3, y_3) があり，G を △ABC の重心とする．

(1) 線分 BC の中点を N とする．N の座標を求めなさい．

(2) G が線分 AN を 2 : 1 に内分する点であることを用い，G の座標を求めなさい．

【解答】

(1) N は BC の中点なので，$\left(\boldsymbol{\dfrac{x_2+x_3}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{y_2+y_3}{2}}\right)$

◂『座標平面上の内分点の座標』(p.101)

(2) G の座標は $\left(\dfrac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \dfrac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)$ である．

◂『座標平面上の内分点の座標』(p.101)

この x 座標，y 座標をそれぞれ計算して，

$\left(\boldsymbol{\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}}\right)$ が G の座標になる．

座標平面上の三角形の重心の座標

座標平面上の 3 点 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2)，C(x_3, y_3) について，△ABC の重心 G の座標は

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

である．

…… 三角形の重心の座標は三角形の 3 頂点の座標の平均だと覚えるとよい．

【例題：三角形の重心】

(1) A(3, 2)，B(−1, 4)，C(−3, −5) に対し，△ABC の重心 G の座標を求めよ．

(2) A(1, a)，B(b, 2)，C(3, −3) の重心が原点であるとき，a, b の値を求めよ．

【解答】

(1) G(x, y) とすると

$$x = \frac{3+(-1)+(-3)}{3} = \boldsymbol{-\frac{1}{3}}$$

$$y = \frac{2+4+(-5)}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(2) 重心の座標が (0, 0) なので

$$\left(\frac{1+b+3}{3},\ \frac{a+2+(-3)}{3}\right) = (0,\ 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+b+3=0 \\ a+2+(-3)=0 \end{cases} \qquad \therefore\ \boldsymbol{(a,\ b) = (1, -4)}.$$

§ **2.2**

直線の方程式

この節では，平面上の直線が，座標平面上ではどう表現されるか考えていく．

2.2.1　直線の方程式

■通る 1 点と傾きが与えられた直線の方程式

A(−3, 1) を通り，傾き 2 の直線を l とする．
l の方程式を

$y = 2x + n$　…………………… ①

とすると，これは A を通るので

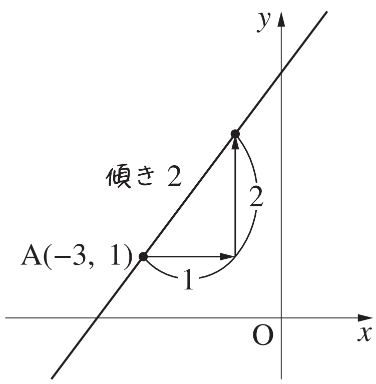
$1 = 2 \cdot (-3) + 1$　…………………… ②

①-②から n を消去すると，l の方程式は

$y - 1 = 2(x + 3)$

である．

一般に次のようになる．



通る 1 点と傾きが与えられた直線の方程式

点 (x_1, y_1) を通り，傾き m の直線の方程式は

$y - y_1 = m(x - x_1)$

である．

【例題：直線の方程式〜その１〜】

次の直線の方程式を求めよ．

(1) (3, 1) を通り，傾きが −3
(2) (−3, − 1) を通り，傾きが $-\dfrac{1}{2}$

【解答】

(1) $y - 1 = -3(x - 3) \iff \boldsymbol{y = -3x + 10}$
(2) $y - (-1) = -\dfrac{1}{2}\{x - (-3)\} \iff \boldsymbol{y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}}$

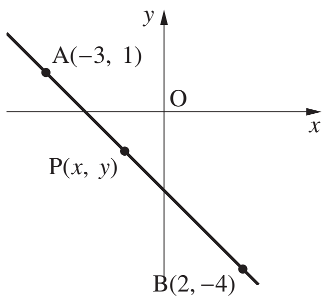
■通る 2 点が与えられた直線の方程式

　$A(-3,\ 1)$, $B(2, -4)$ を通る直線を l とする．

　直線 AB の傾きは $\dfrac{-4-1}{2-(-3)} = -1$ であり，点 $(-3,\ 1)$ を通るから，l の方程式は『通る 1 点と傾きが与えられた直線の方程式』(p.105) より

$$y - 1 = -(x - (-3))$$

である．



通る 2 点が与えられた直線の方程式

異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

である．ただし，$x_1 \neq x_2$ とする．

　$x_1 = x_2$ のとき，直線の方程式は $x = x_1$ となる．

【例題：直線の方程式〜その２〜】

次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ．

(1) $(1,\ 2)$, $(3, 4)$

(2) $(2,\ 1)$, $(-1, -3)$

(3) $(5,\ 3)$, $(-4, 3)$

【解答】

(1) $y - 2 = \dfrac{4-2}{3-1}(x-1) \iff \boldsymbol{y = x + 1}$

(2) $y - 1 = \dfrac{-3-1}{-1-2}(x-2) \iff \boldsymbol{y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{3}}$

(3) $y - 3 = 0 \iff \boldsymbol{y = 3}$

■直線の方程式の標準形

　座標平面上の直線について，次のことがいえる．

1) 直線が y 軸に平行でないとき

　傾きを m，y 切片を n とすると，直線の方程式は

$$y = mx + n \iff mx - y + n = 0$$

2) 直線が y 軸に平行なとき

　x 軸との交点の座標を $(p,\ 0)$ とすると，直線の方程式は

$$x = p \iff x - p = 0$$

以上 1)，2) のいずれの場合でも，直線の方程式は x と y の 1 次式となっている．つまり，座標平面上のあらゆる直線は

$$ax + by + c = 0 \ \ (a \neq 0 \text{ または } b \neq 0)$$

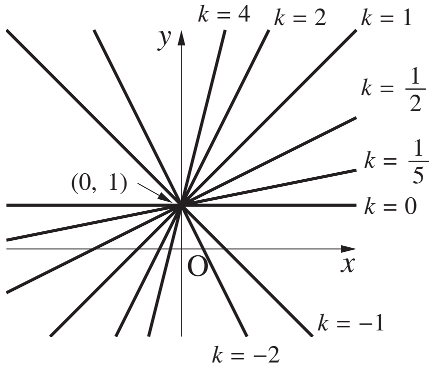
である．

■**直線の集まりとして式をみる方法**

方程式 $y=kx+1$ のグラフは，実数 k の値によって異なるが，右図のように，必ず y 切片が 1，つまり (0, 1) を通る直線となる．

逆に，(0, 1) を通る直線は，y 軸に平行な直線以外は，$y=kx+1$ という形の方程式で表される．

直線の方程式を見て，それがどのような直線の集まりを表すか見抜けるよう，次の例題で練習してみよう．



【例題：直線の集まりとして式をみる〜その１〜】

(1) 直線 $y=2x+k$（k はすべての実数）はどのような直線の集まりか．

(2) 直線 $y=kx-3$（k はすべての実数）はどのような直線の集まりか．

(3) 直線 $y-3=k(x+2)$（k はすべての実数）はどのような直線の集まりか．

【解答】

(1) **傾きが 2 である直線の集まり**になる．

◀ 切片の場所は分からないが，傾きは必ず 2 である．

(2) **(0, −3) を通り y 軸に平行でない直線の集まり**になる．

◀ y の係数は 0 でないため．

(3) **(−2, 3) を通り y 軸に平行でない直線の集まり**になる．

◀「直線 $x=3$ 以外の，(−2, 3) を通る直線の集まり」でもよい

【例題：直線の集まりとして式をみる〜その２〜】

k を実数とする．直線 $l : kx+x+y+3k=0$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) k の値に関わらず l が通る点 A の座標を求めよ．

(2) k が任意の値を取るとき，直線 l はどのような直線の集まりになるか．

【解答】

(1) k についての降べきの順にまとめると

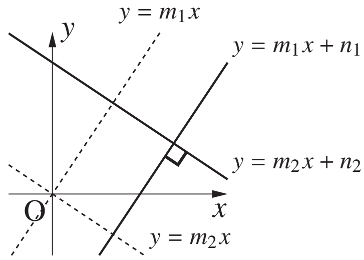
$$kx+x+y+3k=0 \iff k(x+3)+x+y=0$$

k の値に関わらずこの等式が成り立つには，(x, y) が連立方程式 $\begin{cases} x+3=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ を満たせばよい．これを解いて，$(x, y)=(-3, 3)$ であるので，**A(−3, 3)**．

(2) l を y について解くと $y=(-k-1)x-3k$ なので，直線 l は傾き $-k-1$ で点 A を通る直線である．この直線は y 軸と平行にならないが，$-k-1$ は任意の実数をとるので，**(−3, 3) を通り y 軸に平行でない直線の集まり**になる．

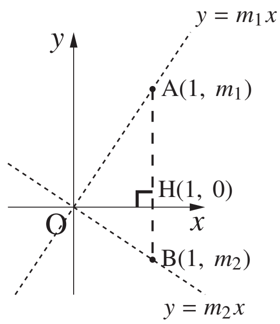
2.2.2　直線の平行と垂直

■直線の平行と垂直



中学で学んだように，2 本の直線が平行であるとは傾きが一致することであった．

では，2 本の直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ が直交するときはどうだろうか．このとき，右図のように，直線を平行移動しても交点の作る角は変わらないので，原点を通る 2 直線 $y = m_1x$, $y = m_2x$ が直交していることが分かる．



右図のように，x 座標が 1 の点を，それぞれの直線上にとる．このとき，$\angle\mathrm{AOH} = 90^\circ - \angle\mathrm{BOH} = \angle\mathrm{OBH}$ であるので，2 つの直角三角形 $\triangle\mathrm{AOH}$ と $\triangle\mathrm{OBH}$ は相似である．よって

$$\mathrm{AH} : \mathrm{HO} = \mathrm{OH} : \mathrm{HB} \iff m_1 : 1 = 1 : (-m_2)$$
$$\iff m_1m_2 = -1$$

が成り立つ．これは，逆も成立する．

直線の平行と垂直

2 直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$（$m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$）について

「互いに平行」 $\iff m_1 = m_2$
「互いに直交」 $\iff m_1m_2 = -1$

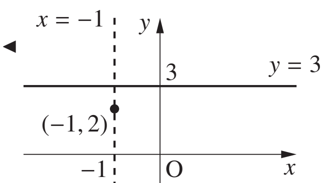
である．

「傾き m の直線と直交するのは傾き $-\dfrac{1}{m}$ の直線」または「傾きの符号を変えて，逆数をとれば直交する」のように記憶するとよい．

【例題：与えられた点を通り与えられた直線に直交する直線の方程式】

(1) $(-1, 2)$ を通り直線 $y = 3$ に直交する直線を図示し，方程式を求めよ．
(2) $(3, 2)$ を通り直線 $y = 3x - 4$ に直交する直線の方程式を求めよ．
(3) $(1, -2)$ を通り直線 $x - 2y + 3 = 0$ に直交する直線の方程式を求めよ．

【解答】



◀『1 点と傾きが与えられた直線の方程式』(p.105)

(1) 右欄外のようになるので，求める方程式は $\boldsymbol{x = -1}$.

(2) 傾き 3 の直線に直交するのは傾き $-\dfrac{1}{3}$ の直線なので

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 3) \iff \boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x + 3}$$

(3) 直線 $x - 2y + 3 = 0$ は $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ と変形でき，傾きは

$\frac{1}{2}$．これと直交する直線の傾きは -2 なので

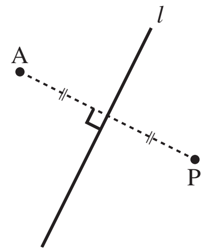
$$y-(-2)=-2(x-1) \iff \boldsymbol{y=-2x}$$

2.2.3　直線に対して対称な点

■直線に対して対称な点

与えられた直線 l に対し，点 A と対称な点を P とすると，以下のことが成り立つ．

1) 直線 AP は直線 l と垂直である．
2) 線分 AP の中点は直線 l 上にある．



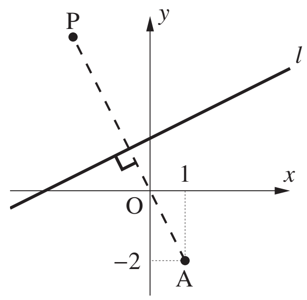
【暗記：直線に対して対称な点】

(1) 直線 l : $x-2y+3=0$ に対し，A$(1,-2)$ と対称な点 P を求めなさい．
(2) 直線 m : $x=-2$ に対し，A$(1,-2)$ と対称な点 Q を求めなさい．

【解答】

(1) 右欄外のような図を描き，P(s, t) とおく．線分 AP の中点 $\left(\frac{s+1}{2},\ \frac{t-2}{2}\right)$ は直線 l 上にあるので

◀『座標平面上の内分点』(p.101)



$$\frac{s+1}{2}-2\cdot\frac{t-2}{2}+3=0$$
$$\iff (s+1)-2(t-2)+6=0$$
$$\iff s=2t-11 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

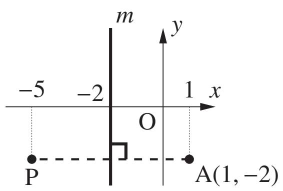
l の方程式は $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ と変形できるので，l の傾きは $\frac{1}{2}$ である．直線 AP の傾きは $\frac{t-(-2)}{s-1}$ であり，l と AP は直交するので

◀『直線の平行と垂直』(p.108)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{t-(-2)}{s-1}=-1 \iff t+2=-2(s-1)$$
$$\iff t=-2s \quad \cdots\cdots ②$$

①に②を代入して，$s=2(-2s)-11 \iff s=-\frac{11}{5}$

これを②に代入して $t=\frac{22}{5}$，よって $\mathbf{P}\boldsymbol{\left(-\frac{11}{5},\ \frac{22}{5}\right)}$



(2) 右の図を描いて，A と Q は y 座標が等しいと分かる．A と直線 m の距離は 3 であるから，線分 AQ の長さは 6 であるので，**Q$(-5,-2)$** である．

◀ Q$(s,-2)$ とおき，AQ の x 座標 $\frac{s+1}{2}$ は -2 なので

$$\frac{s+1}{2}=-2 \iff s=-5$$

と求めてもよい．

2.2.4　点と直線の距離

■点と直線の距離

直線 l の方程式を $ax+by+c=0$，その直線上にない 1 点 A を $(x_1,\ y_1)$ とする．

$b \neq 0$ のとき，直線 l の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるので，A を通り l に垂直な直線の方程式は

$$y-y_1=\frac{b}{a}(x-x_1) \iff -bx+ay+(bx_1-ay_1)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

と書ける．l の方程式と①の交点 H の座標は，連立方程式 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ -bx+ay+(bx_1-ay_1)=0 \end{cases}$

を解けばよい．これを解いて $\mathrm{H}\left(\dfrac{-ac+b^2x_1-aby_1}{a^2+b^2},\ \dfrac{-bc-abx_1+a^2y_1}{a^2+b^2}\right)$．

よって A, H の距離 h について

$$\begin{aligned}
h^2 &= \left(x_1-\frac{-ac+b^2x_1-aby_1}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y_1-\frac{-bc-abx_1+a^2y_1}{a^2+b^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left\{(a^2x_1+\cancel{b^2x_1}+ac-\cancel{b^2x_1}+aby_1)^2+(\cancel{a^2y_1}+b^2y_1+bc+abx_1-\cancel{a^2y_1})^2\right\} \\
&= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left\{a^2(ax_1+c+by_1)^2+b^2(by_1+c+ax_1)^2\right\} \\
&= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}(a^2+b^2)(ax_1+c+by_1)^2=\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

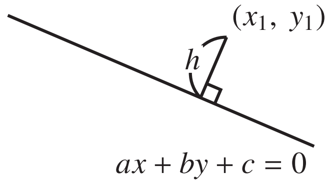
よって $h=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を得る．これは，$b=0$ のときも成立する[*2]．

点と直線の距離

直線 $ax+by+c=0$ と点 $(x_1,\ y_1)$ の距離 h は

$$h=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で求められる．



この公式を簡単に導くには計算に工夫を要するので，よく練習して覚えてしまうのがよい．分子が覚えにくいが，直線 $ax+by+c=0$ の左辺にあたかも点 $(x_1,\ y_1)$ を代入したような形になっているので，そう覚えてしまおう．

【例題：点と直線の距離〜その１〜】

それぞれ与えられた直線 l と一点 A について，直線 l と点 A の距離を求めなさい．

(1) $l: 2x-y+4=0$，A$(2,-1)$　　(2) $l: 3x-4y-2=0$，A$(0,\ 0)$

(3) $l: 3x-4y-2=0$，A$(-4,-4)$　　(4) $l: -3x+2y+1=0$，A$(2,\ 2)$

*2 正射影ベクトルをもちいた導出については FTEXT数学 B を参照のこと．

【解答】

(1) $\dfrac{|2\cdot 2-(-1)+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|9|}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{5}}{5}}$

(2) $\dfrac{|3\cdot 0-4\cdot 0-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{25}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

(3) $\dfrac{|3\cdot(-4)-4\cdot(-4)-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|2|}{\sqrt{25}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

(4) $\dfrac{|-3\cdot 2+2\cdot 2+1|}{\sqrt{(-3)^2+2^2}}=\dfrac{|-1|}{\sqrt{13}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{13}}{13}}$

【例題：点と直線の距離〜その２〜】

(1) 直線 $l: 3x-4y-k=0$ と A(2, 1) の距離が 3 であるとき，k の値を求めよ.

(2) 直線 $l: 2kx+y-2=0$ と A(2, 1) の距離が 1 であるとき，k の値を求めよ.

【解答】

(1) 直線 l と A の距離は $\dfrac{|3\cdot 2-4\cdot 1-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}$ であるので

◀『点と直線の距離』(p.110)

$$\frac{|3\cdot 2-4\cdot 1-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3 \Leftrightarrow \frac{|2-k|}{5}=3$$
$$\Leftrightarrow |2-k|=15$$

$2-k=\pm 15$ を解いて，$\boldsymbol{k=17,-13}$ を得る.

◀ $2-k=15$ のときは $k=-13$
$2-k=-15$ のときは $k=17$

(2) 直線 l と A の距離は $\dfrac{|(2k)\cdot 2+1-2|}{\sqrt{(2k)^2+1^2}}$ であるので

$$\frac{|(2k)\cdot 2+1-2|}{\sqrt{(2k)^2+1^2}}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{|4k-1|}{\sqrt{4k^2+1}}=1$$
$$\Leftrightarrow |4k-1|=\sqrt{4k^2+1}$$

両辺とも正なので，両辺 2 乗して

◀ $|4k-1|^2=(4k-1)^2$
$|4k-1|=4k-1$ のときも，
$|4k-1|=-(4k-1)$ のときも，
2 乗すれば $(4k-1)^2$ になる.

$$\Leftrightarrow (4k-1)^2=4k^2+1$$
$$\Leftrightarrow 12k^2-8k=0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{k=0,\ \frac{2}{3}}$$

【例題：三角形の面積】

原点を O とし，$A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ とする．ただし，$a_1\neq b_1$ とする.

(1) 原点から直線 AB へ引いた垂線の長さ h を求めよ.

(2) 線分 AB の長さを求め，△OAB の面積を求めよ.

【解答】

(1) 原点 O と直線 AB の間の距離が h と一致する．直線 AB は，A を通り傾き $\dfrac{b_2-a_2}{b_1-a_1}$ の直線であるので，その方程式は

$$
\begin{aligned}
&y-a_2=\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}(x-a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(b_1-a_1)y-(b_1-a_1)a_2=(b_2-a_2)x-(b_2-a_2)a_1\\
\Leftrightarrow\ &-(b_2-a_2)x+(b_1-a_1)y-a_2b_1+a_1b_2=0
\end{aligned}
$$

と表される．よって，求める垂線の長さ h は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
h&=\frac{|-(b_2-a_2)\times 0+(b_1-a_1)\times 0-a_2b_1+a_1b_2|}{\sqrt{\{-(b_2-a_2)\}^2+(b_1-a_1)^2}}\\
&=\boldsymbol{\frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}}
\end{aligned}
$$

◀『点と直線の距離』(p.110)

(2) **AB =** $\boldsymbol{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$，$\triangle$OAB $=\dfrac{1}{2}\cdot$ AB $\cdot\, h$ より

◀『2 点間の距離』(p.100)

$$
\begin{aligned}
\triangle\mathrm{OAB}&=\frac{1}{2}\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\cdot\frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|}
\end{aligned}
$$

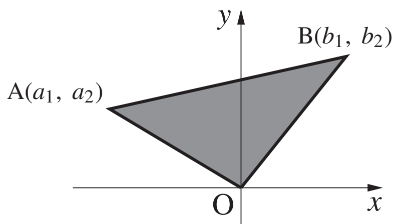
上の結果は，$a_1=b_1$ のときにも成り立ち，次のようにまとめられる[*3]．

三角形の面積

3 点 O(0, 0)，A(a_1, a_2)，B(b_1, b_2) を頂点とする $\triangle$OAB の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

である．



【例題：三角形の面積】

(1) O(0, 0)，A(2, 1)，B(−3, 2) のとき，$\triangle$OAB の面積を求めよ．

(2) M(1, 2)，A(3, 4)，B(4, −3) とする．M が原点 O と一致するよう $\triangle$MAB を平行移動したとき，A，B の座標は A′，B′ に移動したとする．A′，B′ の座標を求め，$\triangle$OA′B′ の面積を求めよ．また，$\triangle$MAB の面積はいくらか．

【解答】

(1) $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}|2\cdot 2-1\cdot(-3)|=\dfrac{1}{2}|7|=\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

◀『三角形の面積』(p.112)

[*3] ベクトルの内積をもちいた導出については FTEXT 数学 B を参照のこと．

(2) x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 平行移動するので

$$\mathrm{A}(3,\ 4) \to \mathbf{A'(2,\ 2)} \qquad \mathrm{B}(4, -3) \quad \to \mathbf{B'(3, -5)}$$

よって，$\triangle\mathrm{OA'B'} = \dfrac{1}{2}|\,2\cdot(-5) - 2\cdot 3\,| = \dfrac{1}{2}|-16| =$ $\mathbf{8}$．また，$\triangle\mathrm{MAB}$ を平行移動して $\triangle\mathrm{OA'B'}$ になったので，$\triangle\mathrm{MAB} = \triangle\mathrm{OA'B'} = \mathbf{8}$.

◀『三角形の面積』(p.112)

§ 2.3

円の方程式

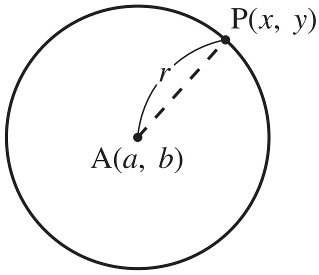
この節では，平面上の円が，座標平面上ではどう表現されるか考えていく．

2.3.1　円の方程式

■円の方程式～平方完成形～

円は，中心と半径を決めればただ 1 つに定まる．

そこで，座標平面上の点 $(a,\ b)$ を中心とした半径 r の円 C は，どのような方程式で表されるか考えてみよう．



円 C の周上にある点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，2 点 A，P の距離は常に r である．『2 点間の距離 (p.100)』で学んだように，$\mathrm{AP} = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ であるから

P が円 C の周上にある $\Leftrightarrow$ $\mathrm{AP} = r$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \quad \cdots\cdots ①$$

等式①の両辺は共に正であるので両辺を 2 乗して，等式

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

を得る．

円の方程式～平方完成形～

点 $(a,\ b)$ を中心とし，半径が $r\ (>0)$ である円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

である．

【例題：円の方程式】

座標平面上に次のような円があるとき，その方程式をそれぞれ求めよ．

(1) 中心 $(3,\ 2)$，半径 3　(2) 中心 $(-3,\ 1)$，半径 2　(3) 中心 $(0, -2)$，半径 $\sqrt{3}$

【解答】

(1) $\boldsymbol{(x-3)^2+(y-2)^2=9}$

(2) $\boldsymbol{(x+3)^2+(y-1)^2=4}$

(3) $\boldsymbol{x^2+(y+2)^2=3}$

■円の方程式〜標準形〜

中心 $(2, -1)$，半径 3 の円の方程式は $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ となるが，この式は

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y+1)^2=9 &\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=9\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y-4=0\end{aligned}$$

と変形することができる．逆に，方程式 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ は

$$\begin{aligned}x^2+y^2-4x+2y-4=0 &\Leftrightarrow (x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)-4=4+1\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=9\end{aligned}$$

と変形し，中心 $(2, 2)$，半径 1 の円の方程式に一致することがわかる．

一般に，方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ は

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2}_{x\text{ について平方完成}}+\underbrace{\left(y+\frac{m}{2}\right)^2}_{x\text{ について平方完成}}=\frac{l^2}{4}+\frac{m^2}{4}-n$$

と変形できるので，$\dfrac{l^2}{4}+\dfrac{m^2}{4}-n>0$ であれば，円の方程式を表していることになる．

円の方程式〜標準形〜

x, y についての方程式

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

は，$\dfrac{l^2}{4}+\dfrac{m^2}{4}-n>0$ のときに円のを表す方程式である．

【例題：円の方程式〜平方完成形と標準形】

次の方程式のうち，円の方程式を表すものについては中心と半径を求めよ．

(1) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$　　(2) $x^2+y^2-6y+1=0$

(3) $x^2+y^2-3x+5=0$　　(4) $x^2+y^2+4x+4y+8=0$

【解答】

(1) 与式の左辺を平方完成すると

$$(x-1)^2+(y+2)^2=4$$

となるので，**中心は $(1, -2)$，半径は 2**.

(2) 与式の左辺を平方完成すると

$$x^2+(y+3)^2=8$$

となるので，**中心は $(0, -3)$，半径は $2\sqrt{2}$**.

(3) 与式の左辺を平方完成すると

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=-\frac{11}{4}$$

となるので，この方程式は円を表さない．

(4) 与式の左辺を平方完成すると

$$(x+2)^2+(y+2)^2=0$$

となるので，この方程式は円を表さない．

◀ この方程式を満たす必要十分条件は，$x+2=0$，$y+2=0$ であるので，$(x, y)=(-2,-2)$ のみが方程式を満たす．つまり，方程式 $x^2+4x+y^2+4y+8=0$ のグラフは，点 $(-2,-2)$ となる．

2.3.2 円の方程式の決定

■中心や半径の条件が与えられた円の方程式

【例題：円の方程式の決定〜その１〜】

(1) 半径が 3 であり，x 軸，y 軸の両方に接する円はいくつあるか．また，それぞれの方程式を求めよ．

(2) 中心が直線 $x=2$ 上にあり，A(3, 2)，B(0, 3) を通る円の方程式を求めよ．

(3) 中心が直線 $y=x$ 上にあり，P(1, 3)，Q(−2, 1) を通る円の方程式を求めよ．

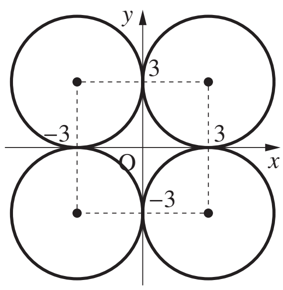
【解答】

(1) 右欄外のように考えれば，円が **4 つ**あることが分かる．中心は $(\pm3,\pm3)$ であるので

$$\boldsymbol{(x+3)^2+(y+3)^2=9,\ (x+3)^2+(y-3)^2=9,}$$

$$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+3)^2=9,\ (x-3)^2+(y-3)^2=9}$$

が求める方程式になる．

◀


(2) 与えられた円の方程式は $(x-2)^2+(y-b)^2=r^2$ とおくことができる．

◀ 中心の y 座標，半径を求めるため，それぞれ b, r とおいた．

A を通ることから $(3-2)^2+(2-b)^2=r^2$

B を通ることから $(0-2)^2+(3-b)^2=r^2$

である．これらを整頓して，連立方程式

$$\begin{cases} b^2-4b+5=r^2 & \cdots\cdots ① \\ b^2-6b+13=r^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を得る．① − ② から $2b-8=0$ なので $b=4$．

◀ ①の r^2 に②を代入すると考えてもよい．

②に代入すれば $r^2=5$ であるので，求める円の方程式は $\boldsymbol{(x-2)^2+(y-4)^2=5}$ となる．

(3) 与えられた円の方程式は $(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$ とおくことができる．

◀ 中心は直線 $y=x$ 上にあるので，中心の x 座標を a とおくと，y 座標も a になる．

A を通ることから $(1-a)^2+(3-a)^2=r^2$

B を通ることから $(-2-a)^2+(1-a)^2=r^2$

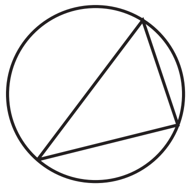
である．これらを整頓して，連立方程式

$$\begin{cases} 2a^2-8a+10=r^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ 2a^2+2a+5=r^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

を得る．③ − ④ から $-10a+5=0$ なので $a=-\dfrac{1}{2}$．④に代入すれば $r^2=\dfrac{9}{2}$ であるので，求める円の方程式は $\boldsymbol{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{2}}$ となる．

◀ ③の r^2 に④を代入すると考えてもよい．

■与えられた 3 点を通る円の方程式



どんな三角形も，外接円はただ 1 つに定まった．これは，(同一直線上にない) 3 点を通る円周がただ 1 つに定まることを意味する．

【例題：円の方程式〜その２〜】

(1) A(3, 0)，B(0, −2)，C(−2, 1) の 3 点を通る円の方程式を求めよ．

(2) A(3, 1)，B(4, −4)，C(−1, −5) とする．△ABC の外接円の中心と半径を求めよ．

【解答】

(1) 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく．

A を通ることから

$3^2+0^2+l\cdot 3+m\cdot 0+n=0$

B を通ることから

$0^2+(-2)^2+l\cdot 0+m\cdot(-2)+n=0$

C を通ることから

$(-2)^2+1^2+l\cdot(-2)+m\cdot 1+n=0$

である．これらを整頓して，連立方程式を得る．

$$\begin{cases} 3l \phantom{{}-2m} + n = -9 & \cdots\cdots ① \\ -2m+n=-4 & \cdots\cdots ② \\ -2l+m+n=-5 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

これを解いて $(l, m, n)=(-1, -1, -6)$．よって，求める方程式は $\boldsymbol{x^2+y^2-x-y-6=0}$ である．

◀ ② + 2 × ③ より

$$\begin{array}{rrrrl} & -2m & +n & = -4 & \\ +)\ -4l & +2m & +2n & =-10 & \\ \hline -4l & & +3n & =-14 & \cdots\cdots ②' \end{array}$$

3 × ① − ②′ より $-13l=13$ となって $l=-1$．②，①から m, n を求めればよい．

(2) △ABC の外接円は 3 点 A，B，C を通る円に一致する．その方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく．

A を通ることから

$3^2+1^2+l\cdot 3+m\cdot 1+n=0$

B を通ることから

$4^2+(-4)^2+l\cdot 4+m\cdot(-4)+n=0$

C を通ることから

$(-1)^2+(-5)^2+l\cdot(-1)+m\cdot(-5)+n=0$

である．これらを整頓して，連立方程式を得る．

$$\begin{cases} 3l + m + n = -10 & \cdots\cdots ④ \\ 4l - 4m + n = -32 & \cdots\cdots ⑤ \\ -l - 5m + n = -26 & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

これを解いて $(l, m, n) = (-2, 4, -8)$．よって，△ABC の外接円の方程式は $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$．平方完成型に変形すると $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$ となり，**△ABC の外接円の中心は $(1, -2)$，半径は $\sqrt{13}$** である．

【(2) の別解（略解）】
外接円の中心を $O(x, y)$ とすると，$OA = OB = OC$ であるので

$$\begin{cases} \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+4)^2} \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+5)^2} \end{cases}$$

これを解いて $(x, y) = \mathbf{(1, -2)}$，外接円の半径は $OA = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \mathbf{\sqrt{13}}$.

◀ ④ − ⑤ より

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & 3l & + & m & + & n & = & -10 \\ -) & 4l & - & 4m & + & n & = & -32 \\ \hline & - & l & + & 5m & & = & 22 \end{array} \quad \cdots\cdots ④'$$

⑤ − ⑥ より

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & 4l & - & 4m & + & n & = & -32 \\ -) & - & l & - & 5m & + n & = & -26 \\ \hline & 5l & + & m & & & = & -6 \end{array} \quad \cdots\cdots ⑤'$$

④′ と ⑤′ を連立して $(l, m) = (-2, 4)$．④から $n = -8$.

◀ 中心と半径を求めるため平方完成型に変形

◀ もちろん，(1) も同じようにして解くことができる．

2.3.3　円と直線の関係

■円と直線の交点

円と直線の交点について，グラフの交点の座標と連立方程式の実数解は一致する．

【例題：円と直線の共有点の座標】

座標平面上に円 $C: x^2 + y^2 = 5$ があるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 直線 $l_1: x + y = 3$ と円 C の共有点があれば，すべて求めよ．
(2) 直線 $l_2: x + y = 4$ と円 C の共有点があれば，すべて求めよ．

【解答】

(1) 直線 l_1 と円 C の共有点は，連立方程式

$$\begin{cases} x + y = 3 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

の解に一致する．①より $y = 3 - x$ であるので，これを②に代入すれば

$$x^2 + (3-x)^2 = 5 \iff 2x^2 - 6x + 9 = 5$$
$$\iff x^2 - 3x + 2 = 0$$

これを解いて $x = 1, 2$．①より，求める共有点の座標は $(\mathbf{2, 1}), (\mathbf{1, 2})$．

◀ ①に代入して y を解く．$x = 1$ のとき $y = 2$，$x = 2$ のとき $y = 1$ となる．

(2) 直線 l_2 と円 C の共有点は，連立方程式

$$\begin{cases} x + y = 4 & \cdots\cdots ③ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

の解に一致する．③より $y = 4 - x$ であるので，これを④に代入すれば

$$x^2 + (4 - x)^2 = 5 \iff 2x^2 - 8x + 11 = 0 \quad \cdots ⑤$$

となる．2 次方程式⑤の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 4^2 - 2 \cdot 11 = -6 < 0$$

であるので，⑤は実数解を持たない．つまり，$\boldsymbol{l_2}$ **と** $\boldsymbol{C}$ **は共有点を持たない**．

◀ ⑤は実数解を持たないことは，連立方程式③，④は実数解を持たないことになるため．

■座標平面上の円を図形的に考える

図形に置き換えて考えると，円と直線の関係は「直線と円の中心の距離」で決まる．この視点から考えると，次のように考えることができる．

【暗記：円と直線の共有点の個数】

座標平面上の円 $C : x^2 + y^2 = 5$ と直線 $l : x + y = k$ が，共有点を持つような実数 k の範囲を求めたい．以下の $\boxed{}$ に入る式・言葉・値を答えよ．

(1) 直線 l と円 C の共有点は，連立方程式 $\boxed{ア}$ の実数解に一致する．つまり，この連立方程式が $\boxed{イ}$ ような k の範囲を求めればよい．
連立方程式 $\boxed{ア}$ から y を消去し，x の 2 次方程式 $\boxed{ウ}$ を得る．
この 2 次方程式が実数解を持つことから，不等式 $\boxed{エ}$ を得る．
これを解いて，求める k の範囲は $\boxed{オ}$ と分かる．

(2) 条件「直線 $l : x + y = k$ が円 C と共有点を持つ」は
条件「直線 $l : x + y = k$ と円 C の中心の距離が，$\boxed{カ}$ 以下である」
と必要十分条件である．
直線 l と円 C の中心 $(0, 0)$ の距離は $\boxed{キ}$ であるので不等式 $\boxed{ク}$ を得る．これを解いて，求める k の範囲は $\boxed{オ}$ と分かる．

【解答】

ア：$\begin{cases} \boldsymbol{x + y = k} & \cdots\cdots ⑦ \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 = 5} & \cdots\cdots ⑧ \end{cases}$　イ：**実数解を持つ**

ウ：$\boldsymbol{x^2 + (k - x)^2 = 5}$ $\left(\Leftrightarrow\ \boldsymbol{2x^2 - 2kx + k^2 - 5 = 0}\right)$

エ：$\dfrac{D}{4} = \boldsymbol{k^2 - 2(k^2 - 5) \geqq 0}$ $\left(\Leftrightarrow\ \boldsymbol{-k^2 + 10 \geqq 0}\right)$

オ：$\boldsymbol{-\sqrt{10} \leqq k \leqq \sqrt{10}}$

カ：$\boldsymbol{\sqrt{5}}$（または**円 C の半径**）

キ：$\boldsymbol{\dfrac{|-k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}}$ $\left(= \boldsymbol{\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}}\right)$

ク：$\boldsymbol{\dfrac{|k|}{\sqrt{2}} \leqq \sqrt{5}}$ $\left(\Leftrightarrow\ \boldsymbol{|k| \leqq \sqrt{10}}\right)$

◀ ⑦より $y = k - x$ なので，⑧に代入すればよい．

◀ 実数解を持つ ⇔ (判別式) ≧ 0
$D = (2k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 5) \geqq 0$ でもよい．

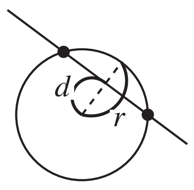
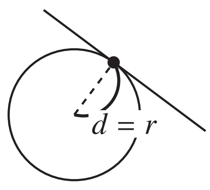
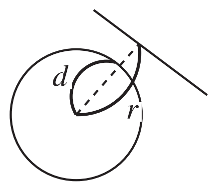
◀ 直線 $x + y - k = 0$ と点 (0, 0) の距離を『点と直線の距離 (p.**??**)』で計算．

「円と直線の共有点」について

円 $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ と直線 $ax + by + c = 0$ を考えるとき

- 円 $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ と直線 $ax + by + c = 0$ の共有点の個数
- 方程式 $ax + by + c = 0$ と $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ を連立して得られる 2 次方程式の判別式 D
- 円の中心 $(p,\ q)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 $d = \dfrac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

について，次のようにまとめることができる．

円と直線の共有点の個数	2 個	1 個	0 個
円と直線の位置関係			
連立方程式の判別式 D	$\boldsymbol{D > 0}$	$\boldsymbol{D = 0}$	$\boldsymbol{D < 0}$
$(p,\ q)$ と直線の距離 d	$\boldsymbol{d > r}$	$\boldsymbol{d = r}$	$\boldsymbol{d < r}$

これは暗記するようなものではない．必ず簡単なグラフを描いて考えよう．

【例題：円が切り取る線分の長さ】

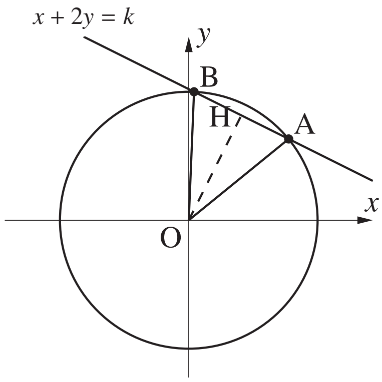
円 $C: x^2+y^2=6$ と直線 $l: x+2y=k$ が 2 点 A，B で交わり，AB = 2 であるとき，k の値を求めたい．以下の $\boxed{}$ に入る式・言葉・値を答えよ．

右図のように，円の中心を O とし，O から直線 $x+2y=k$ へ下ろした垂線の足を H とおく．このとき，OA = $\boxed{ア}$, AH = $\boxed{イ}$ であるので，三平方の定理より，OH = $\boxed{ウ}$.

ところで，OH の長さは，点 O と直線 $\boxed{エ}$ の距離に一致するので，『点と直線の距離』より

OH = $\boxed{オ}$

よって，方程式 $\boxed{オ}$ = $\boxed{ウ}$ (= OH) を解けば，k = $\boxed{カ}$ と求められる．



【解答】

ア：$\sqrt{6}$　イ：$\dfrac{1}{2}$AB = **1**

ウ：$\sqrt{(\sqrt{6})^2-1^2} = \sqrt{5}$　エ：(直線) $x+2y=k$

オ：$\dfrac{|0+2\cdot 0-k|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$

カ：$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \iff |k|=5$，つまり，$k=\pm 5$.

◀ 直線 $x+2y-k=0$ と点 (0, 0) の距離を『点と直線の距離 (p.**??**)』で計算．

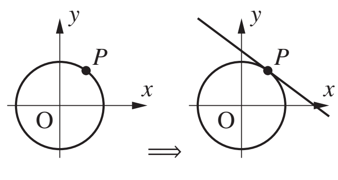
上の例題は，A，B の座標を求めて AB の長さを k で表し，それが 2 になることから解くこともできるが，計算が大変である．この例題のように，交点が複雑な形になる場合は，問題を図形的に考えると計算が簡単に済む．

2.3.4　円の接線

■円周上の点から引いた接線の方程式

簡単のため，円 C の中心が原点 O(0, 0) にあるときを考えよう．右図のように考えて，円周上の点 P で C に接する直線は 1 本しか存在しないことがわかる．

次の例題で確認してみよう．

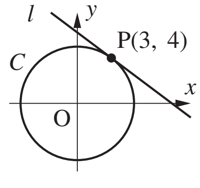


【例題：円周上の点から引いた接線の方程式】

円 $C: x^2+y^2=25$ の周上の点 P(3, 4) を接点とする接線を l とする．

(1) 接線 l が線分 OP と直交することから，l の傾きを求めよ．

(2) l の方程式を求めなさい．



【解答】

(1) 線分 OP の傾きは $\dfrac{4-0}{3-0} = \dfrac{4}{3}$．接線 l と線分 OP が

直交するので，l の傾きは $\boldsymbol{-\dfrac{3}{4}}$ である．

◀ (OP の傾き) × (l の傾き) = −1

(2) l は P(3, 4) を通り傾き $-\dfrac{3}{4}$ の直線であるので

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3) \iff 4y-16=-3x+9$$
$$\iff \boldsymbol{3x+4y=25}$$

一般に，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の周上の点 P$(p,\ q)$ を接点とする接線 l の方程式はどうなるだろうか．O$(a,\ b)$ とすると，接線 l は線分 OP と直交し，線分 OP の傾きは $\dfrac{q-b}{p-a}$ であるので

$$\frac{q-b}{p-a}\times(\text{直線 } l \text{ の傾き})=-1 \iff (\text{直線 } l \text{ の傾き})=-\frac{p-a}{q-b}$$

となる．よって，l は $(p,\ q)$ を通り傾き $-\dfrac{p-a}{q-b}$ の直線と分かるので

$$y-q=-\frac{p-a}{q-b}(x-p) \iff (q-b)(y-q)=-(p-a)(x-p)$$
$$\iff (q-b)(y-b+b-q)=-(p-a)(x-a+a-p)$$
$$\iff (q-b)(y-b)+(q-b)(b-q)=-(p-a)(x-a)-(p-a)(a-p)$$
$$\iff (p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=(p-a)^2+(q-b)^2$$

となる．ここで，P は円 C の周上にあるので，$(p-a)^2+(q-b)^2=r^2$ を満たす．つまり，l の方程式は $(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$ となる．

円周上の点から引いた接線の方程式

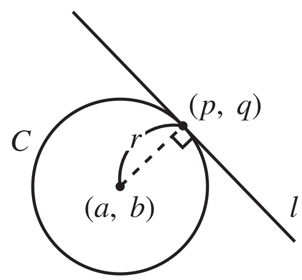
円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の周上の点 $(p,\ q)$ から引いた接線 l の方程式は

$$(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$$

となる．特に，円 C の中心が原点にある場合は

$$px+qy=r^2$$

となる（$a=b=0$ を l の式に代入すればよい）．



円の方程式において，2 乗のうち片方のみに，$(x,\ y)=(p,\ q)$ を代入すると覚えるとよい．また，次で学ぶ「円周外の点から引いた接線の方程式」と混同しないようにしよう．接線が 1 本に決まるかどうかで判断するとよい．

【例題：円周上の点から引いた接線の方程式】

(1) 円 $x^2+y^2=13$ の周上の点 $(2,\ 3)$ で接する，接線の方程式を求めよ．

(2) 円 $x^2+y^2=13$ の周上の点 $(2,-3)$ で接する，接線の方程式を求めよ．

(3) 円 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$ の周上の点 $(2,-1)$ で接する，接線の方程式を求めよ．

(4) 円 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ の周上の点 $(0,-1)$ で接する，接線の方程式を求めよ．

【解答】

(1) $2\cdot x+3\cdot y=13 \iff \boldsymbol{2x+3y=13}$

(2) $2\cdot x+(-3)\cdot y=13 \iff \boldsymbol{2x-3y=13}$

(3) $(2-1)(x-1)+(-1+2)(y+2)=2 \iff \boldsymbol{x+y=1}$

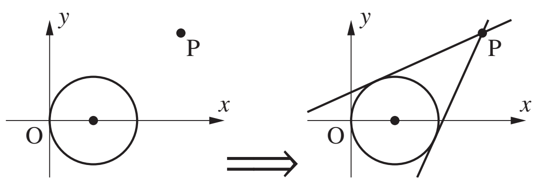
(4) $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ を平方完成形に変形して $(x-1)^2+(y+2)^2=2$ となる．よって，$(0,-1)$ で接する接線の方程式は

$(0-1)(x-1)+(-1+2)(y+2)=2 \iff \boldsymbol{x-y=1}$

■円周外の点から引いた接線の方程式

円 C の外に点 P をとり，P から引いた円 C の接線を考えよう．右図のようにして，そのような直線は 2 本存在することがわかる．

次の例題で確認してみよう．



【例題：円周外の点から引いた接線の方程式】

円 C: $x^2+y^2=2$ と点 P(3, 1) について，P から引いた C の接線 l の方程式を求めたい．以下の $\boxed{}$ に入る式・言葉・値を答えよ．

直線 l の傾きを m とする．l は P を通り傾き m の直線となるので，方程式は $\boxed{ア}$ となる．条件「円 C と直線 l : $\boxed{ア}$ が接する」は

「円 C の $\boxed{イ}$ と直線 l : $\boxed{ア}$ の距離が $\boxed{ウ}$ に等しい」

という条件と必要十分条件である．

l と，円 C の中心の距離は『点と直線の距離』(p.110) を用いて $\boxed{エ}$ と書けるので，

$$\boxed{エ}=\boxed{ウ}$$

が成り立つ．これを解いて $m=\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$（ただし，$\boxed{オ}<\boxed{カ}$）．よって，l の方程式は $m=\boxed{オ}$ のとき $\boxed{キ}$，$m=\boxed{カ}$ のとき $\boxed{ク}$．

【解答】

ア： $\boldsymbol{y-1=m(x-3)}$，イ： **中心**（つまり，原点）

ウ： $\boldsymbol{\sqrt{2}}$（または**円 C の半径**）

エ：$\dfrac{|m\cdot 0-0-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\left(=\dfrac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}\right)$

オ：$-\dfrac{1}{7}$，カ：$\mathbf{1}$

キ：$x+7y-10=0$，　　ク：$x-y-2=0$

◀『点と直線の距離』(p.110)

◀ 途中の計算は以下のようになる．

$$\frac{|m\cdot 0-0-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow |-3m+1|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+(-1)^2}$

両辺とも正なので，両辺 2 乗して

$\Leftrightarrow 9m^2-6m+1=2m^2+2$

$\Leftrightarrow 7m^2-6m-1=0$

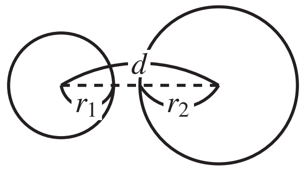
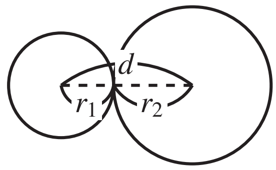
2.3.5　2 円の関係

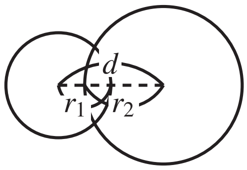
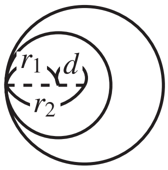
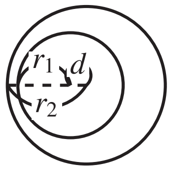
■2 円の位置関係

2 円の位置関係は，2 円の半径と中心間の距離で決まり，以下の 5 つの状態がある．

2 円の位置関係

2 円の半径を r_1，r_2 $(r_1<r_2)$，中心間の距離を d とすると，以下のようになる．

2 円の図		
2 円の位置関係	離れている	外接している
2 円の共有点の個数	0 個	1 個（外接）
2 円の中心間の距離 d	$d>r_1+r_2$	$d=r_1+r_2$

		
交わっている	内接している	一方が他方を含む
2 個	1 個（内接）	0 個
$d<r_1+r_2$	$d>r_2-r_1$	$d<r_2-r_1$

【例題：2 円の関係】

円 C_1 は A を中心とした半径 2 の円，円 C_2 は B を中心とした半径 5 の円とする．

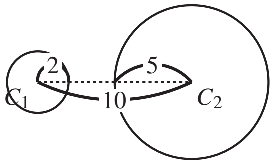
(1) AB = 10 のとき，円 C_1 と C_2 はどんな位置関係にあるか．また，AB = 6 のとき，AB = 2 のときはどうか．

(2) C_1 と C_2 が外接するとき線分 AB の長さを求めよ．また，内接するときはどうか．

(3) C_1 が C_2 に含まれるための，線分 AB の長さの条件を求めよ．

【解答】

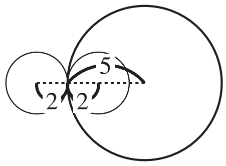
(1) AB = 10 のときは**共有点がなく**，AB = 6 のときは **2**

◀ 

点で交わり，AB = 2 のときは**円 C_1 が円 C_2 に含まれている**．

(2) 外接のときは AB = 7，内接のときは AB = 3．

(3) 線分 AB の長さが，内接するときより短ければよいので，(0 <)AB **< 3**.

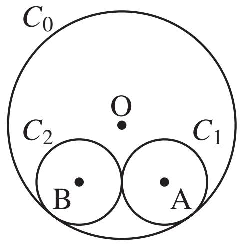


【例題：複数の円を含む図形】

半径 8 の円 C_0 に，半径 3 の円 C_1, C_2 が右図のように内接している．それぞれの中心を O，A，B とする．

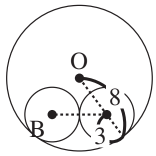
(1) AB，OA の長さをそれぞれ求めよ．

(2) 円 C_0 に内接し，円 C_1, C_2 の両方に外接する円 C_3 の半径を求めよ．



【解答】

(1) 図より明らかに，**AB = 6**．また，直線 OA を右欄外の図のように引いて，OA = 8 − 3 = **5**.



円が接しているときは，円の中心と接点を結ぶ習慣をつけよう．

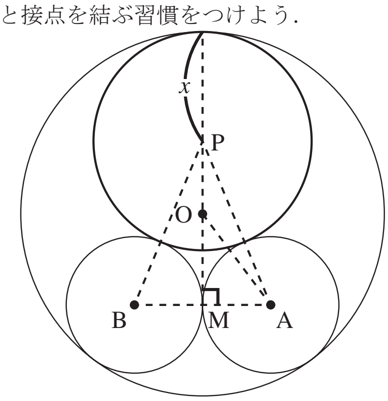
(2) 円 C_3 の中心を P，半径を x とする．

AB の中点を M とすると，M は直線 PO 上にあり，PM ⊥ AB になる．△OAM は直角三角形なので

$$5^2 = 3^2 + \mathrm{OM}^2 \qquad \therefore\ \mathrm{OM} = 4$$

また，円 C_3 が円 C_0 と内接することから PO = 8 − x なので，△DAM について

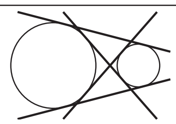
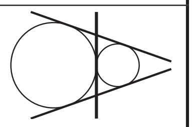
$$\begin{aligned} &\mathrm{PA}^2 = (\mathrm{PO} + \mathrm{OM})^2 + \mathrm{MA}^2 \\ \Leftrightarrow\ &(x + 3)^2 = \{(8 - x) + 4\}^2 + 3^2 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + 6x + 9 = 144 - 24x + x^2 + 9 \\ \Leftrightarrow\ &6x = 144 - 24x \qquad \therefore\ \boldsymbol{x = \frac{8}{5}} \end{aligned}$$

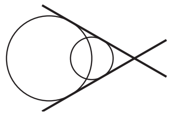
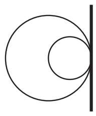
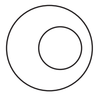


■2 円の共通接線

2 円の共通接線の本数は，2 円の位置関係によって異なる．

2 円の共通接線

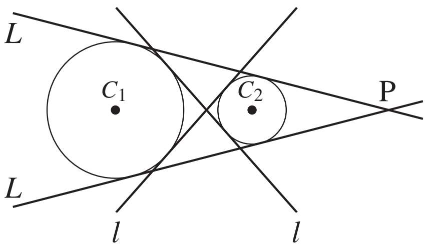
共通接線の本数	4 本[*4]	3 本
2 円と共通接線の図		
2 円の位置関係	離れている	外接している

2 本	1 本	0 本
		
交わっている	内接している	一方が他方を含む

共通接線の方程式を求めるには，問題を図示し，図形的に考えることが不可欠である．

【例題：2 円の共通接線】

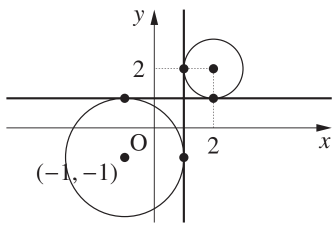
2 つの円 $C_1 : (x+1)^2+(y+1)^2=4$，$C_2 : (x-2)^2+(y-2)^2=1$ がある．この 2 円に対し，共通内接線 l，共通外接線 L を考え，2 本ある L の交点を P とする．



(1) 共通内接線 l の方程式を求めよ．
(2) P の座標を求めよ．
(3) 共通外接線 L の傾きを求めよ．

【解答】

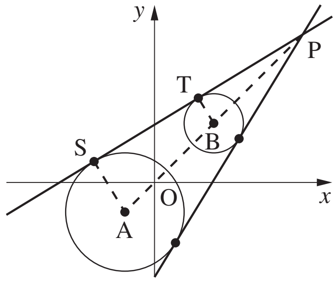
(1) 右の図のようにして，2 本の l は軸に平行な直線と分かり，その方程式は $\boldsymbol{x=1,\ y=1}$ である．



(2) 右の図のように，2 円の中心を A，B，2 接点を S，T とする．このとき，△PSA ∽ △PTB であり，その相似比は SA : TB = 2 : 1．
よって，AP : PB = 2 : 1 であるから，B は線分の AP の中点となる．P$(a,\ b)$ とおけば

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{-1+b}{2}\right)=(2,\ 2)\quad\Leftrightarrow\quad(a,\ b)=(5,\ 5)$$

よって，**P(5, 5)** である．



(3) L の傾きを m とおく．L は P を通るので

$$y-5=m(x-5)\quad\Leftrightarrow\quad mx-y-5m+5=0$$

が L の方程式となる．この直線と B の距離が，円 C_2

[*4] 2 円の中心間を横切る共通接線は共通内接線（2 本ある），2 円の上下で接する共通接線は共通外接線（2 本ある）と言われる．

の半径 1 に等しくなればよいので

$$\frac{|m\cdot 2-2-5m+5|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$\Leftrightarrow\ |-3m+3|=\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow\ (3m-3)^2=m^2+1$$

◀ 両辺とも正なので両辺を 2 乗しても同値はかわらない

$$\Leftrightarrow\ 4m^2-9m+4=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{m=\frac{9\pm\sqrt{17}}{8}}$$

■2 円の交点を通る円

2 つの図形の交点を通る図形の方程式は，交点の座標を求めることなく得ることができる場合がある．それを次の例題で確認しよう．

【例題：2 円の交点を通る円】

2 円 $x^2+y^2+2x-9=0$ ········ ① と $x^2+y^2-6x-4y+3=0$ ········ ② について次の問いに答えよ．

(1) 2 円の共有点を通る直線の方程式を求めよ．

(2) 2 円の共有点と点 $(1,\ -4)$ を通る円の方程式を求めよ．

【解答】

(1) k を定数として

$$k(x^2+y^2+2x-9)+x^2+y^2-6x-4y+3=0 \quad \cdots③$$

とすると，方程式③は，2 つの円①，② の交点を通る図形を表す．

◀ 理由は下の本文参照

③が直線を表すのは $k=-1$ のときなので，$\boldsymbol{2x+y-3=0}$ となる．

◀ $k=-1$ とすると 2 次の項が打ち消しあって，1 次の項つまり直線の方程式が残る

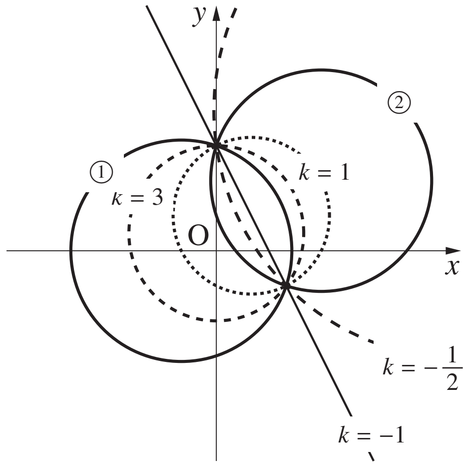
(2) ③が $(1,\ -4)$ を通るとき

$$k(1+16+2-9)+1+16-6+16+3=0$$

$$\Leftrightarrow\ k=-3$$

よって，求める方程式は $\boldsymbol{x^2+y^2+6x+2y-15=0}$ となる．

上の例題の 2 つの図形①と②の交点，すなわち方程式①と②を同時に満たす $(x,\ y)$ の値は③を満たす．これより，③は①と②の交点を通る方程式であることがわかる．



さらに，③を整理することにより，$k \neq -1$ の場合には

$$k(x^2+y^2+2x-9)+x^2+y^2-6x-4y=0$$
$$\Leftrightarrow\ (1+k)x^2+(1+k)y^2+(2k-6)x-4y-9k+3=0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2+y^2+\frac{2k-6}{1+k}x-\frac{4}{1+k}y+\frac{3-9k}{1+k}=0$$

と『円の標準形』(p.115) となり，円を表すことがわかる．

③の k の値を変化させたときの図形を右図に示した．

§ 2.4

軌跡と領域

この節では，ある条件を満たす点の集まりを，方程式や不等式で表す方法について学ぶ.

2.4.1　多変数関数と図形の方程式

■多変数関数とは何か

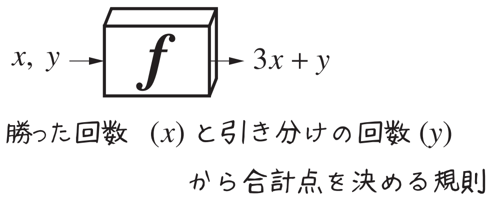
変数を 2 つ以上持つような関数のことを**多変数関数** (multivariable function) という．もし，ある関数が x, y を変数にもつならば，その関数は $f(x,\ y)$ のように表される.

たとえば，勝ちに 3 点，引き分けに 1 点，負けに 0 点を与えるゲームを考える.

勝った回数を x 回，引き分けた回数を y 回とすれば，合計点は x, y の値によって決まるので x, y の関数である．これを $f(x,\ y)$ とおけば

$$f(x,\ y) = 3x + y$$

と求められる．x, y はどちらも変数である.



変数への値の代入は，変数が 1 つのときと同じように以下のように書く.

$$f(6,\ 4) = 18 + 4 = 22$$

この式は，6 勝 4 引き分けならば合計点は 22 点であることを表している.

【例題：多変数関数の表し方】

(1) $g(x,\ y) = x^2 + y^2 - 10$ のとき，$g(1,\ 1)$, $g(3, -1)$, $g(-4,\ t)$ の値を求めよ.

(2) 1 個 200 円のりんごを x 個，1 個 100 円のみかんを y 個買うときの合計金額を $s(x,\ y)$ 円とするとき，$s(x,\ y)$ を x と y の式で表せ.

【解答】

(1)
$$g(1,\ 1) = 1^2 + 1^2 - 10 = \mathbf{-8}$$
$$g(3, -1) = 3^2 + (-1)^2 - 10 = \mathbf{0}$$
$$g(-4,\ t) = (-4)^2 + t^2 - 10 = \boldsymbol{t^2 + 6}$$

(2) $\boldsymbol{s(x,\ y) = 200x + 100y}$

■2 変数関数と図形の方程式

FTEXT数学 I で学んだ放物線や，p.2.2 で学んだ直線，p.2.3 で学んだ円のなどの図形の方程式は，適当な多変数関数 $f(x, y)$ をもちいて，方程式

$$f(x, y) = 0$$

で表すことができる．

たとえば，2 変数関数を $f(x, y) = y - 2x - 1$ とおけば，方程式 $f(x, y) = 0$ は

$$y - 2x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ y = 2x + 1$$

つまり，傾きが 2 で切片が 1 の直線を表す．

もう 1 例考えてみよう．2 変数関数を $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とおけば，方程式 $g(x, y) = 0$ は

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2 + y^2 = 1$$

つまり，原点 (0, 0) が中心で半径が 1 の円を表す．

2 変数関数と図形の方程式の関係

図形の方程式は，適当な多変数関数 $f(x, y)$ をもちいて，方程式

$$f(x, y) = 0$$

で表せる．

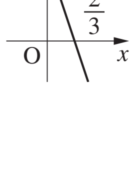
【例題：2 変数関数と図形の方程式】

2 変数関数 $f(x, y)$ がつぎの (1)〜(3) で定義されるとき，方程式 $f(x, y) = 0$ の表す図形を xy 平面上に図示せよ．

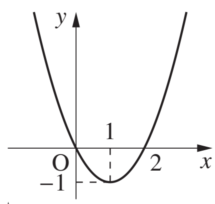
(1) $f(x, y) = 3x + y - 2$
(2) $f(x, y) = -x^2 + 2x + y$
(3) $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y$

【解答】

(1) $f(x, y) = 0$ より，$y = -3x + 2$ となるので，グラフは右図のようになる．



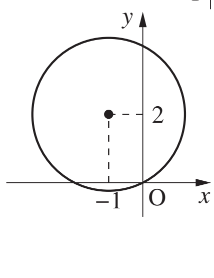
(2) $f(x, y) = 0$ より，$y = x^2 - 2x$ となるので，グラフは右図のようになる．



(3) $f(x, y) = 0$ より

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

となるので，グラフは右図のようになる．



2.4.2 軌跡

■軌跡とは何か

平面上で，与えられた条件を満たしながら点 P が動くとき，点 P の描く図形を，その条件を満たす点の**軌跡** (locus) という．

【例題：2 点から等距離にある点の軌跡】

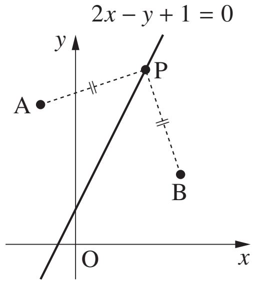
座標平面上の 2 点 A(−1, 4)，B(3, 2) から等距離にある点 P の軌跡を求めよ．

【解答】

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，AP = BP より，$AP^2 = BP^2$ だから

$$(x+1)^2+(y-4)^2=(x-3)^2+(y-2)^2$$
$$\Leftrightarrow\ 2x-y+1=0$$

より，求める軌跡は，**直線 $2x-y+1=0$** である．



【例題：アポロニウスの円〜その１〜】

座標平面上 2 点 A(1, 3)，B(4, −3) からの距離の比が 1 : 2 である点 P の軌跡を求めよ．

【解答】

AP : BP = 1 : 2 つまり，2AP = BP だから，$4AP^2 = BP^2$

P$(x,\ y)$ とすると

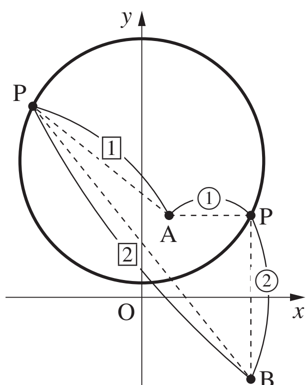
$$AP^2=(x-1)^2+(y-3)^2 \quad \cdots\cdots ①$$
$$BP^2=(x-4)^2+(y+3)^2 \quad \cdots\cdots ②$$

◀『2 点間の距離』(p.100)

であるから

$$4\left\{(x-1)^2+(y-3)^2\right\}=(x-4)^2+(y+3)^2$$
$$\Leftrightarrow\ 4(x^2-2x+1)+4(y^2-6y+9)$$
$$=x^2-8x+16+y^2+6y+9$$
$$\Leftrightarrow\ 3x^2+3y^2-30y+40-25=0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2+y^2-10y+5=0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2+(y-5)^2=20$$

よって，求める軌跡は，**中心 (0, 5) 半径 $2\sqrt{5}$ の円**である．



2 点からの距離の比が与えられたときの点の軌跡について，一般に次のことが成り立つ．

アポロニウスの円

2 点 A，B からの距離の比が $m:n$ である点 P の軌跡は，$m \neq n$ のとき，線分 AB を $m:n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円である．この円を**アポロニウスの円** (circle of Apollonius) という．

なお，$m=n$ のときは，2 つ上の例題てみたように，線分 AB の垂直二等分線となる．

【例題：アポロニウスの円〜その２〜】

上の『アポロニウスの円〜その 1 〜』の例題を，アポロニウスの円の知識を使って解け．

【解答】

線分 AB を 1:2 に内分する点 M の座標は

$$\left(\frac{1\times2+4\times1}{1+2},\ \frac{3\times2-3\times1}{1+2}\right)=(2,\ 1)$$

外分する点 N の座標は

$$\left(\frac{1\times2+4\times(-1)}{-1+2},\ \frac{3\times2-3\times(-1)}{-1+2}\right)=(-2,\ 9)$$

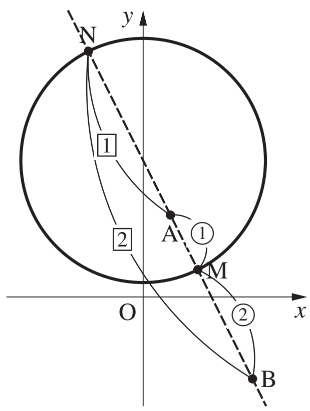
軌跡である円の直径となる MN の距離は

$$\sqrt{(2+2)^2+(1-9)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

軌跡である円の中心となる MN の中点の座標は

$$\left(\frac{2-2}{2},\ \frac{1+9}{2}\right)=(0,\ 5)$$

よって，求める軌跡は，**中心 (0, 5) 半径 $2\sqrt{5}$ の円**である．



■条件に動点を含む場合の軌跡

次のの例題の点 Q のように，条件に動点を含む場合はその座標を $(X,\ Y)$ などとおき計算していく．

【例題：条件に動点を含む場合の軌跡】

円 $x^2+y^2=4$ と点 A(4, 0) がある．点 Q がこの円上を動くとき，線分 AQ を 3 : 1 に内分する点 P の軌跡を求めよ．

【解答】

点 P，Q の座標をそれぞれ $(x,\ y)$，$(X,\ Y)$ とする．点 Q は円 $x^2+y^2=4$ 上にあるから

$$X^2+Y^2=4 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

点 P は線分 AQ を 3 : 1 に内分する点だから

$$x = \frac{1 \times 4 + 3X}{3+1}, \quad y = \frac{1 \times 0 + 3Y}{3+1} \quad \cdots\cdots ②$$

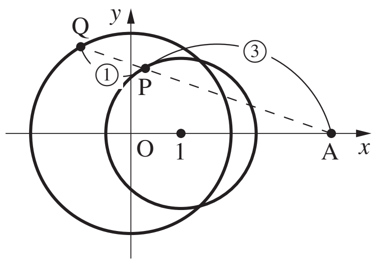
よって，$X = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$，$Y = \frac{4}{3}y$．これらを①に代入すると

$$\left(\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}y\right)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \ (x-1)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

よって，求める軌跡は，**中心が (1, 0) 半径が $\frac{3}{2}$ の円**である．

◀ なぜこのような操作を行うのかについては下の本文を参照



◀

??上の例題の軌跡，つまり点 P の決まり方は，問題文をそのままに読めば，まず点 Q が決まり次に点 P が決まるという順序になっている．しかし，このような理解では，無数の点 Q に対して点 P をプロットすることしかできず，軌跡の一端は垣間見えるものの，図形の方程式としては求まらない．

そこで，考え方の順序を変え，ある点 P(x, y) を考えてみてそれが軌跡上にあるかどうか調べるという方法をとる[*5]．たとえば，点 P(1, 2) が軌跡上にあるかどうかを調べてみよう．AP : AQ = 3 : 1 であるから，例題中の②に (1, 1) を代入して

$$1 = \frac{1 \times 4 + 3X}{3+1}, \quad 2 = \frac{1 \times 0 + 3Y}{3+1}$$

を満たさなくてはならない．この式から X と Y は，$(X, Y) = \left(0, \frac{8}{3}\right)$ であることが必要となるが，これらをそもそも円 $x^2 + y^2 = 4$ 上にあるので，例題中の①を満たさなければならないが，代入しても

$$0 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 \neq 4$$

となり満たさないので，点 (1, 2) は軌跡に含まれない（満たせば軌跡に含まれる）．

このような作業を具体的な点 (1, 1) ではなく，ある点 (x, y) で行うことにより，x と y が満たす方程式が得られ軌跡を求めることができる．

このような考え方を使う例題として，もう 1 問練習してみよう．

【例題：2 直線の交点の軌跡】

2 直線 $l_1 : kx + y + 1 = 0$，$l_2 : x - ky - 1 = 0$ の交点 P が描く軌跡を求めよ．

【解答】

[*5] 逆像法や逆手流という俗称もある．

方程式を

$$\begin{cases} kx + y + 1 = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①} \\ x - ky - 1 = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

とおく.

1) $y \neq 0$ のとき，②より

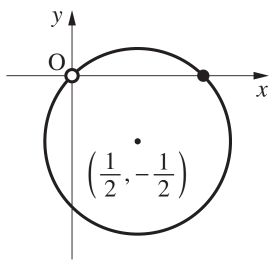
$$k = \frac{x-1}{y} \quad (y \neq 0)$$

これを①に代入して

$$\frac{x-1}{y} \cdot x + y + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2 - x + y^2 + y = 0$$
$$\Leftrightarrow\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

2) $y = 0$ のとき，②より $x = 1$ が必要だが，これは，①で $k = -1$ のとき成立する．つまり，点 $(1, 0)$ は l_1 と l_2 の交点である.

以上 1)，2) より，求める軌跡は，**中心 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ 半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円**（ただし，**点 (0, 0) を除く**）となる.

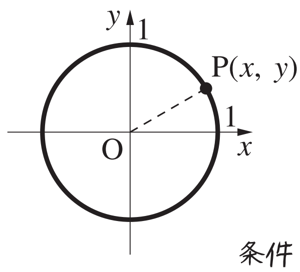


2.4.3 領域

■領域とは何か

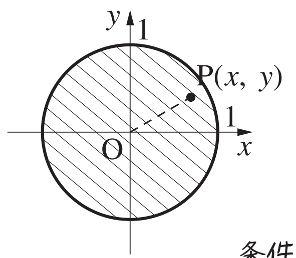
次の 3 つの条件 A, B を考えよう.

条件 A　原点 O からの距離が 1 である点 P(x, y)
条件 B　原点 O からの距離が 1 以下である点 P(x, y)



条件 A

まず，条件 A を満たす点 P の集合は，右上図の円周となり，これは条件 A を満たす点 P の軌跡といっていた.



条件 B
（境界を含む）

次に，条件 B を満たす点 P の集合は，右中央の図のように平面的な広がりをもつ．このようなときは，もはや軌跡とはいわず，条件 B を満たす点 P の**領域** (domain) という．領域とそうでない部分を決めるさかい目 $(x^2 + y^2 = 1)$ を**境界** (boundary) という.

【例題：円周を境界とする領域】

次の不等式の表す領域を図示せよ．

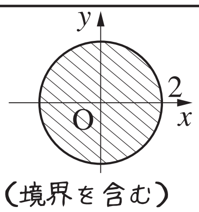
(1) $x^2+y^2 \leqq 4$

(2) $x^2+y^2 > 4$

(3) $x^2+2x+y^2-4y < 0$

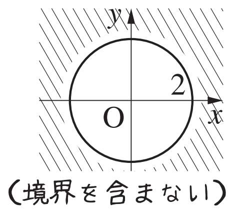
【解答】

(1) 中心が原点で半径が 4 の円の境界と内側を表す．



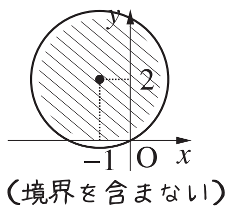
(2)

中心が原点で半径が 4 の円の外側を表す．



(3)

$(x+1)^2+(y-2)^2 < 5$ より，中心が $(-1,\ 2)$ で半径が $\sqrt{5}$ の円の内側を表す．



【例題：y と $f(x)$ の大小関係がつくる領域】

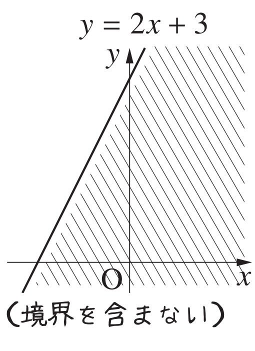
点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が次の不等式を満たすとき，点 P が満たす領域を図示せよ．

(1) $y < 2x+3$　(2) $y \geqq 2x+3$　(3) $y \leqq x^2$　(4) $y > x^2$

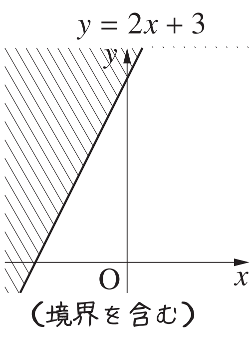
【解答】

(1), (2) は直線 $y=2x+3$ が，(3), (4) は放物線 $y=x^2$ が境界になる．

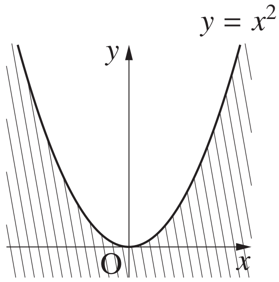
(1)



(2)

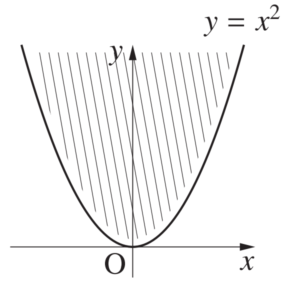


(3)



（境界を含む）

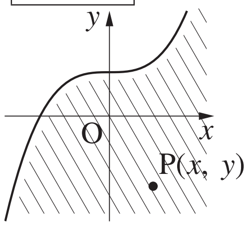
(4)



（境界を含まない）

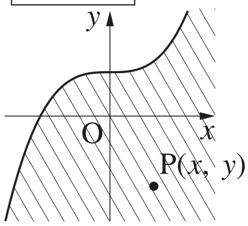
y と $f(x)$ による大小関係をまとめると，下図のようになる．

$\boxed{y < f(x)}$



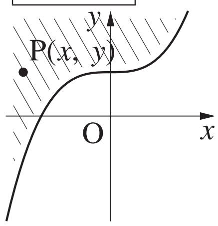
（境界を含まない）

$\boxed{y \leqq f(x)}$



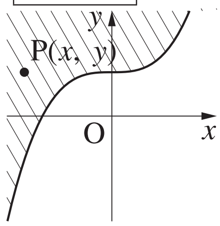
（境界を含む）

$\boxed{y > f(x)}$



（境界を含まない）

$\boxed{y \geqq f(x)}$



（境界を含む）

【例題：いろいろな領域】

(1) 2 つの不等式を同時に満たす領域を，それぞれ図示せよ．

i) $\begin{cases} y < x + 2 \\ y < 2x - 1 \end{cases}$　ii) $\begin{cases} y < x^2 + 1 \\ x + y - 3 > 0 \end{cases}$　iii) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 5 \\ 0 \leqq x - y + 1 \end{cases}$

(2) 領域 $x^2 \leqq y \leqq -3x + 4$ を図示せよ．

(3) 不等式 $(x - y)(x + y - 2) > 0$ を満たす $(x,\ y)$ を座標平面上に図示せよ．

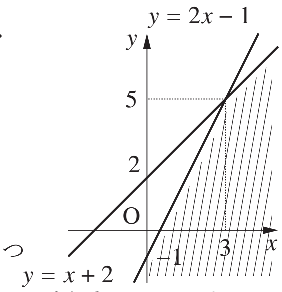
【解答】

(1) (i) 境界は 2 直線 $y = x+2$, $y = 2x-1$ であり，2 直線の交点は $(3,\ 5)$ と求められる．

求める領域は

- 直線 $y = x + 2$ より下部
- 直線 $y = 2x - 1$ より下部

であり境界を含まない．よって，右図のようになる．



（境界を含まない）

◀連立方程式 $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ を解いた．$y = x + 2$ を $y = 2x - 1$ に代入して

$$x + 2 = 2x - 1 \quad \therefore \quad x = 3$$

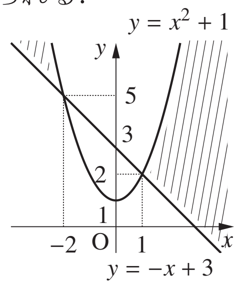
となり，これを $y = x + 2$ に代入すればよい．

(ii) 境界は放物線 $y = x^2 + 1$ と直線 $x + y - 3 = 0$ であり，交点は $(-2,\ 5)$, $(1,\ 2)$ と求められる．

$x + y - 3 > 0$ は $y > -x + 3$ と変形できるので，求める領域は

- 放物線 $y = x^2 + 1$ より下部
- 直線 $y = -x + 3$ より上部

であり境界を含まない．よって，右図のようになる．



（境界を含まない）

◀連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ を解いた．$x+y-3 = 0$ に $y = x^2+1$ を代入して

$$x + (x^2 + 1) - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2 + x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (x + 2)(x - 1) = 0$$

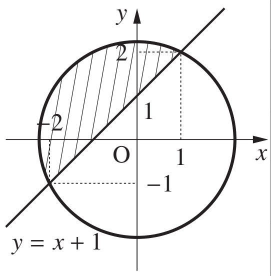
より $x = -2,\ 1$ となるので，それぞれ $y = x^2 + 1$ に代入すればよい．

(iii) 境界は円 $x^2+y^2=5$，直線 $x-y+1=0$ であり，交点は $(1,\ 2)$, $(-2,-1)$ と求められる．

$0 \leqq x-y+1$ は $y \leqq x+1$ と変形できるので，求める領域は

- 円 $x^2+y^2=5$ の内側
- 直線 $y=x+1$ より下部

であり境界を含む．よって，右図のようになる．



（境界を含む）

◀ 連立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ を解いた．$x=y-1$ を $x^2+y^2=5$ に代入して

$$(y-1)^2+y^2=5$$
$$\Leftrightarrow\ 2y^2-2y-4=0$$
$$\Leftrightarrow\ (y-2)(y+1)=0$$

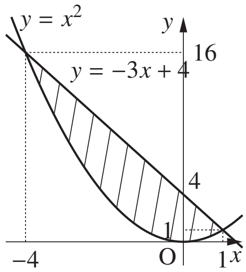
から $y=2,-1$ となり，これを $y=x-1$ に代入すればよい．

(2) 求める領域は $x^2 \leqq y$ かつ $y \leqq -3x+4$ を満たせばよい．つまり

- 放物線 $y=x^2$ より下部
- 直線 $y=-3x+4$ より上部

であり境界を含む．

境界は放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-3x+4$ であり，交点は $(1,\ 1)$, $(-4,\ 16)$ となる．よって，右図のようになる．



（境界を含む）

◀ 連立方程式 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=-3x+4 \end{cases}$ を解けばよい．y を消去して $x^2=-3x+4$，これを解いて $x=-4,\ 1$．

(3) 不等式 $(x-y)(x+y-2)>0$ が成り立つには

$$\begin{cases} x-y>0 \\ x+y-2>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x-y<0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$$

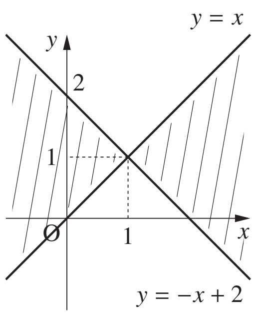
が成立することである．それぞれ変形すると

$$\begin{cases} y<x \\ y>-x+2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y>x \\ y<-x+2 \end{cases}$$

が成立すればよいと分かり，どちらの領域も $y=x$ と $y=-x+2$ を境界とし，その交点は $(1,\ 1)$ となる．

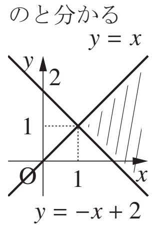
よって求める領域は右図のように図示できる．

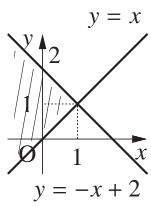
◀ 2 つの式を掛けて正になるための必要十分条件は，どちらも正か，どちらも負になることである



（境界を含まない）

◀ それぞれ図示すれば，次の 2 つのどちらかを満たす領域が求めるものと分かる





■領域を利用した証明

FTEXT数学 A の『論理と集合』で学んだように，一般に 2 つの条件 p，q について，条件 p の真理集合（条件 p を満たすもの全体の集合）を P，条件 q の真理集合を Q とすると

「$p\ \Rightarrow\ q$ が真である」$\Longrightarrow\ P \subseteqq Q$

であった．

条件 p，q が x，y の不等式で表される場合に，このことをもちいて，$p\ \Rightarrow\ q$ が真であることを証明してみよう．

【例題：領域を利用した証明】

$(x-1)^2+y^2 \leqq 5$ ならば $x^2+(y+2)^2 \leqq 20$ であることを証明せよ. .

【解答】

連立方程式

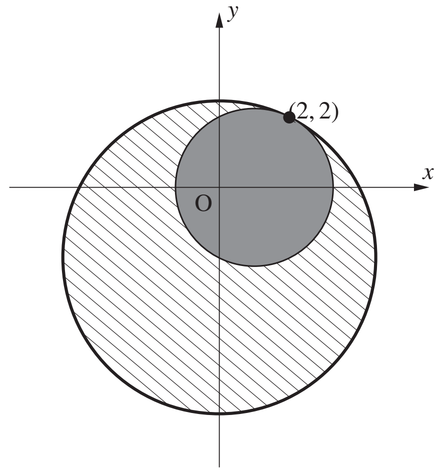
$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=5 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x^2+(y+2)^2=20 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を解くと $x=6-2y$ なので，これを①に代入すると

$$(6-2y-1)^2+y^2=5$$
$$\Leftrightarrow\ 25-20y+4y^2+y^2=5$$
$$\Leftrightarrow\ (y-2)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\ y=2$$

$y=2$ を $x=6-2y$ に代入すると $x=2$ であり，解が 1 つに定まるので，2 円は $(2,2)$ でお互いに接している．これをもとにそれぞれの領域を描くと，右図のようになる．

$(x-1)^2+y^2 \leqq 5$ を満たす領域は全て $x^2+(y+2)^2 \leqq 20$ を満たす領域に含まれるので，題意は証明された． ■



2.4.4　多変数関数の最大最小

ここでは，2 変数関数 $f(x, y)$ の最大値や最小値を求める 2 通りの方法についてみていこう．

■条件を逆にたどる方法

p.**??**で学んだ，条件を逆にたどる方法は，軌跡を求めるだけでなく，2 変数関数の最大値や最小値を求めるときにも有効である．そのことを次の例題で確認しよう．

【例題：2 変数関数の最大最小〜その 1 〜】

x，y が次の 4 つの不等式を満たすとき，次の問いに答えよ．

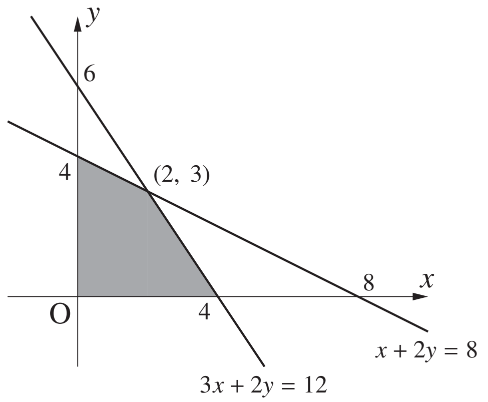
$$x \geqq 0\,,\ y \geqq 0\,,\ x+2y \leqq 8\,,\ 3x+2y \leqq 12$$

(1) 4 つの不等式の表す領域 D を図示せよ．

(2) $f(x, y)=x+y$ の最大値と最小値およびそのときの x と y の値を求めよ．

【解答】

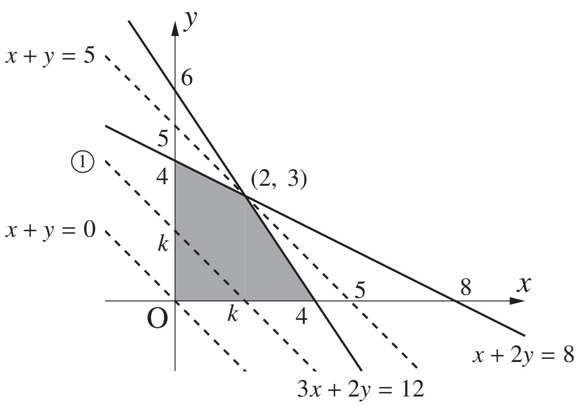
(1) 領域を図示すると下のようになる．



(2) $x + y = k$　……… ① とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k の直線を表す．この直線①が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい．

◀ なぜこのような操作を行うかについては下の本文参照

下図より，k の値は①が点 $(2,\ 3)$ を通るとき最大となり，原点 O を通るとき最小となる．



よって，$f(x,\ y)$ は

$x = 2$，$y = 3$ のとき，**最大値5**

$x = 0$，$y = 0$ のとき，**最小値0**

上の例題での 2 変数関数 $f(x,\ y)$ の値の決まり方は，問題文をそのままに読めば，まず不等式の領域 D が決まり，その領域内の $(x,\ y)$ を代入して $f(x,\ y)$ が決まるという順序になっている．しかし，このような理解では，領域 D 内の無数の点に対して $f(x,\ y)$ を求めなければならなくなる．

そこで，p.**??**で学んだ方法と同じように，考え方の順序を逆にして，ある値 k を考えてみて，$f(x,\ y)$ がその値をとるかどうか調べるという方法をとる．

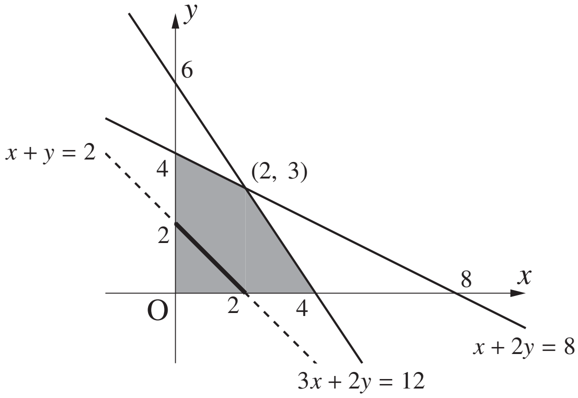
たとえば，$f(x,\ y)$ が 2 をとるかどうかを調べてみよう．$f(x,\ y) = 3$ が成り立つためには

$$x + y = 2$$

を満たさなくてはならない．この関係を満たす x，y は，直線 $y = -x + 2$ 上にあるので，この直線が領域 D と共有点をもてば，その点の座標 $(x,\ y)$ を $f(x,\ y)$ に代入することに

よって $f(x,\ y)$ は 2 をとる．

下の図は領域 D と直線 $y = -x + 2$ を重ねたものである．この図の太線部分の $(x,\ y)$ を代入することにより $f(x,\ y) = 2$ となる．



このような作業を具体的な値ではなく，ある値 k で行うことにより，直線 $x + y = k$ が領域 D と共有点をもつ範囲を調べることで，最大値や最小値を求めることができる．

■1 変数に帰着させる方法

2 変数関数の最大値や最小値を求めるときには，まず片方の変数をとりあえず定数として固定し，1 変数の問題として最大値と最小値を求めておき，次に固定していた変数を動かし全体の最大値と最小値を求める，という方法もある[*6]．

それを次の例題で確認しよう．

【例題：2 変数関数の最大最小〜その２〜】

2 変数関数

$$f(x,\ y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 4y + 7$$

の最小値を求めよ．

【解答】

まず，k を定数として $y = k$ の場合について考える．

$$\begin{aligned} f(x,\ k) &= x^2 - 2xk + 2k^2 - 2x + 4k + 7 \\ &= x^2 - 2(k+1)x + 2k^2 + 4k + 7 \\ &= \{x - (k+1)\}^2 - (k+1)^2 + 2k^2 + 4k + 7 \\ &= \{x - (k+1)\}^2 + k^2 + 2k + 6 \end{aligned}$$

◀ 変数は x だけの 2 次関数である

となるから，$x = k + 1$ のとき，最小値 $k^2 + 2k + 6$ をとる．

◀ 「予選」

次に，k を変数 y とするとき，$y^2 + 2y + 6 = (y + 1)^2 + 5$

*6 予選決勝法という俗称もある

であるから $y=-1$ $(x=0)$ で最小値 **5** となる.

◀「決勝」

x を定数と考えるということがわかっていれば，$x=k$ と書き換える必要はなく

$$\begin{aligned} f(x,\ y) &= x^2-2xy+2y^2-2x+4y+7 \\ &= x^2-2(y+1)x+2y^2+4y+7 \\ &= \{x-(y+1)\}^2-(y+1)^2+2y^2+4y+7 \\ &= \{x-(y+1)\}^2+y^2+2y+6 \\ &= \{x-(y+1)\}^2+(y+1)^2+5 \end{aligned}$$

として最小値 5 を求めてもよい.