目次

凡例

1. 影付きの四角

これは，数学の定義(約束事)や定理(導かれた大切な話)をまとめるために使われています．書いてあることを理解するだけでなく，後で参照されることが多いので覚えてしまうことが大切です.

《例》

有理数

整数 a と 0 でない整数 b によって $\dfrac{a}{b}$ の形で表せる数を，**有理数**という.

2. 例題

本文に書かれた内容の理解を助けるため，例題があります．簡単な計算問題から骨のある問題まで，さまざまな問題が用意してあります．どの例題も次のステップに進むのに重要な鍵となっていますので，理解してから先に進むように心がけてください．すべての例題にはタイトルが付いています．例題を解き終えた後，皆さんが身に付けた知識が，その例題のタイトル通りのものか確認してみてください.

《例》

【例題：数の分類】

次の実数について，以下の問に答えよ.

3，-2，0，$\dfrac{2}{5}$，$-\dfrac{2}{5}$，$\sqrt{3}$，$1.\dot{5}\dot{2}$，$\dfrac{36}{6}$，$-\sqrt{16}$，$\left(\sqrt{5}\right)^2$，π^2

(1) 自然数を選べ.　(2) 整数を選べ.　(3) 有理数を選べ.　(4) 無理数を選べ.

3. 暗記例題

上の例題の中には，数学の根っこを支えるような重要なものもあります．これらの例題は，理解するだけでは不十分で，その解答に用いられた論法も大切なものです．このような例題は，問題ごと覚えてしまう気持ちで取り組みましょう． 暗記マークのついた例題は，記憶することまで意識してください．

《例》

【暗記：$\sqrt{2}$ は有理数ではないことの証明】

$\sqrt{2}$ が有理数でないことを証明せよ．

4. 補足

本文中，ところどころに ・・・・ マーク付きの文章があります．このマークのついた文章は，知識を理解するためのポイントや，知識の覚え方などが書かれています．世の中には，難しいことでもすぐに覚えられる人や，一度覚えたことを忘れずにずっと覚えていられる人がいます．このマーク付いた文章をうまく利用することによって，このような人たちと同じような振る舞いができるようになります．試してみてください．

ギリシア文字の読み方

英語	読み方	大文字	小文字	英語	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	beta	ベータ	B	β
gamma	ガンマ	Γ	γ	delta	デルタ	Δ	δ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	zeta	ゼータ	Z	ζ
eta	イータ	H	η	theta	シータ	Θ	θ, ϑ
iota	イオタ	I	ι	kappa	カッパ	K	κ
lambda	ラムダ	Λ	λ	mu	ムー	M	μ
nu	ヌー	N	ν	omicron	オミクロン	O	o
xi	クシー	Ξ	ξ	pi	パイ	Π	π, ϖ
rho	ロー	P	ρ, ϱ	sigma	シグマ	Σ	σ, ς
tau	タウ	T	τ	upsilon	ユプシロン	Υ	υ
phi	ファイ	Φ	ϕ, φ	chi	カイ	X	χ
psi	プシー	Ψ	ψ	omega	オメガ	Ω	ω

第 1 章

式と証明

§ 1.1

等式の証明

式 $2x + y$ と $x + y + x$ は形は違えども，x や y がどのような値をとっても式の値は等しくなる．このように式の形が異なっていても，その値は同じになるとうことを示すには，証明というステップを踏む必要がある．以下では，ある式とある式が等しいことを示す，『等式の証明』に関して考えていこう．

1.1.1　恒等式

■多項式とは何であったか

FTEXT数学 I で学んだように，いくつかの単項式の和や差として表される式を**多項式** (polynomial) といった．たとえば，$4x^2-3x+5$ は，x の 2 次多項式である．この式の x にはさまざまに変化する値が代入されると想定されるが，このような x を**変数** (variable) と呼ぶ．それに対して，この式の 4 や -3 や 5 のように，一定の値のまま変化しないものを**定数** (constant) と呼ぶ.

これらの言葉をつかうと，定数 a_0，a_1，$\cdots$，a_n を係数とする変数 x の式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

を x の多項式と定義できる．

■多項式の相等

$2 + 3 = 5$ という等式は，$2 + 3$ という数が 5 という数と等しいという，関係を表したものである．この例は数の関係を表したものであるが，関係はなにも数に限ったことではなく，多項式についても同様に関係を表すことができる．多項式と多項式の関係の 1 つである，多項式の相等を以下に定義しておこう．

多項式の相等

2 つの n 次多項式 $f(x)$，$g(x)$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

において，すべての係数が等しい，すなわち

$$a_n = b_n\ ,\ a_{n-1} = b_{n-1}\ ,\ \cdots\ ,\ a_1 = b_1\ ,\ a_0 = b_0$$

が成り立つとき，$f(x)$ と $g(x)$ は多項式として等しいという．

たとえば，多項式 $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$ と多項式 $g(x) = 3x^2 - 4x + 7$ は，すべての係数が等しいので，多項式として等しいといえる．しかし，多項式 $h(x) = 3x^2 - 5x + 7$ は，すべての係数が等しいわけではないので，多項式として等しいとはいえない．

■恒等式とは何か

式 $x^2 = -x + 2$ は $x = 1$ または $x = -2$ のとき成り立つ等式である．このように，特別な値を入れたときだけ成り立つ等式を**方程式** (equation) という．

これに対して，式 $x^2 - x = x(x - 1)$ のように，x にどのような値を代入しても成り立つ等式のことを**恒等式**（こうとうしき） (identity) である．

値を代入する文字，すなわち変数は 1 つとは限らない．たとえば，$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ は，x，y にどのような値を代入しても成り立つので恒等式と考える．

恒等式の定義

ある等式において，その変数にどのような値を代入しても，常に等式が成り立つとき，その等式をそれらの文字についての**恒等式** (identity) という．

一般に，式の変形によって導かれる等式は，どれも恒等式である．たとえば，$(x-1)(x-3)$ を展開すると $x^2 - 4x + 3$ となるので，等式

$$(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$$

は恒等式である．

【例題：恒等式〜その１〜】

次の等式のうち，恒等式はどれか．

(1) $(x + 3)(x + 1) - 5(x + 1) = (x - 2)(x + 1)$
(2) $(x + y)(x - y) + x^2 + 2x = (x + y)^2$
(3) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{x(x + 1)}$

【解答】

(1) 左辺を展開すると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= x^2+4x+3-5x-5\\
&= x^2-x-2\\
&= (x-2)(x+1) = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

ゆえに，**恒等式である**.

(2) 両辺に，$x=1$，$y=0$ を代入すると

◀ $x=1$，$y=0$ はひとつの例である

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (1+0)(1-0)+1^2+2\cdot 1 = 4\\
(\text{右辺}) &= (1+0)^2 = 1
\end{aligned}
$$

左辺の値と右辺の値が異なるので**恒等式ではない**.

(3) 両辺に，$x=1$ を代入すると

◀ $x=1$ はひとつの例である

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{1}{1}+\frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}\\
(\text{右辺}) &= \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

左辺の値と右辺の値が異なるので**恒等式ではない**.

以上から，恒等式は **(2)** である.

■多項式が恒等的に 0 になる条件

a_0，a_1，a_2 を定数とするとき，等式 $a_2x^2+a_1x+a_0=0$ が x についての恒等式となるのは，係数 a_0，a_1，a_2 にどのような条件が備わっているときなのか調べてみる.

$a_2x^2+a_1x+a_0=0$ が x についての恒等式であるならば，x にどのような値を代入しても，この等式は成り立つので，たとえば，$x=-1$，$x=0$，$x=1$ をそれぞれ代入すると

$$
\begin{cases}
a_2-a_1+a_0=0\\
a_0=0\\
a_2+a_1+a_0=0
\end{cases}
$$

が必要であり，この連立方程式を解くと

$$a_2=a_1=a_0=0$$

となる（下の $\Longrightarrow$ の証明）．逆に，$a_2=a_1=a_0=0$ とすると，等式 $a_2x^2+a_1x+a_0=0$ は明らかに x についての恒等式となる（下の $\Longleftarrow$ の証明）.

以上より，次のことが成り立つ.

「$a_2x^2+a_1x+a_0=0$ が x についての恒等式である」$\Longleftrightarrow a_2=a_1=a_0=0$

この例では 2 次式の等式について考えたが，一般に，同類項を整理した後の多項式について，次のことが成り立つ.

多項式が恒等的に 0 になる条件

多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ において

$$f(x) = 0$$

が恒等式となるのは，$f(x)$ の各項の係数がすべて 0 になる，すなわち

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$$

のときである．

この証明は，付録『多項式が恒等的に 0 になる条件の証明』(p.339) で行う．

…… この証明は，このあと習う知識を必要とし，しかも少々難しいので，初読の際には読み飛ばしてよい．

【暗記：多項式の恒等式】

2 つの n 次の多項式 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

とおく．このとき，等式

$$f(x) = g(x)$$

が恒等式となるのは，$f(x)$ と $g(x)$ が多項式として等しいとき，すなわち

$$a_n = b_n\,,\ a_{n-1} = b_{n-1}\,,\ \cdots\,,\ a_1 = b_1\,,\ a_0 = b_0$$

が成り立つときであることを上の『多項式が恒等的に 0 になる条件』を使い証明せよ．

【解答】

等式 $f(x) = g(x)$ が恒等式であることと，等式 $f(x) - g(x) = 0$ が恒等式であること，すなわち

$$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0 = 0$$

が恒等式となることとは同値である．

◀ このあとすぐに習う『等式の証明』(p.8) の知識を使った

この恒等式が成り立つのは，『多項式が恒等的に 0 になる条件』より

$$a_n - b_n = 0\,,\ a_{n-1} - b_{n-1} = 0\,,\ \cdots\,,\ a_1 - b_1 = 0\,,\ a_0 - b_0 = 0$$

すなわち

$$a_n = b_n\ ,\ a_{n-1} = b_{n-1}\ ,\ \cdots\ ,\ a_1 = b_1\ ,\ a_0 = b_0$$

が成り立つときである. ■

この例題の内容をまとめると，次のようになる.

多項式の相等と恒等式

$f(x)$，$g(x)$ を多項式とするとき

$$f(x) = g(x)$$

が恒等式となるのは，$f(x)$ と $g(x)$ の次数が等しく，両辺の同じ次数の項の係数がそれぞれ等しいとき，すなわち多項式として等しいときである.

このことから，x の多項式 $f(x)$，$g(x)$ についての等式 $f(x) = g(x)$ が恒等式となるための条件として，

i) x に具体的な値を代入して両辺が等しくなる（代入法）
ii) 左右両辺の同じ次数の係数が等しくなっている（係数比較法）

上記のいずれの条件でもよいことがわかる.

以下では，この 2 つを活用して，恒等式を求めてみよう.

【例題：恒等式〜その２〜】

次の等式が恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ.

(1) $x^2 + 3x = ax^2 + bx + c$
(2) $x^2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$
(3) $x^2 = ax(x+1) + b(x-1) + c$
(4) $x^3 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$
(5) $x^3 = ax(x+1)(x+2) + bx(x+1) + cx + d$

【解答】

(1) 両辺の x^2 の係数を比較すると，$\boldsymbol{a = 1}$ である.
両辺の x の係数を比較すると，$\boldsymbol{b = 3}$ である.
両辺の定数項を比較すると，$\boldsymbol{c = 0}$ である.

(2) 両辺の x^2 の係数を比較すると，$\boldsymbol{a = 1}$ である.
$x = 1$ を代入すると

$$1^2 = 1(1-1)^2 + b(1-1) + c$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{c = 1}$$

◀ 右辺には $x - 1$ という形の式があるので，$x = 1$ を代入することで不明な文字が少ない式をたてることができる

また，$x = 0$ を代入すると

$$0^2 = 1(0-1)^2 + b(0-1) + 1$$

◀ 0 以外の数でもかまわないが，一番計算が簡単にできる 0 を使った

$\Leftrightarrow\ 0 = 1 - b + 1$

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{b = 2}$

(3) 両辺の x^2 の係数を比較すると，$\boldsymbol{a = 1}$ である．

$x = 1$ を代入すると

◀ 右辺には $x-1$ という形の式があるので，$x=1$ を代入することで不明な文字が少ない式をたてることができる

$$1^2 = 1\cdot 1(1+1) + b(1-1) + c$$

$\Leftrightarrow\ 2 + c = 1$

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{c = -1}$

また，$x = -1$ を代入すると

◀ 右辺には $x+1$ という形の式があるので，$x=-1$ を代入することで不明な文字が少ない式をたてることができる

$$(-1)^2 = 1(-1)(-1+1) + b(-1-1) - 1$$

$\Leftrightarrow\ -2b - 1 = 1$

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{b = -1}$

(4) 両辺の x^3 の係数を比較すると，$a = \mathbf{1}$ である．

$x = 1$ を代入すると

◀ 右辺には $x-1$ という形の式があるので，$x=1$ を代入することで不明な文字が少ない式をたてることができる

$$1^3 = a(1-1)^3 + b(1-1)^2 + c(1-1) + d$$

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{d = 1}$

右辺を展開すると

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= 1(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + b(x^2 - 2x + 1) \\ &\qquad + cx - c + 1 \\ &= x^3 + (b-3)x^2 + (-2b + c + 3)x - c\end{aligned}$$

x^2 と x の項の係数を比較すると

$$\begin{cases} b - 3 = 0 \\ -2b + c + 3 = 0 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，$\boldsymbol{b = 3}$，$\boldsymbol{c = 3}$ となる．

【別解 :『微分法』(p.**??**) を用いる】

$x = 1$ を代入すると

◀ 右辺には $x-1$ という形の式があるので，$x=1$ を代入することで不明な文字が少ない式をたてることができる

$$1^3 = a(1-1)^3 + b(1-1)^2 + c(1-1) + d$$

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{d = 1}$

与式の両辺を微分すると

$$3x^2 = 3a(x-1)^2 + 2b(x-1) + c \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

これに $x=1$ を代入すると

$$3\cdot 1^2 = 3a(1-1)^2 + 2b(1-1) + c$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{c = 3}$$

◀ 右辺には $x-1$ という形の式があるので，$x=1$ を代入することで不明な文字が少ない式をたてることができる

①の両辺をさらに微分すると

$$6x = 6a(x-1) + 2b \qquad \cdots\cdots ②$$

これに $x=1$ を代入すると

$$6\cdot 1 = 6a(1-1) + 2b$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{b = 3}$$

◀ 右辺には $x-1$ という形の式があるので，$x=1$ を代入することで不明な文字が少ない式をたてることができる

②の両辺をさらに微分すると

$$6 = 6a \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a = 1}$$

(5) 右辺の x^3 の係数は a なので，$\boldsymbol{a=1}$ である．
$x=0$ を代入すると

$$\boldsymbol{d = 0}$$

また，$x=-1$ を代入すると

$$(-1)^3 = 1(-1)(-1+1)(-1+2) + b(-1)(-1+1) + c(-1) + 0$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{c = 1}$$

◀ 右辺には $x+1$ という形の式があるので，$x=-1$ を代入することで不明な文字が少ない式をたてることができる

さらに，$x=-2$ を代入すると

$$(-2)^3 = 1(-2)(-2+1)(-2+2) + b(-2)(-2+1) + 1(-2) + 0$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{b = -3}$$

◀ 右辺には $x+2$ という形の式があるので，$x=-2$ を代入することで不明な文字が少ない式をたてることができる

【例題：恒等式〜その３〜】

k が任意の値をとるとき，常に次の等式が成り立つように，x，y の値を求めよ．

$$(2k-1)x + (k-1)y - k + 3 = 0$$

【解答】

左辺を展開し，k についてまとめると

$$(2x+y-1)k - x - y + 3 = 0$$

これが k がいかなる値でも成り立つのは

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ -x-y+3=0 \end{cases}$$

のとき．

この連立方程式を解くと $\boldsymbol{x=-2}$，$\boldsymbol{y=-5}$ である．

◀ $(2x+y-1)k-x-y+3=0\cdot k+0$ と考えて両辺の係数を比較した

■2 つ以上の変数に関する恒等式

a，b，c，d，e，f を定数とするとき

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

が x，y についての恒等式であるとき，係数にはどのような関係が成り立つのか考えてみる．

まず，左辺を x について整理すると

$$ax^2+(cy+d)x+(by^2+ey+f)=0$$

となるが，まず x についての恒等式であるから，『多項式が恒等的に 0 になる条件』(p.4) より次のことが成り立つ．

$$a=0\,,\ cy+d=0\,,\ by^2+ey+f=0$$

また，これらが y についての恒等式でもあるから，結局得られるのは

$$a=0\,,\ b=0\,,\ c=0\,,\ d=0\,,\ e=0\,,\ f=0$$

となる．

一般に，次にようにまとめることができる．

2 つ以上の文字に関する恒等式

複数の変数に関する等式が恒等式となる条件は，同類項でまとめたあとの各項の係数がすべて 0 になることである．

1.1.2　等式の証明

■等式の証明

恒等式 $A=B$ を証明するには，A か B の一方を変形して，他方を導けばよい．

たとえば

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$$

を証明するには

$$(\text{左辺})=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1$$
$$= x^4 + x^2 + 1 = \text{（右辺）}$$

とすればよい．

しかし，問題によっては $A = B$ と同値である

i) $A = C$ かつ $B = C$
ii) $A - B = 0$

などの等式を証明する方が簡単なときもあるので，適宜使い分ける．

【例題：等式の証明〜その１〜】

以下の等式を証明せよ．

(1) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$
(2) $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac+bd)^2 - (ad+bc)^2$
(3) $(x^3+1)(x^2+x+1) = (x+1)(x^4+x^2+1)$

【解答】

(1) 左辺を展開し整理すると

$$\text{（左辺）} = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)$$
$$= 4xy = \text{（右辺）}$$

となる． ■

(2) 両辺をそれぞれ展開し整理すると

$$\text{（左辺）} = a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2$$
$$\text{（右辺）} = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2)$$
$$= a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2$$

よって，（左辺）＝（右辺）がいえる． ■

◀「$A = C$ かつ $B = C$」ならば「$A = B$」という論法を使った

(3) 左辺を変形して

$$\text{（左辺）} = (x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$
$$= (x+1)\{(x^2+1)^2 - x^2\}$$
$$= (x+1)(x^4 + x^2 + 1) = \text{（右辺）}$$

となる． ■

【例題：等式の証明〜その２〜】

以下の等式を証明せよ．

(1) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2x}{x^2-4}$

(2) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1-xy}{(x+1)(y+1)}+1$

(3) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{x}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{2}{x+3}$

【解答】

(1) 左辺を通分して計算していくと

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{x-2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}\\
&= \frac{x-2+x+2}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x}{x^2-4}=(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

となる． ■

(2) 両辺をそれぞれ通分して計算していくと

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{y+1}{(x+1)(y+1)}+\frac{x+1}{(x+1)(y+1)}\\
&= \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)}\\
(\text{右辺}) &= \frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}+\frac{(x+1)(y+1)}{(x+1)(y+1)}\\
&= \frac{1-xy+xy+x+y+1}{(x+1)(y+1)}\\
&= \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)}
\end{aligned}
$$

よって，(左辺) = (右辺) がいえる． ■

(3) 左辺を通分して計算していくと

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{2x+6}{(x+2)(x+3)}-\frac{x+2}{(x+2)(x+3)}\\
&\qquad +\frac{x}{(x+2)(x+3)}\\
&= \frac{2x+4}{(x+2)(x+3)}\\
&= \frac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{2}{x+3}=(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

となる． ■

■条件つきの等式の証明

等式の中には，恒等式ではないが，ある条件のもとではつねに成り立つ等式がある．

たとえば，$a^2 - 2b^2 = ab$ は『恒等式』(p.2) ではない（$a = b = 1$ を考えてみよ）．しかし，$a + b = 0$ という条件の下では常に成り立つ．これを証明するには，条件 $a + b = 0$ から $b = -a$ が成り立つことを利用して

（左辺）$= a^2 - 2(-a)^2 = -a^2$

（右辺）$= a(-a) = -a^2$

より，（左辺）=（右辺）とすればよい．

一般に，ある条件のもとで成り立つ等式を証明するには，その条件式を証明すべき式に代入すればよい．そのことを次の例題で学んでいこう．

【例題：条件つきの等式の証明〜その１〜】

次の等式を証明せよ．

(1) $a + b = 0$ のとき，$ab + a^2 = 0$

(2) $a + b = 0$ のとき，$a^2 - 2b^2 = ab$

(3) $x + y = 1$ のとき，$x^2 + y^2 + 1 = 2(x + y - xy)$

【解答】

(1) 左辺を変形すると

（左辺）$= a(a + b) = 0$　◀ $a + b = 0$ を使った

よって，（左辺）=（右辺）がいえる．■

(2) $a + b = 0$ より，$b = -a$ なので

（左辺）$= a^2 - 2(-a)^2 = -a^2$　◀ $b = -a$ を使った

（右辺）$= a(-a) = -a^2$

よって，（左辺）=（右辺）がいえる．■

(3) $x + y = 1$ より，$y = 1 - x$ なので

（左辺）$= x^2 + (1 - x)^2 + 1$　◀ $y = 1 - x$ を使った

$= x^2 + 1 - 2x + x^2 + 1 = 2(x^2 - x + 1)$

（右辺）$= 2\{x + (1 - x) - x(1 - x)\}$　◀ $y = 1 - x$ を使った

$= 2(x + 1 - x - x + x^2) = 2(x^2 - x + 1)$

よって，（左辺）=（右辺）がいえる．■

【例題：条件つきの等式の証明〜その２〜】

次の等式を証明せよ．

(1) $xy = 1$ のとき，$\left(x + \dfrac{1}{y}\right)\left(y + \dfrac{1}{x}\right) = 4$

(2) $x + \dfrac{1}{x} = 3$ のとき，$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$

(3) $xyz = 1$ のとき，$\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} = x + y + z$

【解答】

(1) $xy = 1$ より，$x \neq 0$ であるから，$y = \dfrac{1}{x}$ と変形できる．これを左辺にもちいると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (x + x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)\\ &= 2x \cdot \frac{2}{x}\\ &= 4 = (\text{右辺})\end{aligned}$$

となる．■

(2) $x + \dfrac{1}{x} = 3$ を左辺にもちいると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}\\ &= 3^2 - 2 = 7\end{aligned}$$

◀ $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ という変形を使った

◀ $x + \dfrac{1}{x} = 3$ を使った

より，(左辺) = (右辺) である．■

(3) $xyz = 1$ より，$z = \dfrac{1}{xy}$ なので

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{1}{xy} + \frac{1}{y \cdot \frac{1}{xy}} + \frac{1}{\frac{1}{xy} \cdot x}\\ &= \frac{1}{xy} + x + y\\ &= x + y + z = (\text{右辺})\end{aligned}$$

◀ $z = \dfrac{1}{xy}$ を使った

となる．■

■比例式を条件にもつ等式の証明

$a : b = x : y$ の定義は $bx = ay$ である．特に x，y が 0 でないとき，$\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ と変形できる．この $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ のように，比の値が等しいことを示す式を**比例式** (proportional expression) という．

比例式を条件とする場合には，比の値を k，すなわち $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = k$ などとおき，$a = xk$

かつ $b = yk$ の形で利用すると計算しやすい．

また

$a : b : c = x : y : z$

を, a, b, c の**連比** (continued ratio) といい, $a : b = x : y$ かつ $b : c = y : z$ かつ $c : a = z : x$, すなわち

$bx = ay$ かつ $cy = bz$ かつ $az = cx$

と定義する．こちらの場合も，x，y，z が 0 でないとき，$\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$ と変形できる．

【例題：比例式を条件にもつ等式の証明】

0 でない実数 a, b, c, d, x, y, z において，次の等式を証明せよ．

(1) $a : b = c : d$ のとき，$\dfrac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \left(\dfrac{b}{d}\right)^2$

(2) $a : b = c : d$ のとき，$\dfrac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \dfrac{ac}{bd}$

(3) $a : b : c = x : y : z$ のとき，$\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{ab + bc + ca}{xy + yz + zx}$

【解答】

(1) $a = ck$，$b = dk$ とおくと　◀ 比例式の利用

$$(\text{左辺}) = \frac{c^2k^2 + d^2k^2}{c^2 + d^2} = \frac{k^2(c^2 + d^2)}{c^2 + d^2} = k^2$$

◀ $a = ck$，$b = dk$ を使った

$$(\text{右辺}) = \frac{d^2k^2}{d^2} = k^2$$

より，(左辺) = (右辺) である．■

(2) $a = ck$，$b = dk$ とおくと　◀ 比例式の利用

$$(\text{左辺}) = \frac{c^2k^2 + c^2}{d^2k^2 + d^2} = \frac{c^2(k^2 + 1)}{d^2(k^2 + 1)} = \frac{c^2}{d^2}$$

◀ $a = ck$，$b = dk$ を使った

$$(\text{右辺}) = \frac{c^2k}{d^2k} = \frac{c^2}{d^2}$$

◀ $a = ck$，$b = dk$ を使った

より，(左辺) = (右辺) である．■

(3) $a = xk$，$b = yk$，$c = zk$ とおくと　◀ 比例式の利用

$$(\text{左辺}) = \frac{x^2k^2 + y^2k^2 + z^2k^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

◀ $a = xk$，$b = yk$，$c = zk$ を使った

$$= \frac{k^2(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} = k^2$$

$$（右辺）= \frac{xyk^2+yzk^2+xzk^2}{xy+yz+zx}$$

◀ $a = xk$, $b = yk$, $c = zk$ を使った

$$= \frac{k^2(xy+yz+xz)}{xy+yz+zx} = k^2$$

より，（左辺）=（右辺）である． ■

1.1.3　対称式

■対称式の定義

次の 6 つの式

1) $x+y$	2) xy	3) x^2+y^2
4) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$	5) $2x^3+3y^2$	6) $\frac{2}{x}+\frac{y}{2}$

において，各式の中の x と y を入れ換えてみると

1)' $y+x$	2)' yx	3)' y^2+x^2
4)' $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$	5)' $2y^3+3x^2$	6)' $\frac{2}{y}+\frac{x}{2}$

となる．

ここで，式 1)'～4)' はそれぞれ元の式 1)～4) と恒等的に等しく，5)' と 6)' はそれぞれ元の 5)，6) と等しくない．

このように，文字を入れ換えても，式が変わるものと変わらないものとがあり，変わらないものを対称式という．

対称式の定義

式の中の文字 x，y を入れ換えても，同じ式となる式のことを，その文字に関する**対称式** (symmetric expression) という．
対称式の中でも特に

$x+y$，xy

を，**基本対称式** (elementary symmetric expression) という．

■対称式の基本定理

証明は高校の程度を越えるが，一般に次のことが知られている．

対称式の基本定理

すべての対称式は，基本対称式の和，差，積，商の組合せで表すことができる．

【例題：対称式を基本対称式の組合せで表す】

$x+y=A$，$xy=B$ とするとき，次の各式を A，B を用いて表せ.

(1) x^2+y^2　(2) x^3+y^3+x+y　(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$　(4) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}&x^2+y^2\\&=(x+y)^2-2xy\\&=\boldsymbol{A^2-2B}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&x^3+y^3+x+y\\&=(x+y)^3-3xy(x+y)+(x+y)\\&=\boldsymbol{A^3-3AB+A}\end{aligned}$$

◀ $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ を利用した

(3)
$$\begin{aligned}&\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\\&=\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}\\&=\frac{x+y}{xy}\\&=\boldsymbol{\frac{A}{B}}\end{aligned}$$

◀ 通分した

(4)
$$\begin{aligned}&\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\\&=\frac{y^2}{xy}+\frac{x^2}{xy}\\&=\frac{x^2+y^2}{xy}\\&=\boldsymbol{\frac{A^2-2B}{B}}\end{aligned}$$

◀ 通分した

◀ (1) が使える形にした

§ 1.2

不等式の証明

前の章では等式の証明について考えてきたが，この章では不等式の証明について考えていく．

1.2.1　不等式の証明の基本

■不等式の性質

FTEXT 数学 I で学んだように，2 つの実数 a，b の間には

$a > b$，$a = b$，$a < b$

のうち，いずれか 1 つの関係が成り立ち，特に不等式には次のような性質があった．

不等式の性質

i)	すべての実数 c に対して	$a > b \iff$	$a + c > b + c$	，$a - c > b - c$
ii)	$0 < c$ に対して	$a > b \iff$	$ac > bc$	，$\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$
iii)	$c < 0$ に対して	$a > b \iff$	$ac < bc$	，$\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

■不等式の証明の基本

不等式 $A > B$ を証明するには，A がだんだん小さくなるように変形していって，それでもなお B より大きいことを示せばよい．たとえば，$\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2} > x^2 + 1$ を示すには

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sqrt{x^4 + 2x^2 + 2} \\
&> \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} \qquad \leftarrow \text{根号の中の値が 1 だけ小さくなっている} \\
&= \sqrt{(x^2 + 1)^2} \\
&= x^2 + 1 = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

とすればよい．

しかし，一般には $A > B$ と同値である $A - B > 0$ を示すことの方が簡単なことが多い．そのため，このテキストでも適宜 $A - B > 0$ を示す方法を利用する．

不等式の証明

不等式 $A > B$ を証明するには，それと同値の内容である，$A - B > 0$ を示せばよい．

なお $A > B \Rightarrow A \geqq B$ であるため，$A \geqq B$ を証明するには $A > B$ をいえば十分である．

【例題：不等式の証明〜その１〜】

次の不等式を証明せよ．

(1) $a > 1$，$b > 1$ ならば，$ab + 1 > a + b$

(2) $a > c$，$b > d$ ならば，$ab + cd > ad + bc$

【解答】

(1)（左辺）$-$（右辺）を計算すると

$$\begin{aligned} & ab + 1 - (a + b) \\ =& a(b - 1) - (b - 1) \\ =& (a - 1)(b - 1) \end{aligned}$$

$a > 1$，$b > 1$ より，$a - 1 > 0$，$b - 1 > 0$ だから，$(a - 1)(b - 1) > 0$ が成り立つ．

以上より，$ab + 1 > a + b$ が証明された．■

(2)（左辺）$-$（右辺）を計算すると

$$\begin{aligned} & (ab + cd) - (ad + bc) \\ =& a(b - d) - c(b - d) \\ =& (a - c)(b - d) \end{aligned}$$

$a > c$，$b > d$ より，$a - c > 0$，$b - d > 0$ だから，$(a - c)(b - d) > 0$ が成り立つ．

以上より，$ab + cd > ad + bc$ が証明された．■

■平方による比較

$a > 0$ かつ $b > 0$ のとき，$a + b > 0$ で

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

であるから，$a - b$ の符号と $a^2 - b^2$ の符号は同じものになり次のことがいえる．

平方による比較

$a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$ のとき

$a > b \iff a^2 > b^2$

が成り立つ[a]．

[a] $a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$ のとき，$a = b \iff a^2 = b^2$ だから，上の不等式とあわせて $a \geqq b \iff a^2 \geqq b^2$ も成り立つ．

このことから，2 つの数 a，b がともに 0 以上のときには，$a > b$ が成り立つことを証明する代わりに，$a^2 > b^2$ が成り立つことを証明すればよいことがわかる．この論法は，次の例題でみるように，根号を含む不等式の変形の際に活躍する．

【例題：平方による比較】

次の不等式を証明せよ．等号のあるものについては，等号が成り立つ場合を調べよ．

(1) $a > 0$ かつ $b > 0$ のとき $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ を証明せよ．

(2) $a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$ のとき，$3\sqrt{a} + 2\sqrt{b} \geqq \sqrt{9a+4b}$ を証明せよ．

【解答】

(1) $\sqrt{a} + \sqrt{b}\ (>0) \geqq 0$，$\sqrt{a+b}\ (>0) \geqq 0$ なので，(左辺)^2 > (右辺)^2 を示せばよい．

◀『平方による比較』(p.17)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= a + 2\sqrt{ab} + b - (a+b) \\
&= 2\sqrt{ab} > 0
\end{aligned}
$$

よって，(左辺) > (右辺) が証明された．■

(2) $3\sqrt{a} + 2\sqrt{b} \geqq 0$，$\sqrt{9a+4b} \geqq 0$ なので，(左辺)$^2 \geqq$ (右辺)^2 を示せばよい．

◀『平方による比較』(p.17)

$$
\begin{aligned}
&(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 \\
&= \left(3\sqrt{a} + 2\sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{9a+4b}\right)^2 \\
&= 9a + 12\sqrt{ab} + 4b - (9a+4b) \\
&= 12\sqrt{ab} \geqq 0
\end{aligned}
$$

(左辺) $\geqq$ (右辺) が証明された．■

特に，等号が成立するのは，$12\sqrt{ab} = 0$，すなわち $a = 0$ または $b = 0$ のときである．

さきほども述べたように，不等式 $A \geqq B$ を証明する基本は，それと同値の内容の $A - B \geqq 0$ を証明することである．ある値が 0 以上になることをいうには，一般にはいろいろな方法があるが，次の節から扱う有名な不等式を利用することが多い．

1.2.2　実数の平方

■実数の平方

『不等式の性質』(p.16) より，$a > 0$ のとき $a^2 > 0$，$a < 0$ のとき $a^2 > 0$ である．また，$a = 0$ のときは $a^2 = 0$ であるから，次の不等式が成り立つ．

実数の平方

a が実数のとき，$a^2 \geqq 0$ が成り立つ．等号が成り立つのは $a = 0$ のときに限る．

この性質は，2 次関数などですでに何度も使われているが，ここであらためて確認しておく．

【例題：実数の平方を利用した不等式の証明】

次の不等式を証明せよ．等号のあるものについては，等号が成り立つ場合を調べよ．

(1) $(x+y)^2-2xy \geqq x^2-y^2$

(2) $x^3>y^3$ のとき，$x>y$

(3) $x \geqq y \geqq 0$ のとき，$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq \sqrt{2(x+y)}$

【解答】

(1) （左辺）－（右辺）を計算すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= (x+y)^2-2xy-(x^2-y^2)\\ &= (x^2+y^2+2xy)-2xy-x^2+y^2\\ &= 2y^2 \geqq 0\end{aligned}$$

◀『実数の平方』(p.18)

より，（左辺）≧（右辺）である． ■

また，等号が成立するのは，$2y^2=0$，すなわち $y=0$ のときである．

(2) 条件式の（左辺）－（右辺）を計算すると

$$\begin{aligned}&x^3-y^3>0\\ \Leftrightarrow\ &(x-y)(x^2+xy+y^2)>0\\ \Leftrightarrow\ &(x-y)\left\{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}+y^2\right\}>0\\ \Leftrightarrow\ &(x-y)\left\{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right\}>0 \qquad \cdots\cdots①\end{aligned}$$

◀平方完成をした

$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4} \geqq 0$ であるが，$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}=0$ のときは，①が成り立たないので，$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}>0$ である．

◀『実数の平方』(p.18)

よって，①より $x-y>0$，すなわち $x>y$． ■

(3) （右辺）$\geqq 0$，（左辺）$\geqq 0$ なので，（右辺）$^2-$（左辺）$^2 \geqq 0$ を証明すればよい．

◀『平方による比較』(p.17) を考える

$$\begin{aligned}(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2 &= \left(\sqrt{2(x+y)}\right)^2-\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\\ &= 2(x+y)-(x+2\sqrt{xy}+y)\\ &= x+y-2\sqrt{xy}\\ &= (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqq 0\end{aligned}$$

◀『実数の平方』(p.18)

であるので，（右辺）^{2} ≧（左辺）^{2} であり，（右辺）≧（左辺）である． ■

また，等号が成立するのは，$\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$，すなわち
$x=y$ のときである．

1.2.3　相加平均と相乗平均

■相加平均とは何か

日常では，たとえば数学のテストが 60 点，英語のテストが 80 点だったとすると，足して 2 で割る，すなわち次の計算

$$\frac{60+80}{2}=70\ 点$$

によって平均点を出す．

また，3 教科の場合，たとえば数学のテストが 60 点，英語のテストが 80 点，国語のテストが 40 点だったとすると

$$\frac{60+80+40}{3}=60$$

という計算によって，平均点 60 点を出す．

このような，平均のとり方を相加平均といい，一般には次のようにまとめられる．

相加平均

n 個の 0 以上の数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ において

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

を，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の**相加平均** (artithmetic mean) という．
特に，$n=2$ のとき $\dfrac{a_1+a_2}{2}$ であり，$n=3$ のとき $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$ である．

【例題：相加平均】

次の値の相加平均を求めよ．

(1) 24，56　(2) $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$　(3) $\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{5}{4}$　(4) 1，$\sqrt{3}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

【解答】

(1) $\dfrac{24+56}{2}=\dfrac{80}{2}=\mathbf{40}$

(2) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{\frac{5}{6}}{2}=\mathbf{\dfrac{5}{12}}$

(3) $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{4}}{3}=\dfrac{\frac{18+4+15}{12}}{3}=\dfrac{\frac{37}{12}}{3}=\mathbf{\dfrac{37}{36}}$

(4) $1+\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{3+3\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}$ より，
$\mathbf{\dfrac{3+3\sqrt{3}+\sqrt{2}}{9}}$

■数学での平均の考え方

「平均」とは「平(たい)らに均(なら)す」ということであるが，数学では次のように定義する．

平均の定義

> 2 つの数 a_1，a_2 において
>
> 1) a_1 と a_2 を使った計算で求められるものであり
> 2) 必ず a_1 と a_2 の間の数として求められるもの
>
> を a_1，a_2 の**平均** (mean) という．

たとえば，a_1，a_2 を $0 \leqq a_1 \leqq a_2$ を満たす数として，その相加平均 $\dfrac{a_1+a_2}{2}$ を考えると，『不等式の性質』(p.16) より

$$a_1 + a_1 \leqq a_1 + a_2 \ , \quad a_1 + a_2 \leqq a_2 + a_2$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} & a_1 + a_1 \leqq a_1 + a_2 \leqq a_2 + a_2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a_1+a_1}{2} \leqq \frac{a_1+a_2}{2} \leqq \frac{a_2+a_2}{2} \\ \Leftrightarrow\ & a_1 \leqq \frac{a_1+a_2}{2} \leqq a_2 \end{aligned}$$

つまり，a_1 と a_2 の相加平均 $\dfrac{a_1+a_2}{2}$ は，それら 2 つの数の間にあることが示され，数学で使う平均であることがわかる．

3 つ以上の数についての平均は

1) それら 3 つ以上の数を使った計算で求められるものであり
2) 必ずそれらのうちの最も大きいものと最も小さいものの間の数として求められるもの

として考える．

■相乗平均とは何か

2 つの 0 以上の数 a_1，a_2 について，a_1 と a_2 をかけて平方根をとった値，すなわち $\sqrt{a_1a_2}$ は，a_1 と a_2 の『平均』になっている．以下でそのことを確かめてみよう．

a_1，a_2 を $0 \leqq a_1 \leqq a_2$ を満たす数とすると，『不等式の性質』(p.16) より

$$a_1 \cdot a_1 \leqq a_1 \cdot a_2 \ , \quad a_1 \cdot a_2 \leqq a_2 \cdot a_2$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} & a_1 \cdot a_1 \leqq a_1 \cdot a_2 \leqq a_2 \cdot a_2 \\ \therefore\ & \sqrt{a_1{}^2} \leqq \sqrt{a_1a_2} \leqq \sqrt{a_2{}^2} \qquad \leftarrow \text{『平方による比較』(p.17)} \\ \therefore\ & a_1 \leqq \sqrt{a_1a_2} \leqq a_2 \end{aligned}$$

となり，$\sqrt{a_1 a_2}$ は a_1 と a_2 の平均になっているのがわかる．

このような平均のとり方を相乗平均という*1．

3 つの正の数 a_1，a_2，a_3 の場合の相乗平均は，$\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ となる．ここで，$\sqrt[3]{a}$ は a の 3 乗根といい，3 乗すると a となる数を表す．一般の n 乗根については『累乗根』(p.192) を参照のこと．

相乗平均について，一般には次のようにまとめられる．

相乗平均

n 個の 0 以上の数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n において

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

を，a_1, a_2, $\cdots$, a_n の**相乗平均** (geometric mean) という．
特に，$n = 2$ のとき $\sqrt{a_1 a_2}$ であり，$n = 3$ のとき $\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ である．

【例題：相乗平均】

次の値の相乗平均を求めよ．

(1) 2，8　　　　(2) 1，3，9

【解答】

(1) $\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = \mathbf{4}$

(2) $\sqrt[3]{1 \cdot 3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = \mathbf{3}$

■相加平均と相乗平均の関係

$n = 2$ のときの『相加平均』(p,20) と『相乗平均』(p,22) の式は，それぞれ

$$\frac{a_1 + a_2}{2}, \quad \sqrt{a_1 a_2}$$

である．

いま，$\dfrac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2}$ を計算していくと

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} &= \frac{a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

より

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1 a_2}$$

すなわち，相加平均は相乗平均以上であることがわかる．

---

*1 相乗平均の使われる例として，年間の利子率が r_1, r_2, $\cdots$, r_n で元金が A の複利での貯蓄を考える．n 年後の利子額についての平均利子率を r とすると，$Ar_1 r_2 \cdots r_n = Ar^n$ となるので，$r = \sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n}$ として相乗平均があらわれる．

一般には次のような関係が成り立つ．

相加平均と相乗平均の関係

n 個の 0 以上の数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n において，相加平均 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ と相乗平均 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ の間には，次のような関係が成り立つ．

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

等号が成立するのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときである．
特に，$n=2$ のときは

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1a_2} \quad （等号成立は\ a_1=a_2）$$

であり，$n=3$ のときは

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} \quad （等号成立は\ a_1=a_2=a_3）$$

である．

相加平均と相乗平均の関係式は，分母をはらった

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$$

の形で使われることが多い．左辺の和 $a+b$ と，右辺の積 ab の間の関係を与えたものだということに注目しよう．

【暗記：3 文字の場合の相加平均と相乗平均の関係の証明】

等式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを利用して，$a_1 \geqq 0$，$a_2 \geqq 0$，$a_3 \geqq 0$ のとき

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

を証明せよ．また，等号が成立する条件も求めよ．

【解答】

$x=\sqrt[3]{a_1}, y=\sqrt[3]{a_2}, z=\sqrt[3]{a_3}$ とおくと，$x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$ で，$x^3+y^3+z^3=a+b+c$，$xyz=\sqrt[3]{a_1}\sqrt[3]{a_2}\sqrt[3]{a_3}=\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ である．

①において

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \geqq 0$$

◀『実数の平方』(p.18)

であり

$$x+y+z \geqq 0$$

であるから

$$x^3+y^3+z^3 \geqq 3xyz \Leftrightarrow \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqq xyz$$

よって

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} \quad \blacksquare$$

また，等号が成立するのは $x=y=z$，すなわち $a_1=a_2=a_3$ のとき．

一般の場合の証明は，付録『一般の場合の相加平均と相乗平均の関係』(p.341) を参照のこと．

【例題：相加平均と相乗平均の関係を利用した不等式の証明】

次の不等式を証明せよ．等号のあるものについては，等号が成り立つ場合を調べよ．ただし，$x>0$，$y>0$，$z>0$ とする．

(1) $x+\dfrac{1}{x} \geqq 2$　　(2) $x+\dfrac{9}{x+2} \geqq 4$

(3) $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right) \geqq 9$　　(4) $(x+y)(y+z)(z+x) \geqq 8xyz$

【解答】

(1) $x>0$，$\dfrac{1}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

◀ x と $\dfrac{1}{x}$ をかけると約分され定数になることに着目した

$$x+\frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}} = 2 \quad \blacksquare$$

また，等号が成立するのは $x=\dfrac{1}{x}$，すなわち $x=1$ のときである．

◀ $x>0$ である

(2) $x+2>0$，$\dfrac{1}{x+2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

◀ (1) のような形にもちこみたいため，x ではなく $x+2$ をかたまりとして考えてみる

$$(x+2)+\frac{9}{(x+2)} \geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{9}{x+2}} = 6$$

よって，$x+\dfrac{9}{(x+2)} \geqq 4$ となる．■

また，等号が成立するのは $x+2=\dfrac{9}{x+2}$，すなわち

$$\begin{aligned} & (x+2)^2=9 \\ \Leftrightarrow\ & (x+5)(x-1)=0 \\ \therefore\ & x=1 \end{aligned}$$

◀ $x>0$ である

のときである．

(3) $x>0$，$\dfrac{1}{x}>0$，$y>0$，$\dfrac{1}{y}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} & \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{4}{x}\right) \\ & = xy+\frac{4}{xy}+1+4 \\ & \geqq 2\sqrt{xy\cdot\frac{4}{xy}}+1+4=9 \end{aligned}$$

■

◀ xy と $\dfrac{1}{xy}$ をかけると約分されて定数になるような形があらわれた

また，等号が成立するのは，$xy=\dfrac{4}{xy}$，すなわち

$$\begin{aligned} & x^2y^2=4 \\ \therefore\ & xy=2 \end{aligned}$$

◀ $x>0$，$y>0$ より，$xy>0$ である

のときである．

(4) $x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} & x+y \geqq 2\sqrt{xy} \\ & y+z \geqq 2\sqrt{yz} \\ & z+x \geqq 2\sqrt{zx} \end{aligned}$$

であるから，辺々を掛け合わせて

（左辺）$\geqq (2\sqrt{xy})(2\sqrt{yz})(2\sqrt{zx})=8xyz$ ■

また，等号が成立するときは $x=y$，$y=z$，$z=x$，すなわち $x=y=z$ のときである．

『相加平均と相乗平均の関係』(p.23) は，上の例題で見たような不等式の証明だけでなく，次の例題でみるように最小値を求める際にも利用できる．

【例題：相加平均と相乗平均の関係を利用して最小値を求める】

次の関数の最小値を求めよ．

(1) $f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$　　(2) $f(x,\ y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} \quad (x > 0,\ y > 0)$

【解答】

(1) $x > 0$ より $\dfrac{1}{x} > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$x + \frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

◀ ここまででいえたことは $f(x) \geqq 2$ である

等号が成り立つのは $x = \dfrac{1}{x}$，すなわち

$$x^2 = 1$$
$$\therefore \quad x = 1$$

◀ $x > 0$ である

以上より，最小値は $f(1) = \mathbf{2}$ とわかる．

◀ 等号が成立する x の存在がわかって初めて最小値といえる

(2) $\dfrac{y}{x} > 0$，$\dfrac{x}{y} > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geqq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 2$$

◀ ここまででいえたことは $f(x,\ y) \geqq 2$ である

等号が成り立つのは $\dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$ のとき．これを計算していくと

$$x^2 = y^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x - y)(x + y) = 0$$

$x > 0$，$y > 0$ なので，$x + y \neq 0$ であるから，$x = y$ となる．

以上より，最小値は $f(x, x) = \mathbf{2}$ とわかる．

◀ 等号が成立する x と y の存在がわかって初めて最小値といえる

『相加平均と相乗平均の関係』(p.23) を使って最小値を求める方法は

1) 関数がある値以上であることを示し（不等式の証明）
2) その関数がある値になることを示す（等号成立条件）

という 2 つのプロセスから成り立っていることに注意しよう．

1.2.4　コーシー・シュワルツの不等式

■コーシー・シュワルツの不等式とは何か

コーシー・シュワルツの不等式

a，b，x，y を実数とすると

$$(ax + by)^2 \leqq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

が成り立ち，これを**コーシー・シュワルツの不等式**（Cauchy-Schwarz's inequality）という．
等号が成立するのは

$$a : b = x : y$$

のときである．

【暗記：コーシー・シュワルツの不等式の証明〜２変数版〜】

上のコーシー・シュワルツの不等式を証明せよ．また，等号が成立する条件も確認せよ．

【解答】

（右辺）−（左辺）より

$$\begin{aligned}
&(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 \\
&= (a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2) - (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \\
&= b^2x^2 - 2(bx)(ay) + a^2y^2 \\
&= (bx - ay)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$ ■

等号が成立するのは，$(bx-ay)^2 = 0$，すなわち $bx-ay = 0$ のときであり，これは

$$a : b = x : y$$

のことである．

◀『比例式』(p.12)

【暗記：コーシー・シュワルツの不等式の証明〜３変数版〜】

a，b，c，x，y，z を実数とすると

$$(ax + by + cz)^2 \leqq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

が成り立つことを証明せよ．
また，等号が成り立つ条件も求めよ．

【解答】

（右辺）−（左辺）より

$$a^2(y^2+z^2)+b^2(x^2+z^2)+c^2(x^2+y^2)$$
$$-2(abxy+bcyz+acxz)$$
$$=a^2y^2-2(ay)(bx)+b^2x^2$$
$$+a^2z^2-2(az)(cx)+c^2x^2$$
$$+b^2z^2-2(bz)(cy)+c^2y^2$$
$$=(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \geqq 0 \quad \blacksquare$$

等号が成立するのは，$(ay-bx)^2=0$, $(az-cx)^2=0$, $(bz-cy)^2=0$ すなわち，$ay-bx=0$, $az-cx=0$, $bz-cy=0$ のときであり，これは

$$a:b:c=x:y:z$$

のことである．

◀『比例式』(p.12)

一般の場合のコーシー・シュワルツの不等式に関しては，付録『一般の場合のコーシー・シュワルツの不等式』(p.342) を参照のこと．

【例題：コーシー・シュワルツの不等式を利用して最小値を求める】

『コーシー・シュワルツの不等式』(p.27) を利用して，次の関数の最大値と最小値を求めよ．

(1) $f(x,\ y)=x+2y$　ただし，$x^2+y^2=1$ とする．
(2) $f(x,\ y,\ z)=x+2y+3z$　ただし，$x^2+y^2+z^2=1$ とする．

【解答】

(1) $a=1$，$b=2$ とすると，コーシー・シュワルツの不等式より

◀ $(ax+by)^2 \leqq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

$$(x+2y)^2 \leqq (1^2+2^2)(x^2+y^2)$$

さらに，条件より $x^2+y^2=1$ であるから

$$(x+2y)^2 \leqq 5$$
$$\Leftrightarrow\ -\sqrt{5} \leqq x+2y \leqq \sqrt{5} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

①の等号が成り立つのは

$$x : y = 1 : 2$$

のときである．$x = k$，$y = 2k$ とおき，$x^2 + y^2 = 1$ に代入すると

◀『比例式』(p.12) の知識を使った

$$k^2 + (2k)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow\ k = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

このとき，等号が成り立つ．
以上より，最大値 $f\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \boldsymbol{\sqrt{5}}$，最小値 $f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \boldsymbol{-\sqrt{5}}$ となる．

(2) $a = 1$，$b = 2$，$c = 3$ とすると，コーシー・シュワルツの不等式より

◀ $(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

$$(x + 2y + 3z)^2 \leqq (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

さらに，条件より $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ であるから

$$(x + 2y + 3z)^2 \leqq 14$$
$$\Leftrightarrow\ -\sqrt{14} \leqq x + 2y + 3z \leqq \sqrt{14} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．
②の等号が成り立つのは

$$x : y : z = 1 : 2 : 3$$

のときである．$x = k$，$y = 2k$，$z = 3k$ とおき，$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ に代入すると

◀『比例式』(p.12) の知識を使った

$$k^2 + (2k)^2 + (3k)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow\ k = \pm\frac{\sqrt{14}}{14}$$

このとき，等号が成り立つ．
以上より，最大値 $f\left(\frac{\sqrt{14}}{14},\ \frac{2\sqrt{14}}{14},\ \frac{3\sqrt{14}}{14}\right) = \boldsymbol{\sqrt{14}}$，最小値 $f\left(-\frac{\sqrt{14}}{14},\ -\frac{2\sqrt{14}}{14},\ -\frac{3\sqrt{14}}{14}\right) = \boldsymbol{-\sqrt{14}}$ となる．

『コーシー・シュワルツの不等式』は FTEXT数学 B で学習する『ベクトルの内積』の知識を用いて

$$\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\right)^2 \leqq \left|\vec{m}\right|^2\left|\vec{n}\right|^2$$

と表すことができる．もし，ベクトルを学習済みであったら，$\vec{m}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を上の式に代入して確認してみよう．

1.2.5　三角不等式

■三角不等式とは何か

2 つの数 a，b において

$$|a+b| \leqq |a|+|b|$$

が成立し，これを**三角不等式** (triangle inequality) という．

たとえば，$a=2$，$b=3$ とすると

$$(\text{左辺})=|2+3|=5\ ,\quad (\text{右辺})=|2|+|3|=5$$

となり，確かに（左辺）≦（右辺）が成り立つ．

また，$a=-2$，$b=5$ とすると

$$(\text{左辺})=|-2+5|=3\ ,\quad (\text{右辺})=|-2|+|5|=7$$

となり，やはり（左辺）≦（右辺）が成り立つ．

上では 2 つの数における三角不等式をみたが，3 つ以上の数についても三角不等式は成り立ち，一般には次のようになる．

三角不等式

n 個の数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n において

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leqq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

が成り立つ．

等号成立は，a_1，a_2，$\cdots$，a_n がすべて同符号のときである（0 は含んでもよい）．

特に，$n=2$ のとき $|a_1+a_2| \leqq |a_1|+|a_2|$ であり，$n=3$ のとき $|a_1+a_2+a_3| \leqq |a_1|+|a_2|+|a_3|$ である．

【暗記：三角不等式の証明】

a_1，a_2，a_3 に関して，次の不等式を証明せよ．また，等号が成立する条件も求めよ．

(1) $|a_1+a_2| \leqq |a_1|+|a_2|$

(2) $|a_1+a_2+a_3| \leqq |a_1|+|a_2|+|a_3|$

【解答】

(1) 両辺とも負でないから，それぞれを 2 乗した式

$$(|a_1+a_2|)^2 \leqq (|a_1|+|a_2|)^2$$

◀『平方による比較』(p.17)

を示せばよい．

$$\begin{aligned}&（右辺）-（左辺）\\&=(|a_1|+|a_2|)^2-(|a_1+a_2|)^2\\&=|a_1|^2+2|a_1||a_2|+|a_2|^2-(a_1+a_2)^2\\&={a_1}^2+2|a_1||a_2|+{a_2}^2-({a_1}^2-2a_1a_2+{a_2}^2)\\&=2(|a_1||a_2|-a_1a_2)\geqq 0\end{aligned}$$

◀ a が実数のとき $|a|^2=a^2$ である

◀ a が実数のとき $|a|\geqq a$ である

となるので，（左辺）≦（右辺）である．■

等号が成立するのは，$|a_1||a_2|-a_1a_2=0$，すなわち

$$\begin{aligned}&|a_1||a_2|-a_1a_2=0\\\Leftrightarrow\ &|a_1a_2|-a_1a_2=0\\\Leftrightarrow\ &a_1a_2\geqq 0\end{aligned}$$

◀ $|a||b|=|ab|$ である

◀ $a\geqq 0 \Leftrightarrow |a|=a$ である

すなわち，a_1 と a_2 が同符号のとき(0 を含んでもよい)となる．

(2) (左辺)を計算すると

$$\begin{aligned}&|a_1+(a_2+a_3)|\\\leqq\ &|a_1|+|a_2+a_3|\\\leqq\ &|a_1|+|a_2|+|a_3|\end{aligned}$$

◀ a_2+a_3 を一かたまりとして (1) を利用した

◀ a_2 と a_3 に関して (1) を利用した

となるので，（左辺）≦（右辺）である．■

等号が成立するのは

$$\begin{cases} a_1(a_2+a_3)\geqq 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ a_2a_3\geqq 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より，i) $a_2\geqq 0$ かつ $a_3\geqq 0$，または ii) $a_2\leqq 0$ かつ $a_3\leqq 0$ とわかるが

i) $a_2\geqq 0$ かつ $a_3\geqq 0$ のとき

①より，$a_1\geqq 0$

ii) $a_2\leqq 0$ かつ $a_3\leqq 0$ のとき

①より，$a_1\leqq 0$

すなわち，a_1，a_2，a_3 がすべて同符号のとき(0 を含んでもよい)となる．

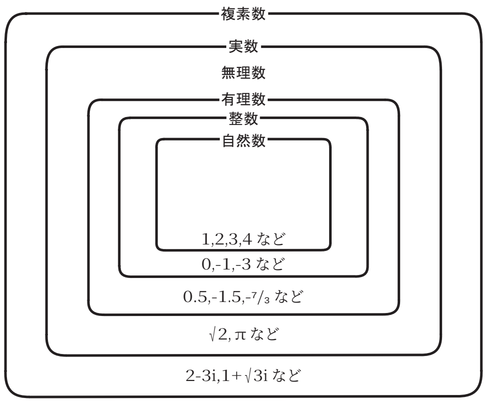
§ 1.3
複素数

いままでは数といえば実数を扱ってきたが，ここではより広い数概念である，複素数を学ぶ．複素数を利用することにより，今まで表せなかったものが数式で表せるようになる．たとえば，大学の物理学の範囲ではあるが，物体の回転や振動といった運動を記述する際に活躍する．以下では，複素数の基本について学んでいこう．

1.3.1　複素数とその演算

■複素数の導入

1 次方程式 $3x - 2 = 0$ は整数の範囲に解をもたないが，有理数の範囲では $x = \dfrac{2}{3}$ という解をもつ．また，2 次方程式 $x^2 = 3$ は有理数の範囲に解をもたないが，実数の範囲では $x = \pm\sqrt{3}$ という解をもつ．



このように，数の考え方を広げることで，方程式が新しく解をもつ場合がある．

実数の 2 乗は負にはならないので，2 次方程式 $x^2 = -3$ は実数の範囲に解をもたない．では，どのように数の考え方を広げれば，この方程式も解をもつだろうか．以下では，そのことについて考えていく．

■複素数の定義

2 乗すると -1 となる数を新しく考え，それを記号 i で表し，**虚数単位** (imaginary unit) という．つまり

$$i^2 = -1$$

である．実数は 2 乗しても負にはならないので，i は実数ではない．

さらに，a，b を実数として $a \oplus bi$ の形に表される数を考え，それを**複素数** (complex number) という．また，$a \ominus bi$ は $a \oplus (-b)i$ のことであると決めるので，やはり複素数である ($\oplus$ や $\ominus$ は FTEXT だけで使う表記であり，一般的な記号ではない．説明のため一時的にもちいるだけで，後に使わなくなる)．

たとえば

$$2 \oplus 3i\ ,\quad \sqrt{2} \ominus 4i\ ,\quad -\frac{2}{3} \oplus \sqrt{5}i$$

などは，どれも複素数である．

複素数 $a \oplus bi$ において，a を**実部** (real part)，b を**虚部** (imaginary part) という．

【例題：複素数】

次の複素数の実部，虚部をいえ．

(1) $\sqrt{2} \oplus 3i$　(2) $1 \oplus 2i$　(3) $0 \oplus 0i$　(4) $5 \ominus \sqrt{7}i$

【解答】

(1) 実部は $\boldsymbol{\sqrt{2}}$，虚部は **3**
(2) 実部は **1**，虚部は **2**
(3) 実部は **0**，虚部は **0**
(4) 実部は **5**，虚部は $\boldsymbol{-\sqrt{7}}$

■複素数の相等

2 つの複素数の実部と虚部がそれぞれ等しいとき，その 2 つの複素数は等しいという．つまり

複素数の相等

a，b，c，d を実数とする．2 つの複素数 $a \oplus bi$ と $c \oplus di$ が等しいことを

$$a \oplus bi = c \oplus di \iff a = c \text{ かつ } b = d$$

と定義する．

【例題：複素数の相等】

次の等式を満たす実数 x，y を求めよ．

(1) $(2x - y) \oplus (6x + 2y)i = 1 \oplus 8i$　(2) $(x + 2y) \oplus (3x - y)i = 0 \oplus 0i$

(1) $2x - y$，$6x + 2y$ は実数なので，実部と虚部を比較すると

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases}$$

これを解くと $\boldsymbol{x = 1,\ y = 1}$ となる．

(2) $x + 2y$，$3x - y$ は実数なので，実部と虚部を比較すると

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

これを解くと $\boldsymbol{x = 0,\ y = 0}$ となる．

a，b を実数とするとき，複素数 $a+bi$ を一文字のギリシア文字で表すことがある．つまり，$\alpha = a+bi$ などと書く．複素数 $\alpha = a+bi$ に対して，$a-bi$ を，α と共役（きょうやく） (conjugate) な複素数といい，$\overline{\alpha}$ で表す．

共役な複素数

> a，b を実数とし，複素数 α を $\alpha = a+bi$ とする．このとき，$\overline{\alpha}$ を
>
> $$\overline{\alpha} = a-bi$$
>
> と定義する．α と $\overline{\alpha}$ は共役であるという．

■複素数の加法と減法

次に複素数どうしの加法と減法について定義する．

複素数の加法・減法

> a，b，c，d を実数とする．2 つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ の和を
>
> $$(a+bi) + (c+di) = (a+c)+(b+d)i$$
>
> 差を
>
> $$(a+bi) - (c+di) = (a-c)+(b-d)i$$
>
> と定義する．

2 つの複素数の加法では，実部を足し合わせたものを新しい実部に，虚部を足し合わせたものを新しい虚部にもつ複素数を作ることである，と覚えればよい．減法も同様に覚えられる．

【例題：複素数の加法と減法】

次の計算をせよ．

(1) $(1+2i)+(3+i)$　　(2) $(3-2i)-(4-i)$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}i\right)+\left(1+\dfrac{2}{3}i\right)$　　(4) $\left(1+\sqrt{2}i\right)-\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}i\right)$

【解答】

(1) $(1+3)+(2+1)i = \mathbf{4+3}\boldsymbol{i}$

(2) $(3-4)+(-2+1)i = \mathbf{-1-}\boldsymbol{i}$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}+1\right)+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\right)i = \mathbf{\dfrac{3}{2}+}\boldsymbol{i}$

(4) $(1-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-2\sqrt{2})i = \mathbf{(1-\sqrt{3})-\sqrt{2}}\boldsymbol{i}$

■複素数の乗法

次に複素数どうしの乗法について定義する．

複素数の乗法

a，b，c，d を実数とする．2 つの複素数 $a \oplus bi$ と $c \oplus di$ の積を

$$(a \oplus bi)(c \oplus di) = (ac - bd) \oplus (ad + bc)i$$

と定義する．

この計算結果を暗記しようとすると難しい．そこで，$(a \oplus bi)(c \oplus di)$ の計算の $\oplus$ を $+$ とみなして，普通の文字式の計算と同じように展開していくと覚えやすい．

その際，i^2 がでてきたら -1 に変えていけばよい．

$$\begin{aligned}
&(a \oplus bi)(c \oplus di) \\
&= ac + (ad + bc)i + bdi^2 && \leftarrow \text{普通の文字式のように展開した} \\
&= ac + (ad + bc)i - bd && \leftarrow i^2 \text{ を } -1 \text{ に変えた} \\
&= (ac - bd) \oplus (ad + bc)i && \leftarrow \text{実部と虚部でまとめた}
\end{aligned}$$

この計算のやり方は，現時点ではただの記憶法にすぎないが，後に (p.38) 正当化される．

【例題：複素数の乗法〜その１〜】

次の計算をせよ．

(1) $(1 \oplus 2i)(4 \oplus i)$　　(2) $(1 \ominus 2i)(3 \ominus i)$

(3) $\left(\frac{1}{2} \ominus i\right)\left(1 \oplus \frac{1}{3}i\right)$　　(4) $\left(\sqrt{3} \oplus i\right)\left(\sqrt{3} \ominus i\right)$

【解答】

(1) 展開して計算していくと

$$\begin{aligned}
&(1 \oplus 2i)(4 \oplus i) \\
&= 4 + (1 + 8)i + 2i^2 \\
&= 4 + 9i - 2 \\
&= \mathbf{2 \oplus 9}\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

(2) 展開して計算していくと

$$\begin{aligned}
&(1 \ominus 2i)(3 \ominus i) \\
&= 3 + (-1 - 6)i + 2i^2 \\
&= 3 - 7i - 2 \\
&= \mathbf{1 \ominus 7}\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

(3) 展開して計算していくと

$$\left(\frac{1}{2} \ominus i\right)\left(1 \oplus \frac{1}{3}i\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6} - 1\right)i - \frac{1}{3}i^2$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{5}{6}i + \frac{1}{3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{5}{6} - \frac{5}{6}i}$$

(4) 展開して計算していくと

$$\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)$$
$$= 3 + (-\sqrt{3} + \sqrt{3})i - i^2$$
$$= 3 + 0i + 1$$
$$= \boldsymbol{4+0i}$$

【例題：複素数の乗法～その２～】

複素数 α において，$\alpha\overline{\alpha}$ の虚部は 0 になることを証明せよ．

【解答】

$\alpha = a+bi$ とおくと，$\overline{\alpha} = a-bi$ であるから

$$\alpha\overline{\alpha} = (a+bi)(a-bi)$$
$$= a^2 + (-ab + ab)i - b^2i^2$$
$$= (a^2 + b^2)+0i \qquad \blacksquare$$

■複素数の除法

次に複素数どうしの除法について定義する．

複素数の除法

a，b，c，d を実数とする．2 つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ の商を

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

と定義する．だたし，$c \fallingdotseq 0$ または $d \fallingdotseq 0$ とする．

乗法の場合と同じように，この計算結果も暗記するのは難しい．そこで，$\dfrac{a+bi}{c+di}$ の計算の $+$ を，やはり + とみなして，文字式と同様の計算をすると覚えやすい．

次の計算にあるように，計算の初めに分母に共役な複素数 $c-di$ を，分母と分子にかけ，分母を実数に変えるのがポイントである．

$$\frac{a+bi}{c+di}$$
$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \qquad \leftarrow \text{分母と分子に } c-di \text{ をかけた}$$

$$= \frac{ac + (-ad + bc)i - bdi^2}{c^2 + (-cd + cd)i - d^2 i^2} \quad \leftarrow \text{普通の文字式のように展開した}$$

$$= \frac{ac + (-ad + bc)i + bd}{c^2 + d^2} \quad \leftarrow i^2 \text{ を } -1 \text{ に変えた}$$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \quad \leftarrow i \text{ でくくってまとめた}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \quad \leftarrow i \text{ を含む項と含まない項に分けた}$$

この計算のやり方も，現時点ではやはり記憶法にすぎないが，後に (p.38) 正当化される．

【例題：複素数の除法】

次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{1+i}{3+2i}$　(2) $\dfrac{1-2i}{2-i}$　(3) $\dfrac{3+i}{3-i}$　(4) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$

【解答】

(1) 分母に共役な複素数を分母子にかけて

$$\frac{1+i}{3+2i} = \frac{(1+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

$$= \frac{3 + (-2+3)i - 2i^2}{9 + (-6+6)i - 4i^2} = \frac{3+i+2}{9+4}$$

$$= \frac{5+i}{13} = \boldsymbol{\frac{5}{13} + \frac{1}{13}i}$$

(2) 分母に共役な複素数を分母子にかけて

$$\frac{1-2i}{2-i} = \frac{(1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$= \frac{2 + (1-4)i - 2i^2}{4 + (2-2)i - i^2} = \frac{2-3i+2}{4+1}$$

$$= \frac{4-3i}{5} = \boldsymbol{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i}$$

(3) 分母に共役な複素数を分母子にかけて

$$\frac{3+i}{3-i} = \frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$

$$= \frac{9 + (3+3)i + i^2}{9 + (3-3)i - i^2} = \frac{9+6i-1}{9+1}$$

$$= \frac{8+6i}{10} = \boldsymbol{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i}$$

(4) 分母に共役な複素数を分母子にかけて

$$\frac{\sqrt{2}\ominus\sqrt{3}i}{\sqrt{2}\oplus\sqrt{3}i}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{2+(-\sqrt{6}-\sqrt{6})i+3i^2}{2+(-\sqrt{6}+\sqrt{6})i-3i^2}=\frac{2-2\sqrt{6}-3}{2+3}$$
$$=\frac{-1-2\sqrt{6}i}{5}=\boldsymbol{-\frac{1}{5}\ominus\frac{2\sqrt{6}}{5}i}$$

■$\oplus$ と + を同一視する

複素数 $a\oplus bi$ は，虚部が 0，すなわち $b=0$ のとき，$a\oplus 0i$ となるが，これを単に a と書き，実数 a のことだと考える．また，実部が 0，すなわち $a=0$ のとき，$0\oplus bi$ となるが，これを単に bi と書く．特に，$a=0$ かつ $b\neq 0$ のとき，bi を**純虚数** (pure imaginary) という[*2]．

このように決めると

$$\begin{aligned} a\oplus bi &= (a+0)\oplus(0+b)i \\ &= (a\oplus 0i)+(0\oplus bi) && \leftarrow\ a\oplus bi\ \text{を 2 つの複素数の和で書き換えた} \\ &= a+bi && \leftarrow\ a\oplus 0i\ \text{を}\ a,\ 0\oplus bi\ \text{を}\ b\ \text{に書き換えた}\end{aligned}$$

と表せるので，結局 $a\oplus bi$ は $a+bi$ と表してかまわない，つまり $\oplus$ と + は混同させてかまわないことになる．

これから以下では，$\oplus$ はすべて + と表記するようにする．$\ominus$ と − も同様である．

【暗記：複素数の実数条件と純虚数条件】

α を複素数とするとき，次のことを証明せよ．

(1) 「α が実数である」$\Longleftrightarrow$ $\alpha=\overline{\alpha}$

(2) 「α が純虚数である」$\Longleftrightarrow$ $\alpha=-\overline{\alpha}$

【解答】

(1) $\alpha=a+bi$ とおくと，$\overline{\alpha}=a-bi$ であるので

$$\begin{aligned} &\alpha=\overline{\alpha} \\ \Leftrightarrow\ &\alpha-\overline{\alpha}=0 \\ \Leftrightarrow\ &(a+bi)-(a-bi)=0 \\ \Leftrightarrow\ &(a-a)+(b+b)i=0 \\ \Leftrightarrow\ &0+2bi=0 \\ \Leftrightarrow\ &2b=0 \Leftrightarrow b=0\end{aligned}$$

◂『複素数の相等』(p.33)

[*2] 単に $b\neq 0$ のとき，$a\oplus bi$ を**虚数** (imaginary) という．

以上から，$\alpha = a + 0i$ つまり α は実数である． ■

(2) $\alpha = a + bi$ とおくと，$\overline{\alpha} = a - bi$ であるので

$$\begin{aligned} & \alpha = -\overline{\alpha} \\ \Leftrightarrow\ & \alpha + \overline{\alpha} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a + bi) + (a - bi) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a + a) + (b - b)i = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2a + 0i = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

◀『複素数の相等』(p.33)

以上から，$\alpha = 0 + bi$ つまり α は純虚数である． ■

複素数の実数条件と純虚数条件

複素数 α について，次のことがいえる．
「α が実数である」$\iff \alpha = \overline{\alpha}$
「α が純虚数である」$\iff \alpha = -\overline{\alpha}$

■複素数の性質

【暗記：複素数の性質】

複素数 α，β において

$$\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0$$

を証明せよ．

【解答】

$\Longleftarrow$ は明らかなので，以下では $\Longrightarrow$ を証明する．
$\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$ とおく．
$\alpha\beta = 0$ の両辺に $\bar{\alpha}$ をかけて

$$\begin{aligned} & \bar{\alpha}\alpha\beta = 0 \\ \therefore\ & (a - bi)(a + bi)(c + di) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a^2 + b^2)(c + di) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a^2 + b^2)c + (a^2 + b^2)di = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} (a^2 + b^2)c = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ (a^2 + b^2)d = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①となるのは，$a^2 + b^2 = 0$ つまり $a = b = 0$，または $c = 0$

のときである．

$a = b = 0$ のときは，②も成立．

$c = 0$ のときは，$d = 0$ であれば②が成立．

以上より，$(a = 0$ かつ $b = 0)$ または $(c = 0$ かつ $d = 0)$，つまり $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ が示せた．■

【暗記：共役な複素数の性質】

α，β を複素数とするとき，次の等式を証明せよ．

(1) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$　　(2) $\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$

(3) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$　　(4) $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$（ただし，$\beta \neq 0$）

【解答】

$\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$ とおく．

(1)
$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \overline{(a + bi) + (c + di)}\\
&= \overline{(a + c) + (b + d)i}\\
&= (a + c) - (b + d)i\\
(\text{右辺}) &= \overline{a + bi} + \overline{c + di}\\
&= (a - bi) + (c - di)\\
&= (a + c) - (b + d)i
\end{aligned}
$$

以上より，（左辺）＝（右辺）となる．■

(2)
$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \overline{(a + bi) - (c + di)}\\
&= \overline{(a - c) + (b - d)i}\\
&= (a - c) - (b - d)i\\
(\text{右辺}) &= \overline{a + bi} - \overline{c + di}\\
&= (a - bi) - (c - di)\\
&= (a - c) - (b - d)i
\end{aligned}
$$

以上より，（左辺）＝（右辺）となる．■

(3)
$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \overline{(a + bi)(c + di)}\\
&= \overline{ac + (ad + bc)i + bdi^2}\\
&= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}\\
&= (ac - bd) - (ad + bc)i\\
(\text{右辺}) &= \overline{a + bi}\;\overline{c + di}\\
&= (a - bi)(c - di)
\end{aligned}
$$

$$= ac - (ad + bc)i + bdi^2$$
$$= (ac - bd) - (ad + bc)i$$

以上より，（左辺）=（右辺）となる．■

(4)

$$（左辺） = \overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)}$$
$$= \overline{\left(\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\right)}$$
$$= \overline{\left(\frac{ac-(ad-bc)i-bdi^2}{c^2+(-cd+cd)i-d^2i^2}\right)}$$
$$= \overline{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{ad-bc}{c^2+d^2}\right)}$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{ad-bc}{c^2+d^2}$$
$$（右辺） = \frac{\overline{a+bi}}{\overline{c+di}}$$
$$= \frac{a-bi}{c-di}$$
$$= \frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}$$
$$= \frac{ac+(ad-bc)i-bdi^2}{c^2+(cd-cd)i-d^2i^2}$$
$$= \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

以上より，（左辺）=（右辺）となる．■

■負の数の平方根

数の範囲を，いままでみてきたような複素数にまで拡張すれば，負の数の平方根を求めることができる．例として，-3 の平方根を求めてみよう．

-3 の平方根は，方程式 $x^2 = -3$ の解である．$i^2 = -1$ を利用して

$$x^2 = 3i^2$$
$$\Leftrightarrow\ x^2 - 3i^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ x = \sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}i$$

つまり，-3 の平方根は $\sqrt{3}i$ と $-\sqrt{3}i$ である．一般には次のようにまとめられる．

負の数の平方根

$a > 0$ のとき，$-a$ の平方根は，$\sqrt{a}i$ と $-\sqrt{a}i$ である．
特に，-1 の平方根は i と $-i$ である．

【例題：負の数の平方根】

次の数の平方根を求めよ．

(1) -36　(2) -20　(3) $-\dfrac{49}{81}$　(4) $-\dfrac{5}{12}$

【解答】

(1) $\pm\sqrt{36}i = \boldsymbol{\pm 6i}$

(2) $\pm\sqrt{20}i = \boldsymbol{\pm 2\sqrt{5}i}$

(3) $\pm\sqrt{\dfrac{49}{81}}i = \boldsymbol{\pm\dfrac{7}{9}}i$

(4) $\pm\sqrt{\dfrac{5}{12}}i = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}i = \boldsymbol{\pm\dfrac{\sqrt{15}}{6}i}$

負の数 $-a$ の平方根のうち，$\sqrt{a}i$ のことを $\sqrt{-a}$ と表す．

負の数の平方根の表し方

$a > 0$ のとき，$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ とする．

【例題：負の数の平方根の計算】

次の式を計算せよ．

(1) $\sqrt{-9} + \sqrt{-1}$　(2) $\sqrt{-48} - \sqrt{-75}$　(3) $\sqrt{24}\sqrt{-18}$

(4) $\sqrt{-2}\sqrt{-8}$　(5) $\dfrac{\sqrt{-15}}{\sqrt{108}}$　(6) $\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{-10}}$

【解答】

(1) $\sqrt{-9} + \sqrt{-1} = 3i + i = \boldsymbol{4i}$

(2) $\sqrt{-48} - \sqrt{-75} = 4\sqrt{3}i - 5\sqrt{3}i = \boldsymbol{-\sqrt{3}i}$

(3) $\sqrt{24}\sqrt{-18} = 2\sqrt{6} \times 3\sqrt{2}i = \boldsymbol{12\sqrt{3}i}$

(4) $\sqrt{-2}\sqrt{-8} = \sqrt{2}i \times 2\sqrt{2}i = 4i^2 = \boldsymbol{-4}$

◀ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ は成り立たない

(5) $\dfrac{\sqrt{-15}}{\sqrt{108}} = \dfrac{\sqrt{15}}{6\sqrt{3}}i = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{6}i}$

(6) $\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{-10}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{10}i} = -\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{10}}i = \boldsymbol{-2\sqrt{2}i}$

◀ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ は成り立たない

この例題の (4) の計算で

$$（\times）\qquad \sqrt{-2}\sqrt{-8} = \sqrt{(-2)\times(-8)} = \sqrt{16} = 4$$

とすると間違いになる．このタイプの間違いを防ぐためには，$\sqrt{-a}$ を見たら，まず始めに $\sqrt{a}i$ の形に直して計算するとよい．

a，b が実数のとき

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}\ ,\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

は一般には成り立たない．このことを，次の例題で確認しておこう．

【例題：負の数の根号の計算】

次の問いに答えよ．ただし，$a > 0$ かつ $b > 0$ のとき，$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ および $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ がが成り立つことは使ってよい．

(1) $a < 0$ かつ $b < 0$ のとき，$\sqrt{a}\sqrt{b} \fallingdotseq \sqrt{ab}$ であることを証明せよ．

(2) $a > 0$ かつ $b < 0$ のとき，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \fallingdotseq \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ であることを証明せよ．

【解答】

(1) $a < 0$ かつ $b < 0$ のとき

$$\begin{aligned}（左辺）&= \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{-(-a)}\sqrt{-(-b)}\\ &= \sqrt{(-a)}i\sqrt{(-b)}i = \sqrt{(-a)(-b)}i^2\\ &= -\sqrt{ab} \fallingdotseq （右辺）\end{aligned}$$

(2) $a > 0$ かつ $b < 0$ のとき

$$\begin{aligned}（左辺）&= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-(-b)}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}i}\\ &= -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}i = -\sqrt{-\frac{a}{b}}i\\ &= -\sqrt{-\left(-\frac{a}{b}\right)} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \fallingdotseq （右辺）\end{aligned}$$

1.3.2　2 次方程式の解の公式の拡張

■2 次方程式の解の公式の拡張

実数 a，b，c を係数にもつ 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を解くことを考える．FTEXT数学 I で学んだときには，解を実数の範囲でしか考えていなかったが，ここではより広く複素数の範囲で解を考えることにする．

①を変形していくと

$$
\begin{aligned}
& ax^2+bx+c=0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}
\end{aligned}
$$

複素数の範囲では負の数の平方根も求められるので，b^2-4ac の符号が何であっても

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

と表せ，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となる．

2 次方程式の解の公式の拡張

実数 a，b，c を係数にもつ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は（b^2-4ac の値の符号が何であっても）

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

と表せる．

【例題：2 次方程式の複素数の範囲での解】

次の 2 次方程式を解け．

(1) $2x^2+5x+1=0$　　(2) $3x^2-2x+2=0$

(3) $\sqrt{2}x^2+4x+3\sqrt{2}=0$　　(4) $(\sqrt{3}-1)x^2-2x+3\sqrt{3}+3=0$

【解答】

(1) 2 次方程式の解の公式より

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\boldsymbol{\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}}$$

(2) 2 次方程式の解の公式より

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-3\cdot2}}{3}=\boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{5}i}{3}}$$

(3) 両辺に $\sqrt{2}$ を掛けると

$$2x^2+4\sqrt{2}x+6=0$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+2\sqrt{2}x+3=0$$

◀ 両辺を 2 で割った

であるから，2 次方程式の解の公式より

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-1\cdot 3}}{1}=\boldsymbol{-\sqrt{2}\pm i}$$

(4) 両辺に $\left(\sqrt{3}+1\right)$ を掛けると

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)x^2-2\left(\sqrt{3}+1\right)x$$
$$+\left(3+3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2x^2-2\left(\sqrt{3}+1\right)x+3\left(\sqrt{3}+1\right)^2=0$$

であるから，2 次方程式の解の公式より

$$x=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\pm\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-2\cdot 3\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}\left(1\pm\sqrt{5}i\right)}$$

■2 次方程式の判別式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について，FTEXT数学 I では

1) $D=b^2-4ac>0$ のとき，2 つの異なる解をもつ．
2) $D=b^2-4ac=0$ のとき，重解をもつ．
3) $D=b^2-4ac<0$ のとき，解は存在しない．

と学んだが，解を複素数の範囲まで拡張して考えるならば，次のようにまとめられる．

2 次方程式の判別式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について

1) $D=b^2-4ac>0$ のとき，異なる 2 つの実数解をもつ．
2) $D=b^2-4ac=0$ のとき，重解（実数解）をもつ．
3) $D=b^2-4ac<0$ のとき，異なる 2 つの虚数解をもつ．

となる．

【例題：解の判別】

次の 2 次方程式の解を判別せよ．

(1) $x^2-4x+2a+1=0$　　(2) $x^2+(a-1)x-a+3=0$

【解答】

(1) 判別式を D とすると

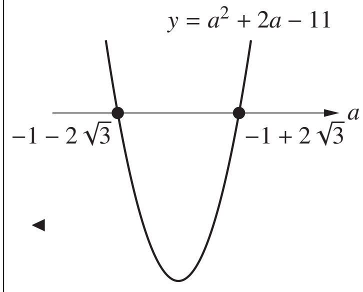
$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (2a+1) = 3 - 2a$$

1) $\dfrac{D}{4} > 0$，すなわち $a < \dfrac{3}{2}$ のとき，異なる 2 つの実数解をもつ.
2) $\dfrac{D}{4} = 0$，すなわち $a = \dfrac{3}{2}$ のとき，重解をもつ.
3) $\dfrac{D}{4} < 0$，すなわち $a > \dfrac{3}{2}$ のとき，異なる 2 つの虚数解をもつ.

(2) 判別式を D とすると

$$D = (a-1)^2 - 4(-a+3) = a^2 + 2a - 11$$

$y = a^2 + 2a - 11$ のグラフは右図のようであるから



1) $D > 0$，すなわち $a < -1 - 2\sqrt{3}$，$-1 + 2\sqrt{3} < a$ のとき，異なる 2 つの実数解をもつ.
2) $D = 0$，すなわち $a = -1 \pm 2\sqrt{3}$ のとき，重解をもつ.
3) $D < 0$，すなわち $-1 - 2\sqrt{3} < a < -1 + 2\sqrt{3}$ のとき，異なる 2 つの虚数解をもつ.

§ 1.4
多項式の除法

FTEXT数学 I では，多項式の加法，減法，乗法について学んだ．ここでは，多項式の除法について学ぶ．多項式の除法は，普通の整数の除法(割り算)に相当するものであるが，似て非なるものなので注意して見ていこう．

1.4.1　多項式の除法の基本定理

■整数の割り算の復習

まず，小学校以来慣れ親しんできた，**整数の除法** (integer division) について復習する．

たとえば，右図のような計算により，17 を 3 で割ると，商は 5 で余りは 2 とわかる．この関係を式で表すと

筆算したもの

$$\begin{array}{r} 5 \\ 3\overline{)17} \\ 15 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$17 = 3 \times 5 + 2$$

となる．

このとき，17 を割られる数，3 を割る数と呼ぶので，一般的には次のような関係が成り立つ．

(割られる数) = (割る数) × (商) + (余り)

また，(割る数) > (余り) ≧ 0 の関係がある．

整数の除法とは何か，つまり整数 a を整数 b で割ったときの商と余りを求めるとはどういうことなのかをきちんと定義すると

$$a = b \cdot Q + r \quad (0 \leqq r < Q)$$

を満たす整数 Q と r を求めることとなる[*3]．そして，この求まった値 Q と r をそれぞれ，商と余りと呼ぶのである．

■多項式の次数の表し方

まず，多項式の次数を表す記号を定義しておこう．

多項式の次数

多項式 $f(x)$ の次数を $\deg f(x)$ と表す．

たとえば，$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$，$g(x) = 3x^2 - 4x + 5$ とするとき，$\deg f(x) = 3$，$\deg g(x) = 2$ である．

[*3] 普段割り算で行う筆算は，この Q や r を求めるための手段に過ぎない．

■**多項式の除法**

『整数の除法』に続き，今度は**多項式の除法** (polynomial division) について考えてみる．たとえば，「$x^3 - x^2 + 2x - 3$ を $x^2 + 2x - 1$ で割る」とは

$$x^3 - x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x - 1)Q(x) + r(x)$$

と変形することであると定義する．ただし，このとき $Q(x)$，$r(x)$ は共に x の多項式であり，$\deg(x^2 + 2x - 1) > \deg r(x)$ であるとする．この結果の $Q(x)$ と $r(x)$ をそれぞれ，多項式の除法における**商** (quotient) と**余り** (remainder) と呼ぶ．

多項式の除法

多項式 $f(x)$，$g(x)$ において

$$f(x) = g(x)Q(x) + r(x) \qquad (\deg r(x) < \deg g(x))$$

と変形できたとき，$Q(x)$ を商，$r(x)$ を余りという．
特に，余り $r(x)$ が 0 のとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れるという．

さきほどの例では，商 $Q(x)$ は $x - 3$，余り $r(x)$ は $9x - 6$ となる．つまり

$$x^3 - x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x - 1) \times (x - 3) + (9x - 6)$$

となる．各自，以下の 2 点について確認しておこう．

i) 上の式の右辺を展開すると左辺と等しいこと
ii) $x^2 + 2x - 1$ の次数が余り $9x - 6$ の次数より大きいこと

以下では，多項式の除法の計算方法についてみていく．

1.4.2　多項式の除法の計算方法

ここでは，$x^4 + 3x^3 - 4x + 3$ を $x^2 - 3x + 1$ で割ったときの商と余りを求める方法を例として，具体的な計算方法を見ていく．計算方法には次の 2 つの方法がある．

【例題：除法の計算方法〜筆算形式〜】

$x^4 + 3x^3 - 4x + 3$ を $x^2 - 3x + 1$ で割ったときの商と余りを求めよ．

STEP1

まず，整数の割り算と同じように，右図のように書いておく．この例題では，割られる多項式には x^2 の項はないが，その場合でも適度にスペースを空け，計算できるようにしておく．

$$x^2 - 3x + 1 \,\overline{\big)\, x^4 + 3x^3 \qquad\quad - 4x + 2}$$

STEP2

x^2-3x+1 に何をかけて引くと，x^4+3x^3-4x+2 の最高次の項 x^4 が消えるかを考える．この例題では x^2 なので，x^2 を右図のように書く．

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & x^2 & & & & \\ \cline{2-6}
x^2-3x+1\,\big) & x^4 & +3x^3 & & -4x & +2
\end{array}$$

STEP3

右図のようにして，x^2-3x+1 に x^2 をかけた式を x^4+3x^3-4x+2 から引く．

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & x^2 & & & & \\ \cline{2-6}
x^2-3x+1\,\big) & x^4 & +3x^3 & & -4x & +2 \\
 & x^4 & -3x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & & 6x^3 & -x^2 & -4x &
\end{array}$$

STEP4

STEP2 と同じように，$6x^3$ が消えるように x^2-3x+1 に $6x$ をかけて引く．

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & x^2 & +6x & & & \\ \cline{2-6}
x^2-3x+1\,\big) & x^4 & +3x^3 & & -4x & +2 \\
 & x^4 & -3x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & & 6x^3 & -x^2 & -4x & \\
 & & 6x^3 & -18x^2 & +6x & \\ \cline{3-6}
 & & & 17x^2 & -10x & +2
\end{array}$$

STEP5

同じように，$17x^2$ が消えるように x^2-3x+1 に 17 をかけて引く．

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & x^2 & +6x & +17 & & \\ \cline{2-6}
x^2-3x+1\,\big) & x^4 & +3x^3 & & -4x & +2 \\
 & x^4 & -3x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & & 6x^3 & -x^2 & -4x & \\
 & & 6x^3 & -18x^2 & +6x & \\ \cline{3-6}
 & & & 17x^2 & -10x & +2 \\
 & & & 17x^2 & -51x & +17 \\ \cline{4-6}
 & & & & 41x & -15
\end{array}$$

STEP6

最下段の $41x-15$ の次数が，割る多項式 x^2-3x+1 の次数より低いので，ここでやめる．

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & x^2 & +6x & +17 & & \\ \cline{2-6}
x^2-3x+1 \big) & x^4 & +3x^3 & & -4x & +2 \\
 & x^4 & -3x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & & 6x^3 & -x^2 & -4x & \\
 & & 6x^3 & -18x^2 & +6x & \\ \cline{3-6}
 & & & 17x^2 & -10x & +2 \\
 & & & 17x^2 & -51x & +17 \\ \cline{4-6}
 & & & & 41x & -15
\end{array}
$$

この結果から

$$x^4+3x^3-4x+2=(x^2+6x+17)(x^2-3x+1)+41x-15$$

となることがわかり，商は $x^2+6x+17$，余りは $41x-15$ とわかる．

慣れてきたら x^4 や x^3 などを省略し，係数だけを並べて筆算するとよい．
上の計算では次のようになる．

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 1 & 6 & 17 & & \\ \cline{2-6}
1\ -3\ \ 1 \big) & 1 & 3 & & -4 & 2 \\
 & 1 & -3 & 1 & & \\ \cline{2-6}
 & & 6 & -1 & -4 & \\
 & & 6 & -18 & 6 & \\ \cline{3-6}
 & & & 17 & -10 & 2 \\
 & & & 17 & -51 & 17 \\ \cline{4-6}
 & & & & 41 & -15
\end{array}
$$

【例題：除法の計算方法〜暗算形式〜】

x^4+3x^3-4x+3 を x^2-3x+1 で割ったときの商と余りを求めよ．

STEP1

まず，右辺を展開したときに x^4 が現れるように，下のように書く．

$$x^4+3x^3-4x+2=(x^2-3x+1)(x^2 \qquad\qquad)$$

STEP2

このままでは，右辺の x^3 の係数は -3 となり，左辺の 3 と合わなくなるので，つじつまをあわせるために $+6x$ を下のように書く．こうすれば，右辺を展開したときに x^3 の係数が 3 となり，左辺とあう．

$$x^4+3x^3-4x+2=(x^2-3x+1)(x^2+6x \qquad)$$

STEP3

しかし，このままでは，右辺の x^2 の係数は -17 となり，左辺の 0 と合わなくなるので，つじつまをあわせるために $+17$ を下のように書く．こうすれば，右辺を展開したときに x^2 の係数が 0 となり，左辺とあう．

$$x^4+3x^3-4x+2=(x^2-3x+1)(x^2+6x+17)$$

STEP4

しかし，このままでは，右辺の x の係数は -45 となり，左辺の -4 と合わなくなるので，つじつまをあわせるために $+41x$ を右のように書く．こうすれば，右辺を展開したときに x の係数が -4 となり，左辺とあう．

$$x^4+3x^3-4x+2=(x^2-3x+1)(x^2+6x+17)+41x$$

STEP5

最後に，右辺の定数項 17 と左辺の定数項 2 を合わせるため，右のように 15 を書く．こうすれば，右辺を展開したときの定数項が 17 となり，左辺とあう．

$$x^4+3x^3-4x+2=(x^2-3x+1)(x^2+6x+17)+41x-15$$

この結果から，商は $x^2+6x+17$，余りは $41x-15$ とわかる．

以上 2 つの方法を見てきたが，慣れると『暗算形式』の方が『筆算形式』より素早く計算できる．多項式の係数に分数が含まれる場合など，暗算での計算が難しくなる場合には『筆算形式』を使うとよい．

【例題：多項式の除法〜その１〜】

次の式の組について，左側の式を右側の式で割ったときの，商と余りを求めよ．

(1) x^2+2x+1，$x-1$
(2) x^3+3，$x+1$
(3) x^3+x^2+4x+3，x^2-x+1
(4) $x^4+2x^3-3x^2+5x+6$，x^2+x-1

【解答】

(1) 計算すると（筆算形式は右欄外を参照）

$$x^2+2x+1=(x-1)(x+3)+4$$

となるので，商は $\boldsymbol{x+3}$，余りは **4** である．

$$\begin{array}{r|l} & x \quad +3 \\ \hline x-1 & x^2+2x+1 \\ & x^2 \quad -x \\ \hline & \quad 3x+1 \\ & \quad 3x-3 \\ \hline & \qquad 4 \end{array}$$

(2) 計算すると（筆算形式は右欄外を参照）

$$x^3+3=(x+1)(x^2-x+1)+2$$

となるので，商は $\boldsymbol{x^2-x+1}$，余りは **2** である．

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \quad -x \quad +1 \\ \hline x+1 & x^3 \qquad\qquad +3 \\ & x^3+x^2 \\ \hline & \quad -x^2 \\ & \quad -x^2-x \\ \hline & \qquad\quad x+3 \\ & \qquad\quad x+1 \\ \hline & \qquad\qquad 2 \end{array}$$

(3) 計算すると(筆算形式は右欄外を参照)

$$x^3 + x^2 + 4x + 3 = (x^2 - x + 1)(x + 2) + 5x + 1$$

となるので，商は $\boldsymbol{x + 2}$，余りは $\boldsymbol{5x + 1}$ である.

$$\begin{array}{r}
x \quad +2 \\
x^2 - x + 1 \,\big)\, x^3 + x^2 + 4x + 3 \\
x^3 - x^2 + x \quad\; \\
\hline
2x^2 + 3x + 3 \\
2x^2 - 2x + 2 \\
\hline
5x + 1
\end{array}$$

(4) 計算すると(筆算形式は右欄外を参照)

$$\begin{aligned}
&x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 6 \\
&= (x^2 + x - 3)(x^2 + x - 1) + 9x + 3
\end{aligned}$$

となるので，商は $\boldsymbol{x^2 + x - 3}$，余りは $\boldsymbol{9x + 3}$ である.

$$\begin{array}{r}
x^2 \quad + x \quad - 3 \qquad\quad \\
x^2 + x - 1 \,\big)\, x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 6 \\
x^4 + x^3 - x^2 \qquad\qquad \\
\hline
x^3 - 2x^2 + 5x \quad\; \\
x^3 + x^2 - x \quad\; \\
\hline
-3x^2 + 6x + 6 \\
-3x^2 - 3x + 3 \\
\hline
9x + 3
\end{array}$$

【例題：多項式の除法〜その２〜】

(1) $x^2 + 2x - 3$ で割ると，商が $x + 1$，余りが $x + 2$ になる多項式を求めよ.

(2) $2x^3 - 3x^2 + 2x + 4$ を割ると，商が $2x + 1$，余りが $2x + 3$ になる多項式を求めよ.

【解答】

(1) 求める多項式を $f(x)$ とすると，商が $x + 1$，余りが $x + 2$ であるから

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x + 1)(x^2 + 2x - 3) + x + 2 \\
&= x^3 + 3x^2 - x - 3 + x + 2 \\
&= \boldsymbol{x^3 + 3x^2 - 1}
\end{aligned}$$

(2) 求める多項式を $f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&2x^3 - 3x^2 + 2x + 4 = f(x)(2x + 1) + 2x + 3 \\
\Leftrightarrow\ &f(x)(2x + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 1 \\
\Leftrightarrow\ &f(x)(2x + 1) = (2x + 1)(x^2 - 2x + 1) \\
\therefore\ &f(x) = x^2 - 2x + 1
\end{aligned}$$

であるから，求める多項式は $\boldsymbol{x^2 - 2x + 1}$ である.

$$\begin{array}{r}
x^2 \quad - 2x \quad + 1 \\
2x + 1 \,\big)\, 2x^3 - 3x^2 \qquad\quad + 1 \\
2x^3 + x^2 \qquad\qquad\quad \\
\hline
-4x^2 \qquad\qquad\quad \\
-4x^2 - 2x \qquad\quad \\
\hline
2x + 1 \\
2x + 1 \\
\hline
0
\end{array}$$

■多項式の除法の一意性

ここまで計算してきた経験から，多項式の除法では，商や余りが必ず存在し，さらにそれらが一通りに定まることは明らかであろう.

一般に，ある定義で定められたものがただ一通りに定まることを**一意性** (uniqueness) という[*4]．次に，多項式の除法の一意性について，まとめておこう.

[*4] たとえば，1 次方程式 $ax + b = 0$ の解は 1 つしかないので，「1 次方程式の解は一意的に定まる」などと使う.

多項式の除法の一意性

多項式 $f(x)$，$g(x)$ において

$$f(x) = g(x)Q(x) + r(x) \qquad (\deg r(x) < \deg g(x))$$

を満たす多項式 $Q(x)$，$r(x)$ がただ一通りに存在する．

【証明：背理法】

多項式 $f(x)$ と $g(x)$ について

$$f(x) = g(x)Q_1(x) + r_1(x) \qquad \deg r_1(x) < \deg g(x) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$f(x) = g(x)Q_2(x) + r_2(x) \qquad \deg r_2(x) < \deg g(x) \qquad \cdots\cdots ②$$

と 2 通りに表されたとする．

①－② より

$$0 = g(x)Q_1(x) + r_1(x) - g(x)Q_2(x) - r_2(x)$$

$$\Leftrightarrow \ g(x)\{Q_1(x) - Q_2(x)\} = r_2(x) - r_1(x) \qquad \cdots\cdots ③$$

となる．

③において，$Q_1(x) - Q_2(x)$ が 0 ではないとすると，左辺の次数が右辺の次数より大きくなってしまう．よって，$Q_1(x) - Q_2(x)$ は 0，つまり $Q_1(x) = Q_2(x)$ である．

また，このとき③の左辺は 0 となるので

$$0 = r_2(x) - r_1(x)$$

$$\Leftrightarrow \ r_1(x) = r_2(x)$$

以上より，商と余りが一致することが示されたので，多項式の除法の商と余りは一通りに定まることが証明された． ■

1.4.3 1 次の多項式の除法の計算方法

多項式の除法において，特に 1 次式で割る場合には，p.48 で紹介した 2 つの方法以外にも，覚えておきたい計算方法が 2 つある．

ここでは，$x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ を $x - 2$ で割ったときの商と余りを求めることを例として，具体的な計算方法を見ていく．

■組立除法

ここではまず，**組立除法** (synthetic division) という計算方法について学ぶ．

$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ を $x - \alpha$ で割ったときの，商を $b_0x^2 + b_1x + b_2$，余りを R とすると

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = (x - \alpha)(b_0x^2 + b_1x + b_2) + R$$

と表せるが，右辺を展開して整理すると

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = b_0x^3 + (b_1 - \alpha b_0)x^2 + (b_2 - \alpha b_1)x + R - \alpha b_2$$

となるので，両辺の係数を比較することにより

$$a_0 = b_0\ ,\ \ a_1 = b_1 - \alpha b_0\ ,\ \ a_2 = b_2 - \alpha b_1\ ,\ \ a_3 = R - \alpha b_2$$

が成り立つ．

これから，b_0，b_1，b_2，b_3，R を解くことにより，商の係数や余りは

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & \alpha b_0 & \alpha b_1 & \alpha b_2 \\ \hline & b_0 & b_1 & b_2 & \boxed{R} \end{array}$$

$$b_0 = a_0\ ,\ \ b_1 = a_1 + \alpha b_0\ ,\ \ b_2 = a_2 + \alpha b_1\ ,\ \ R = a_3 + \alpha b_2$$

と計算できる．

この計算の手順は，右上の図のように考えればよい．

たとえば，$x^3 - 4x^2 + 2x + 5$ を $x - 2$ で割ったときには，右図のような計算結果になるので

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 2 & 5 \\ & & 2 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \boxed{1} \end{array}$$

商は $x^2 - 2x - 2$　余り 1

と求まる．

【例題】

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ を $x - 2$ で割ったときの商と余りを組立除法で計算せよ．

【解答】

組立除法を実行すると

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ & & 2 & 8 & 22 \\ \hline & 1 & 4 & 11 & \boxed{23} \end{array}$$

となるので，商は $\boldsymbol{x^2 + 4x + 11}$，余りは **23** となる．

■$x - a$ で展開するということ

たとえば，多項式 $x^3 - 4x^2 + 2x + 5$ は

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 5 = (x - 1)^3 - (x - 1)^2 - 3(x - 1) + 8$$

のように表すことができる(右辺を展開して左辺と等しくなることを確かめてみよ)．このような変形を行ったとき，右辺のような形の式のことを $x - 1$ で展開された式という．

このように変形するには，次の手順を踏めばよい．

STEP1

まず，$x^3 - 4x^2 + 2x + 5$ の各項から，無理やり $(x - 1)$ をくくる．このとき，$x = (x - 1) + 1$ とみるのがポイントである．

$$\begin{aligned} & x^3 - 4x^2 + 2x + 5 \\ =\ & \{(x - 1) + 1\}^3 - 4\{(x - 1) + 1\}^2 + 2\{(x - 1) + 1\} + 5 \end{aligned}$$

STEP2

次に，$(x-1)$ のかたまりを崩さないように，展開していく．

$$
\begin{aligned}
&\{(x-1)+1\}^3-4\{(x-1)+1\}^2+2\{(x-1)+1\}+5\\
=&\left\{(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1\right\}\\
&\qquad -4\left\{(x-1)^2+2(x-1)+1\right\}+2\{(x-1)+1\}+5
\end{aligned}
$$

STEP3

最後に，同類項どうしで整理する．

$$
\begin{aligned}
&\left\{(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1\right\}\\
&\qquad -4\left\{(x-1)^2+2(x-1)+1\right\}+2\{(x-1)+1\}+5\\
=&(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1\\
&\qquad -4(x-1)^2-8(x-1)-4+2(x-1)+2+5\\
=&(x-1)^3-(x-1)^2-3(x-1)+8
\end{aligned}
$$

このような変形を利用して，1 次式の割り算を考えることもできる．

【例題】

x^3+2x^2+3x+1 を $x-2$ で割ったときの商と余りを，x^3+2x^2+3x+1 を $x-2$ で展開することにより求めよ．

【解答】

まず，x^3+2x^2+3x+1 を $x-2$ で展開する．

$$
\begin{aligned}
&x^3+2x^2+3x+1\\
=&\{(x-2)+2\}^3+2\{(x-2)+2\}^2+3\{(x-2)+2\}+1\\
=&\left\{(x-2)^3+6(x-2)^2+12(x-2)+8\right\}\\
&+2\left\{(x-2)^2+4(x-2)+4\right\}+3\{(x-2)+2\}+1\\
=&(x-2)^3+6(x-2)^2+12(x-2)+8+2(x-2)^2\\
&+8(x-2)+8+3(x-2)+6+1\\
=&(x-2)^3+8(x-2)^2+23(x-2)+23
\end{aligned}
$$

次に，この式を $(x-2)$ でくくると

$$
\begin{aligned}
&(x-2)^3+8(x-2)^2+23(x-2)+23\\
=&(x-2)\left\{(x-2)^2+8(x-2)+23\right\}+23
\end{aligned}
$$

最後に，中括弧の中を展開すると

$$
(x-2)\left\{(x-2)^2+8(x-2)+23\right\}+23
$$

$$= (x-2)(x^2-4x+4+8x-16+23)+23$$

$$= (x-2)(x^2+8x+11)+23$$

となるので，結局

$$x^3+2x^2+3x+1 = \overbrace{(x-2)}^{A}\overbrace{(x^2+8x+11)}^{B} + \overbrace{23}^{C}$$

と変形できる．

多項式の除法の一意性より，（A の次数）>（C の次数）を満たす関係は一通りに定まるので，商は $\boldsymbol{x^2+8x+11}$ で，余りは **23** となる．

◀『多項式の除法の一意性』(p.53)

【例題：多項式の除法（再）】

次の式の組について，左側の式を右側の式で割ったときの，商と余りを組立除法と $x-\alpha$ で展開する方法の 2 通りで求めよ．

(1) x^2+2x+1，$x-1$　　(2) x^3+3，$x+1$

(3) x^3-4x^2-2x+5，$x-2$　　(4) x^3-2x^2-x+6，$x-3$

【解答】

(1) 【解 1：組立除法】

組立除法を行うと

$$\begin{array}{r|rrr}
1 & 1 & 2 & 1 \\
 & & 1 & 3 \\ \hline
 & 1 & 3 & \boxed{4}
\end{array}$$

となるので，商は $\boldsymbol{x+3}$，余りは **4** である．

【解 2：$x-\alpha$ で展開する方法】

$$x^2+2x+1$$

$$= \{(x-1)+1\}^2+2\{(x-1)+1\}+1$$

$$= (x-1)^2+4(x-1)+4$$

$$= (x-1)(x-1+4)+4 = (x-1)(x+3)+4$$

となるので，商は $\boldsymbol{x+3}$，余りは **4** である．

(2) 【解 1：組立除法】

組立除法を行うと

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & \boxed{2}
\end{array}$$

となるので，商は $\boldsymbol{x^2-x+1}$，余りは **2** である．

【解 2：$x-\alpha$ で展開する方法】

$$
\begin{aligned}
&x^3+3\\
&=\{(x+1)-1\}^3+3\\
&=(x+1)^3+3(x+1)^2(-1)+3(x+1)-1+3\\
&=(x+1)(x^2+2x+1-3x-3+3)+2\\
&=(x+1)(x^2-x+1)+2
\end{aligned}
$$

となるので，商は $\boldsymbol{x^2-x+1}$，余りは **2** である．

(3) 【解 1：組立除法】

組立除法を行うと

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -4 & -2 & 5 \\
 & & 2 & -4 & -12 \\ \hline
 & 1 & -2 & -6 & \boxed{-7}
\end{array}
$$

となるので，商は $\boldsymbol{x^2-2x-6}$，余りは $\boldsymbol{-7}$ である．

【解 2：$x-\alpha$ で展開する方法】

$$
\begin{aligned}
&x^3-4x^2-2x+5\\
&=\{(x-2)+2\}^3-4\{(x-2)+2\}^2-2\{(x-2)+2\}+5\\
&=(x-2)(x^2-2x-6)-7
\end{aligned}
$$

となるので，商は $\boldsymbol{x^2-2x-6}$，余りは $\boldsymbol{-7}$ である．

(4) 【解 1：組立除法】

組立除法を行うと

$$
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 1 & -2 & -1 & 6 \\
 & & 3 & 3 & 6 \\ \hline
 & 1 & 1 & 2 & \boxed{12}
\end{array}
$$

となるので，商は $\boldsymbol{x^2+x+2}$，余りは **12** である

【解 2：$x-\alpha$ で展開する方法】

$$
\begin{aligned}
&x^3-2x^2-x+6\\
&=\{(x-3)+3\}^3-2\{(x-3)+3\}^2-\{(x-3)+3\}+6\\
&=(x-3)(x^2+x+2)+12
\end{aligned}
$$

となるので，商は $\boldsymbol{x^2+x+2}$，余りは **12** である．

1.4.4　剰余の定理と因数定理

■剰余の定理

多項式 $f(x)$ の x に数 a を代入したときの $f(x)$ の値を $f(a)$ と書く*5.

たとえば，$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ とすると

$$f(1) = 1^3 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 7$$

$$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 23$$

である．

【例題：剰余の定理のための補題】

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 8$ とする．

(1) $f(x)$ を $x - 2$ で割ったときの余りを求めよ．
(2) $f(2)$ の値を計算せよ．

【解答】

(1) 割り算を実行すると

$$f(x) = (x - 2)(x^3 + 2x^2 + x + 7) + 6$$

となるので，余りは **6** である．

(2) $f(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 8 = \mathbf{6}$

◀ 組立除法を使うなら

2	1	0	−3	5	−8
		2	4	2	14
	1	2	1	7	6

上の例題では，$f(x)$ を $x - 2$ で割ったときの余りと，$f(2)$ の値が等しくなっているが，これは，偶然に一致したわけではなく，次の理由による．

多項式 $f(x)$ を 1 次式 $x - a$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを r とすると，r は定数であり

$$f(x) = (x - a)Q(x) + r$$

が成り立つ．この式に $x = a$ を代入すると

$$f(a) = (a - a)Q(a) + r = r$$

となり，$f(a)$ が $f(x)$ を $x - a$ で割ったときの余り r と等しいことがわかる．

剰余の定理

多項式 $f(x)$ を $x - a$ で割ったときの余りは $f(a)$ である．

*5 この表し方は FTEXT 数学 I で，『関数』の表し方として学んだ．多項式 polinomial の頭文字をとり $P(x)$ で表すこともある．

【例題：剰余の定理の確認問題】

次の式の組について，左側の式を右側の式で割ったときの余りだけ求めよ(商は求めなくてよい).

(1) x^2+2x+1，$x-1$　　(2) x^3+3，$x+1$

(3) x^3-4x^2-2x+5，$x-2$　　(4) x^3-2x^2-x+6，$x-3$

【解答】

(1) 剰余の定理より，$f(1)=\mathbf{4}$

(2) 剰余の定理より，$f(-1)=\mathbf{2}$

(3) 剰余の定理より，$f(2)=\mathbf{-7}$

(4) 剰余の定理より，$f(3)=\mathbf{12}$

余りを求めるだけならば『剰余の定理』が大変な威力を発揮する.

【暗記：剰余の定理の拡張】

多項式 $f(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ であることを証明せよ.

【解答】

$f(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを r とすると，r は定数であり，次の関係式が成り立つ.

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+r$$

この式の x に $-\dfrac{b}{a}$ を代入すると

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{a}\right) &= \left\{a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right\}Q\left(-\frac{b}{a}\right)+r \\ &= (-b+b)Q\left(-\frac{b}{a}\right)+r \\ &= r \end{aligned}$$

となり，$f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ と余り r が等しいことが分かる. ■

剰余の定理の拡張

多項式 $f(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ となる.

【例題：剰余の定理の利用】

次の各問に答えよ．

(1) 多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると 2 余り，$x-2$ で割ると 3 余る．$f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) 多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると 3 余り，$(x-2)(x-3)$ で割ると $3x-2$ 余る．$f(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ．

(3) 多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると 2 余り，$(x-2)^2$ で割ると $3x-2$ 余る．$f(x)$ を $(x-1)(x-2)^2$ で割ったときの余りを求めよ

【解答】

(1) 【解 1：除法の式を変形して解く】

$f(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると，余りが 2 だから

$$f(x) = (x-1)Q_1(x) + 2$$

◀『多項式の除法の一意性』(p.53) より

とおける．さらに，$Q_1(x)$ を $x-2$ で割ったときの商を $Q_2(x)$，余りを a とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\{Q_2(x)(x-2)+a\}+2 \\ &= (x-1)(x-2)Q_2(x) + ax + 2 - a \end{aligned}$$

◀ $Q_1(x) = Q_2(x)(x-2) + a$ である

ここで，剰余の定理より

$$f(2) = 2a + 2 - a = 3$$
$$\therefore\ a = 1$$

◀ $f(2) = 3$ を使った

となる．よって，求める余りは $\boldsymbol{x+1}$ である．

【解 2：余りの多項式をおく】

$f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの，商を $Q_3(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q_3(x) + ax + b$$

◀『多項式の除法の一意性』(p.53) より

である．ここで，剰余の定理より

$$(f(1) =)\, a + b = 2$$

◀ $f(1) = 2$ を使った

$$(f(2) =)\, 2a + b = 3$$

◀ $f(2) = 3$ を使った

これを解くと $a=1$，$b=1$ であるから，求める余りは $\boldsymbol{x+1}$ である．

(2) 【解 1：除法の式を変形して解く】

$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とす

ると，余りが $3x-2$ だから

$$f(x)=(x-2)(x-3)Q_1(x)+3x-2$$

◀『多項式の除法の一意性』(p.53) より

とおける．さらに，$Q_1(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を $Q_2(x)$，余りを a とすると

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-2)(x-3)\{Q_2(x)(x-1)+a\}+3x-2\\&=(x-1)(x-2)(x-3)Q_2(x)\\&\qquad\qquad+a(x-2)(x-3)+3x-2\end{aligned}$$

◀ $Q_1(x)=Q_2(x)(x-1)+a$ である

である．ここで，剰余の定理より

$$f(1)=a(-1)(-2)+3-2=3$$
$$\therefore\ a=1$$

◀ $f(1)=3$ を使った

となる．よって，求める余りは $(x-2)(x-3)+3x-2=$ $\boldsymbol{x^2-2x+4}$ である．

【解 2:余りの多項式をおく】

$f(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割ったときの，商を $Q_3(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q_4(x)+ax^2+bx+c$$

◀『多項式の除法の一意性』(p.53) より

ここで，剰余の定理より $f(1)=3$，$f(2)=4$，$f(3)=7$ なので

$$(f(1)=)\,a+b+c=3$$
◀ $f(1)=3$ を使った

$$(f(2)=)\,4a+2b+c=4$$
◀ $f(2)=4$ を使った

$$(f(3)=)\,9a+3b+c=7$$
◀ $f(3)=7$ を使った

これを解くと $a=1$，$b=-2$，$c=4$ であるから，求める余りは $\boldsymbol{x^2-2x+4}$ である．

(3)【解 1：除法の式を変形して解く】

$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると，余りが $3x-2$ だから

$$f(x)=(x-2)^2Q_1(x)+3x-2$$

◀『多項式の除法の一意性』(p.53) より

とおける．さらに，$Q_1(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を $Q_2(x)$，余りを a とおくと，

$$f(x)=(x-2)^2\{Q_2(x)(x-1)+a\}+3x-2$$

◀ $Q_1(x)=Q_2(x)(x-1)+a$ である

$$= (x-1)(x-2)^2Q_2(x) + a(x-2)^2 + 3x - 2$$

ここで，剰余の定理より

$$f(1) = a(-1)^2 + 3 - 2 = 2$$
$$\therefore\ a = 1$$

◀ $f(1) = 2$ を使った

であるから, 求める余りは $(x-2)^2+3x-2 = \boldsymbol{x^2 - x + 2}$ である.

【解 2 : 余りの多項式をおく (『微分法』(p.249) を使う) 】

$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると，余りが $3x-2$ だから

$$f(x) = (x-2)^2Q_1(x) + 3x - 2$$

◀ 『多項式の除法の一意性』(p.53) より

とおける．この式を x で微分すると

$$f'(x) = (x-2)Q_1(x) + (x-2)^2Q_1{}'(x) + 3$$
$$= (x-2)\{Q_1(x) + (x-2)Q_1{}'(x)\} + 3$$

◀ 『微分の計算法則』(p.264) の関数の積の微分法を使った

$Q_1(x) + (x-2)Q_1{}'(x)$ は多項式なので，これを $Q_2(x)$ とおくと

$$f'(x) = (x-2)Q_2(x) + 3$$
$$\therefore\ f'(2) = 3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

いま，$f(x)$ を $(x-1)(x-2)^2$ でわったときの商を $Q_3(x)$，余りを $ax^2 + bx + c$ とおくと，

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2Q_3(x) + ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = ((x-2) \text{ を因数に持つ多項式}) + 2ax + b$$

であるから

$$f'(2) = 4a + b = 3$$

◀ ①を使った

さらに，剰余の定理より

$$f(1) = a + b + c = 2$$
$$f(2) = 4a + 2b + c = 4$$

◀ $f(1) = 2$ を使った
◀ $f(2) = 4$ を使った

これを解くと $a = 1$，$b = -1$，$c = 2$ であるから，求める余りは $\boldsymbol{x^2 - x + 2}$ である.

■**因数定理**

多項式 $f(x)$ を 1 次式 $x-a$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを r とすると，r は定数であり

$$f(x)=(x-a)Q(x)+r$$

が成り立つ．この式に $x=a$ を代入すると

$$f(a)=(a-a)Q(a)+r=r$$

となり，$f(a)=r$ がわかり，これが『剰余の定理』(p.58) だった．

特に，$f(x)$ が $x-a$ で割り切れる，つまり $(r=)\ f(a)=0$ のとき

$$f(x)=(x-a)Q(x)$$

と表すことができる．さらにいいかえるならば，$x-a$ は $f(x)$ の因数になっている．

因数定理

$f(x)$ を多項式とすると
「$x-a$ が $f(x)$ の因数である」$\Longleftrightarrow$「$f(a)=0$」

この**因数定理** (factor theorem) を利用して，多項式の因数分解をすることができる．次の例題で具体的にみていこう．

【例題：因数定理による因数分解〜その１〜】

因数定理を利用して，次の式を因数分解せよ．

(1) x^3+3x^2-4　(2) $2x^3-7x^2+9$
(3) $x^4-6x^3+7x^2+6x-8$　(4) $x^4-8x^3-2x^2+72x-63$

$f(1)$ や $f(-1)$ などを計算してみて 0 になるものをみつける．

【解答】

(1) $f(x)=x^3+3x^2-4$ とおく．

$$f(1)=1+3-4=0$$

であるから，因数定理より $f(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．
よって

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)(x^2+4x+4)\\&=\boldsymbol{(x-1)(x+2)^2}\end{aligned}$$

◀ 先に $f(-2)=0$ を見つけてもよい

◀ 組立除法を使うなら

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

(2) $f(x)=2x^3-7x^2+9$ とおく．

$$f(-1)=-2-7+9=0$$

であるから，因数定理より $f(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．
よって

◀ 先に $f(3)=0$ や $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$ を見つけてもよい

$$f(x)=(x+1)(2x^2-9x+9)$$
$$=\boldsymbol{(x+1)(2x-3)(x-3)}$$

◀ 組立除法を使うなら

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -7 & 0 & 9 \\ & & -2 & 9 & -9 \\ \hline & 2 & -9 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

(3) $f(x)=x^4-8x^3+7x^2+6x-8$ とおく．

$$f(1)=1-6+7+6-8=0$$

であるから，因数定理より $f(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．
よって

◀ 先に $f(-1)=0$ や $f(2)=0$ などを見つけてもよい

$$f(x)=(x-1)(x^3-5x^2+2x+8)$$

◀ 組立除法を使うなら

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -6 & 7 & 6 & -8 \\ & & 1 & -5 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & -5 & 2 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

さらに，$g(x)=x^3-5x^2+2x+8$ とおくと

$$g(-1)=-1-5-2+8=0$$

であるから，因数定理より $g(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．
よって

◀ 先に $g(2)=0$ や $g(4)=0$ などを見つけてもよい

$$g(x)=(x+1)(x^2-6x+8)$$
$$=(x+1)(x-2)(x-4)$$

◀ 組立除法を使うなら

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 2 & 8 \\ & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

より，$f(x)=\boldsymbol{(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)}$．

(4) $f(x)=x^4-8x^3-2x^2+72x-63$ とおく．

$$f(1)=1-8-2+72-63=0$$

であるから，因数定理より $f(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．
よって

◀ 先に $f(3)=0$ や $f(-3)=0$ などを見つけてもよい

$$f(x)=(x-1)(x^3-7x^2-9x+63)$$

◀ 組立除法を使うなら

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -8 & -2 & 72 & -63 \\ & & 1 & -7 & -9 & 63 \\ \hline & 1 & -7 & -9 & 63 & \boxed{0} \end{array}$$

さらに，$g(x)=x^3-7x^2-9x+63$ とおくと

$$g(3)=27-63-27+63=0$$

であるから，因数定理より $g(x)$ は $x-3$ を因数にもつ．　．

◀ 先に $g(-3)=0$ や $g(7)=0$ などを見つけてもよい

よって

$$g(x) = (x-3)(x^2-4x-21)$$
$$= (x-3)(x+3)(x-7)$$

より，$f(x) = \mathbf{(x-1)(x-3)(x+3)(x-7)}$ である．

◀ 組立除法を使うなら

3	1	−7	−9	63
		3	−12	−63
	1	−4	−21	0

多項式 $f(x)$ を因数定理を利用して因数分解するとき，$f(a) = 0$ となる a を見つけることが大切である．この a を見つける手段として，次の定理を知っておくとよい．

多項式の因数を見つけるための定理

係数 a_0，a_2，$\cdots$，a_n がすべて整数である多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

に対し，既約分数 $\dfrac{p}{q}$ が，$f\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$ を満たすとき

p は a_0 の約数，q は a_n の約数

である（ただし，約数には負の数も含めるとする）．

この定理の証明は『付録』(p.340) を参照のこと．

$\dfrac{p}{q}$ は $\pm\dfrac{（定数項の約数）}{（最高次の係数の約数）}$ と覚えるとよい．

たとえば，$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ の因数分解について考えてみると，最高次の係数の約数には 1，2 があり，定数項の約数には 1，2，3，6 があるので，$f(a) = 0$ となる a の候補は

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{6}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{6}{2}$$

と，これらにマイナスをつけた数がある．

これらを順に

$$f(1) = 2 - 5 + 7 - 6 \fallingdotseq 0$$
$$f(2) = 2\cdot 2^3 - 5\cdot 2^2 + 7\cdot 2 - 6 \fallingdotseq 0$$
$$\vdots$$

などと調べていくと，$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$ となるので

$$f(x) = (2x-3)(x^2 - x + 2)$$

と因数分解できる．

【例題：因数定理による因数分解〜その２〜】

次の多項式を因数分解せよ

(1) $3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$　　(2) $24x^3 - 22x^2 + x + 2$

【解答】

(1) $f(x) = 3x^2 - 4x^2 + 4x - 1$ とおくと

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

であるから

$$f(x) = \mathbf{(3x - 1)(x^2 - x + 1)}$$

となる．

(2) $f(x) = 24x^3 - 22x^2 + x + 2$ とおくと

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

であるから

$$f(x) = (2x - 1)(12x^2 - 5x - 2)$$

となる．また，$12x^2 - 5x - 2 = (3x - 2)(4x + 1)$ と因数分解できるので

$$f(x) = \mathbf{(2x - 1)(3x - 2)(4x + 1)}$$

となる．

◀ $f(a) = 0$ となる a の候補は

$\pm\frac{1}{1}$，$\pm\frac{1}{3}$

がある

◀ $x^2 - x + 1$ は判別式の値が負となるので，これ以上因数分解できない

◀ $f(a) = 0$ となる a の候補は

$\pm\frac{1}{1}$，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{1}{3}$，$\pm\frac{1}{4}$，$\pm\frac{1}{6}$，$\pm\frac{1}{8}$，$\pm\frac{1}{12}$，$\pm\frac{1}{24}$，$\pm\frac{2}{3}$

がある

1.4.5　多項式の約数と倍数

■多項式の約数と倍数

多項式の約数・倍数

多項式 $f(x)$ が多項式 $g(x)$ で割り切れるとき，すなわち

$$f(x) = g(x)Q(x)$$

となる多項式 $Q(x)$ が存在するとき

$f(x)$ は $g(x)$ の**倍数**（multiple），$g(x)$ は $f(x)$ の**約数**（divisor）

という．

たとえば，$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ であるから，$x^2 - 4x + 3$ は $x - 1$ の倍数であり，$x - 1$ は $x^2 - 4x + 3$ の約数である．

■公約数・公倍数

いくつかの多項式に共通な約数を，それらの多項式の**公約数** (common divisor) といい，公約数の中で次数の最も高いものを**最大公約数** (greatest common divisor) という．

また，いくつかの多項式に共通な倍数を，それらの多項式の**公倍数** (common multiple) といい，公倍数の中で次数の最も低いものを**最小公倍数** (least common multiple) という．

【例題：最大公約数と最小公倍数】

次の各組の多項式の最大公約数と最小公倍数を求めよ．ただし，答えの式は展開しなくてもよい．

(1) x^2-1，$x+1$　　(2) x^2-4x+4，x^2-4

(3) x^2+2x-3，x^2+x-6　　(4) x^3-27，x^2-2x-3

【解答】

(1) $x^2-1=(x+1)(x-1)$ なので，最大公約数は $\boldsymbol{x+1}$，最小公倍数は $\boldsymbol{(x+1)(x-1)}$ である．

(2) $x^2-4x+4=(x-2)^2$，$x^2-4=(x-2)(x+2)$ なので，最大公約数は $\boldsymbol{x+2}$，最小公倍数は $\boldsymbol{(x+2)(x-2)^2}$ である．

(3) $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$，$x^2-x+6=(x+3)(x-2)$ なので，最大公約数は $\boldsymbol{x+3}$，最小公倍数は $\boldsymbol{(x-1)(x+3)(x-2)}$ である．

(4) $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$，$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ なので，最大公約数は $\boldsymbol{x-3}$，最小公倍数は $\boldsymbol{(x-1)(x+3)(x^2+3x+9)}$ である．

1.4.6　分数式の計算

■分数式とは何か

$f(x)$ を多項式，$g(x)$ を定数でない多項式とするとき，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の形で表した式のことを**分数式** (fractional expression) という．

たとえば

$$\frac{2x-1}{x-1},\quad \frac{3a}{x-4b},\quad \frac{x-5}{x^2-2x+3}$$

などは，どれも分数式である．

多項式と分数式を合わせて，**有理式** (rational expression) という．

分数式では，普通の分数と同じように，分母，分子に 0 以外の同じ式をかけてもよいし，分母，分子に共通な因数で割ってもよい．

分数式の基本演算

分数式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ に関して，次の式が成り立つ．

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)\times h(x)}{f(x)\times h(x)},\quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)\div h(x)}{g(x)\div h(x)}$$

ただし，$h(x) \fallingdotseq 0$ とする．

これらの変形を行えば，普通の分数と同じように**約分** (reduction of fraction to its lower terms) や**通分** (reduction fractions to common denominator) ができる．

【例題：分数式の約分】

次の分数式を約分せよ．

(1) $\dfrac{2x-2}{6}$　(2) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$　(3) $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+2x-3}$　(4) $\dfrac{x^2+x-2}{x^3-1}$

【解答】

(1) 実際に約分をすると

$$\frac{2x-2}{6} = \boldsymbol{\frac{x-1}{3}}$$

(2) 分子を因数分解すると

$$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \boldsymbol{x-1}$$

(3) 分母・分子を因数分解すると

$$\frac{x^2-x-12}{x^2+2x-3} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x-1)(x+3)} = \boldsymbol{\frac{x-4}{x-1}}$$

(4) 分母・分子を因数分解すると

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \boldsymbol{\frac{x+2}{x^2+x+1}}$$

分数式の分母と分子に共通な因数がないとき，この分数式は**既約** (irreducible) であるという．

■分数式の乗法と除法

分数式の乗法と除法は，普通の分数の場合と同じように，次の規則にしたがって計算する．

分数式の乗法・除法

$$\frac{f(x)}{g(x)}\times\frac{h(x)}{i(x)}=\frac{f(x)\times h(x)}{f(x)\times i(x)},\quad \frac{f(x)}{g(x)}\div\frac{h(x)}{i(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\times\frac{i(x)}{h(x)}=\frac{f(x)\times i(x)}{g(x)\times h(x)}$$

たとえば

$$\frac{by^2}{ax^2}\div\frac{b^2y}{a^2x}=\frac{by^2}{ax^2}\times\frac{a^2x}{b^2y}=\frac{by^2\times a^2x}{ax^2\times b^2y}=\frac{ay}{bx}$$

$$\frac{x+1}{x}\times\frac{x-2}{x(x+1)}=\frac{(x+1)\times(x-2)}{x\times x(x+1)}=\frac{x-2}{x^2}$$

と計算することができる.

【例題：分数式の乗法と除法】

次の式を計算せよ.

(1) $\dfrac{x-1}{x(x+2)}\times\dfrac{x(x+1)}{x-2}$　　(2) $\dfrac{x+2}{x+4}\times\dfrac{x^2-8x+16}{x(x-4)}$

(3) $\dfrac{x-3}{x^2+x}\div\dfrac{x+2}{x}$　　(4) $\dfrac{x^3-1}{x+2}\div\dfrac{x-1}{x+4}$

【解答】

(1) $\dfrac{(x-1)\times x(x+1)}{x(x+2)(x-2)}=\boldsymbol{\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x+2)}}$

(2) $\dfrac{(x+2)(x-4)^2}{x(x+4)(x-4)}=\boldsymbol{\dfrac{(x+2)(x-4)}{x(x+4)}}$

(3) $\dfrac{(x-3)x}{x(x+2)(x+2)}=\boldsymbol{\dfrac{x-3}{(x+2)^2}}$

(4) $\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)(x+4)}{(x+2)(x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{(x^2+x+1)(x+4)}{x+2}}$

■分数式の加法と減法

分数式の加法と減法は，普通の分数の場合と同じように，次の規則にしたがって計算する.

分数式の乗法・除法

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{f(x)+h(x)}{g(x)},\quad \frac{f(x)}{g(x)}-\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-h(x)}{g(x)}$$

分母が異なる分数式どうしは，通分してから計算する.

たとえば

$$\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)}{(x-2)(x+1)}+\frac{x-2}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{2(x+1)+x-2}{(x-2)(x+1)} = \frac{3x}{(x-2)(x+1)}$$

と計算することができる.

【例題：分数式の加法と減法】

次の式を計算せよ.

(1) $\dfrac{2}{x^2+1} + \dfrac{x}{x^2+1}$ (2) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2-1}$

(3) $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{-x+5}{x+2}$ (4) $\dfrac{3}{x^2-x-2} + \dfrac{1}{x^2-5x+6}$

【解答】

(1) $\dfrac{2+x}{x^2+1} = \boldsymbol{\dfrac{x+2}{x^2+1}}$

(2) $\dfrac{x-1}{x^2-1} + \dfrac{1}{x^2-1} = \boldsymbol{\dfrac{x}{x^2-1}}$

(3) $\dfrac{x-(-x+5)}{x+2} = \boldsymbol{\dfrac{2x-5}{x+2}}$

(4) $\dfrac{3}{(x-2)(x+1)} + \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

$= \dfrac{3(x-3)+x+1}{(x-2)(x+1)(x-3)} = \boldsymbol{\dfrac{4x-8}{x^3-4x^2+x+6}}$

【例題：分数式の恒等式】

次の式が恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ.

(1) $\dfrac{3x^2-x}{x^3-x^2-x+1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$

(2) $\dfrac{1}{x^3+7x^2+14x+8} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{x+4}$

【解答】

(1) 両辺に，$(x+1)(x-1)^2$ を掛けると

$$3x^2 - x = a(x-1)^2 + b(x-1)(x+1) + c(x+1)$$

となる.
両辺に $x=1$ を代入すると

$$3-1 = c(1+1)$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{c=1}$$

両辺に $x=-1$ を代入すると

$$3+1 = a(-1-1)^2$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a=1}$$

両辺に $x = 0$ を代入すると

$$0 = a(0-1)^2 + b(0+1)(0-1) + c(0+1)$$
$$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{b = 2}$$

◀ $a = 1$，$c = 1$ を用いた

(2) 両辺に，$(x+1)(x+2)(x+4)$ を掛けると

$$1 = a(x+2)(x+4) + b(x+1)(x+4) + c(x+1)(x+2)$$

となる．
両辺に $x = -1$ を代入すると

$$1 = a(-1+2)(-1+4)$$
$$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{a = \frac{1}{3}}$$

両辺に $x = -2$ を代入すると

$$1 = b(-2+1)(-2+4)$$
$$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{b = -\frac{1}{2}}$$

両辺に $x = -4$ を代入すると

$$1 = c(-4+1)(-4+2)$$
$$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{c = \frac{1}{6}}$$

§ 1.5
高次方程式

前セクションでは，『因数定理』(p.63) を利用した因数分解を学んだ．これを利用すれば，3 次以上の次数をもつ方程式(高次方程式)を解くこともできる．以下ではその方法を詳しく見ていこう．

1.5.1　因数定理と高次方程式

■高次方程式とは何か

n 次方程式

多項式 $P(x)$ が n 次式であるとき，$P(x) = 0$ の形に表される方程式を **n 次方程式** (equation of n-th degree) という．

たとえば，$x^3 - 2x^2 + 5x + 8 = 0$ は 3 次方程式，$2x^4 - 8x^3 + \frac{7}{3}x^2 - 2 = 0$ は 4 次方程式である．特に，3 次以上の方程式を**高次方程式** (equation of higher degree) という．

■簡単な高次方程式

高次方程式 $P(x) = 0$ を解くことは，一般的には難しいが，因数分解できるときには簡単に解くことができる．たとえば，方程式 $x^3 = 1$ では

$$\begin{aligned} & x^3 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)(x^2+x+1) = 0 \qquad \leftarrow \quad a^2 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ \Leftrightarrow\ & x - 1 = 0\,,\ x^2 + x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 1\,,\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

と解を求めることができる．

【例題：簡単な高次方程式】

次の方程式を複素数の範囲で解け．

(1) $x^3 = 27$　　　(2) $x^3 = -8$

【解答】

(1) $$\begin{aligned} & x^3 = 27 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - 27 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ (x-3)(x^2+3x+9)=0$$

$$\Leftrightarrow\ x-3=0,\ x^2-3x+9=0$$

$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x=3,\ \frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}}$$

(2)
$$x^3=-8$$

$$\Leftrightarrow\ x^3+8=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x+2)(x^2-2x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow\ x+2=0,\ x^2-2x+4=0$$

$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}i}$$

3 乗して a になる数を a の 3 乗根といい，方程式 $x^3=a$ の解として求めることができる．さきほどの例から，1 の 3 乗根は 1, $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である．

【暗記：1 の 3 乗根 ω】

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，次のことを証明せよ．

(1) $\omega^3=1$

(2) $\omega^2+\omega+1=0$

(3) 別のもう 1 つの虚数解は $\overline{\omega}$ であり ω^2 と一致する．

【解答】

(1) ω は $x^3=1$ の解であるので明らか． ■

(2) $x^3=1$ を解くと

$$x^3=1$$

$$\Leftrightarrow\ x^3-1=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\ x-1=0\,,\ x^2+x+1=0$$

$$\Leftrightarrow\ x=1\,,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

このうち，$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ または $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ が ω であるが，これらはどちらも，方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるので，$\omega^2+\omega+1=0$ である． ■

(3) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ と $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ は共役の関係にあり

$$\begin{aligned}&\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\\&=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}\\&=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2\\&=\frac{1+2\sqrt{3}i-3}{4}\\&=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

より，$\overline{\omega}=\omega^2$ が成り立つ． ■

【例題：2 次方程式に帰着できる高次方程式】

次の方程式を複素数の範囲で解け．

(1) $x^4-13x^2+9=0$　　(2) $x^4-2x^2-3=0$

(3) $x^4+x^2-20=0$　　(4) $(x^2+2x)^2+4(x^2+2x)+3=0$

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}&x^4-13x^2+9=0\\\Leftrightarrow\ &x^2=\frac{13\pm\sqrt{133}}{2}\\\Leftrightarrow\ &x=\pm\sqrt{\frac{13\pm\sqrt{133}}{2}}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&x^4-2x^2-3=0\\\Leftrightarrow\ &(x^2+1)(x^2-3)=0\\\Leftrightarrow\ &x^2+1=0,\ x^2-3=0\\\Leftrightarrow\ &\boldsymbol{x=\pm i,\ \pm\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&x^4+x^2-20=0\\\Leftrightarrow\ &(x^2+5)(x^2-4)=0\\\Leftrightarrow\ &x^2+5=0,\ x^2-4=0\\\Leftrightarrow\ &\boldsymbol{x=\pm\sqrt{5}i,\ \pm 2}\end{aligned}$$

(4)
$$(x^2+2x)^2+4(x^2+2x)+3=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x^2+2x+1)(x^2+2x+3)=0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2+2x+1=0,\ x^2+2x+3=0$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x=-1,\ -1\pm\sqrt{2}i}$$

■因数定理を利用した高次方程式の解法

すぐに因数分解が思いつかなくても，『因数定理』(p.63) を利用して因数を探し当て，因数分解を行うことができた．因数分解ができれば，高次方程式を解くこともできる．

【例題：高次方程式】

次の方程式を解け．

(1) $x^3+3x^2-4=0$　　(2) $2x^3-7x^2+9=0$

(3) $x^4-6x^3+7x^2+6x-8=0$　　(4) $x^4-8x^3-2x^2+72x-63=0$

【解答】

(1) $f(x)=x^3+3x^2-4$ とおく．

$$f(1)=1+3-4=0$$

であるから，因数定理より $f(x)$ は $x-1$ を因数にもつのがわかる．

◀ 先に $f(-2)=0$ を見つけてもよい

よって，$f(x)=0$ は

$$(x-1)(x^2+4x+4)=0$$
$$\Leftrightarrow\ (x-1)(x+2)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x=1,\ -2}$$

◀ 組立除法を使うなら

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

(2) $f(x)=2x^3-7x^2+9$ とおく．

$$f(-1)=-2-7+9=0$$

であるから，因数定理より $f(x)$ は $x+1$ を因数にもつのがわかる．

◀ 先に $f(3)=0$ や $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$ を見つけてもよい

よって，$f(x)=0$ は

$$(x+1)(2x^2-9x+9)=0$$
$$\Leftrightarrow\ (x+1)(2x-3)(x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x=-1,\ \frac{2}{3},\ 3}$$

◀ 組立除法を使うなら

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -7 & 0 & 9 \\ & & -2 & 9 & -9 \\ \hline & 2 & -9 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

(3) $f(x)=x^4-8x^3+7x^2+6x-8$ とおく．

$$f(1)=1-6+7+6-8=0$$

であるから，因数定理より $f(x)$ は $x-1$ を因数にもつのがわかる．

よって

$$f(x)=(x-1)(x^3-5x^2+2x+8)$$

さらに，$g(x)=x^3-5x^2+2x+8$ とおくと

$$g(-1)=-1-5-2+8=0$$

であるから，因数定理より $g(x)$ は $x+1$ を因数にもつのがわかる．

よって

$$\begin{aligned} g(x)&=(x+1)(x^2-6x+8)\\ &=(x+1)(x-2)(x-4) \end{aligned}$$

より，$f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$ である．

以上より，$f(x)=0$ の解は，$\boldsymbol{x=-1,\ 1,\ 2,\ 4}$ となる．

◀ 先に $f(-1)=0$ や $f(2)=0$ などを見つけてもよい

◀ 組立除法を使うなら

1	1	-6	7	6	-8
		1	-5	2	8
	1	-5	2	8	$\boxed{0}$

◀ 先に $g(2)=0$ や $g(4)=0$ などを見つけてもよい

◀ 組立除法を使うなら

-1	1	-5	2	8
		-1	6	-8
	1	-6	8	$\boxed{0}$

(4) $f(x)=x^4-8x^3-2x^2+72x-63$ とおく．

$$f(1)=1-8-2+72-63=0$$

であるから，因数定理より $f(x)$ は $x-1$ を因数にもつのがわかる．

よって

$$f(x)=(x-1)(x^3-7x^2-9x+63)$$

さらに，$g(x)=x^3-7x^2-9x+63$ とおくと

$$g(3)=27-63-27+63=0$$

であるから，因数定理より $g(x)$ は $x-3$ を因数にもつのがわかる．

よって

$$\begin{aligned} g(x)&=(x-3)(x^2-4x-21)\\ &=(x-3)(x+3)(x-7) \end{aligned}$$

より，$f(x)=(x-1)(x-3)(x+3)(x-7)$ である．

以上より，$f(x)=0$ の解は，$x=1,\ 3,\ -3,\ 7$ となる．

◀ 先に $f(3)=0$ や $f(-3)=0$ などを見つけてもよい

◀ 組立除法を使うなら

1	1	-8	-2	72	-63
		1	-7	-9	63
	1	-7	-9	63	$\boxed{0}$

◀ 先に $g(-3)=0$ や $g(7)=0$ などを見つけてもよい

◀ 組立除法を使うなら

3	1	-7	-9	63
		3	-12	-63
	1	-4	-21	$\boxed{0}$

上の例題の (1) のように，方程式 $(x-1)(x+2)^2=0$ の解 $x=-2$ を，この方程式の **2 重解** (double solution) という．また，たとえば方程式 $(x-1)(x+2)^3=0$ の解 $x=-2$ を，こ

の方程式の **3 重解** (triple solution) という．

複素数の範囲では，方程式の 2 重解を重なった 2 個の解，3 重解を重なった 3 個の解などと数えることにすると，2 次方程式では 2 個の解，3 次方程式は 3 個の解，4 次方程式では 4 個の解をもつ．一般の場合では，次のことが知られている．

代数学の基本定理

n 次方程式では，複素数の範囲で，n 個の解をもつ．

【例題：方程式の重解条件】

3 次方程式 $3x^3 - (3+a)x^2 + a = 0$ が重解をもつとき，定数 a の値とそのときの解をすべて求めよ．ただし，a は実数である．

【解答】

$3x^3 - (3+a)x^2 + a = (x-1)(3x^2 - ax - a)$ であるので，$f(x) = 3x^2 - ax - a$ とおくと，3 次方程式が重解をもつためには，$f(x) = 0$ が $x = 1$ に解をもつか，$f(x) = 0$ が重解をもてばよい．

1) $f(x) = 0$ が $x = 1$ に解をもつとき

$f(1) = 0$ より

$$3 - a - a = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = \frac{3}{2}}$$

このとき，$f(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$ であるから，3 次方程式の解は

$$\begin{aligned}
&(x-1)\left(3x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{3}{2}(x-1)^2(2x+1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\boldsymbol{x = 1,\ -\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

2) $f(x) = 0$ が重解をもつとき

判別式を考えて

$$D = a^2 + 12a = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 0,\ -12}$$

となる．

$a = 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&f(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

であるので，3 次方程式の解は $\boldsymbol{x = 1,\ x = 0}$ である．

$a = -12$ のとき

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 + 12x + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3(x+2)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = -2 \end{aligned}$$

であるので, 3 次方程式の解は $\boldsymbol{x = 1,\ x = -2}$ である.

1.5.2　高次不等式

■高次不等式とは何か

n 次不等式

多項式 $P(x)$ が n 次式であるとき，$P(x) \geqq 0$ や $P(x) < 0$ などで表される不等式を **n 次不等式** (inequality of n-th degree) という.

たとえば，$x^3 - 2x^2 + 5x + 8 \geqq 0$ は 3 次不等式，$2x^4 - 8x^3 + \dfrac{7}{3}x^2 - 2 < 0$ は 4 次不等式である．特に，3 次以上の不等式を**高次不等式** (inequality of higher degree) という.

なお，方程式の場合とは違い，不等式の場合には数の大小関係を扱うので，複素数については考えない，つまり x は実数の範囲でのみ考える.

■簡単な高次不等式

高次不等式を解くことは一般的には難しいが，高次方程式と同様，因数分解できるときには解くことができる．たとえば，方程式 $x^3 \geqq 1$ では

$$\begin{aligned} & x^3 \geqq 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - 1 \geqq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)(x^2 + x + 1) \geqq 0 \qquad \leftarrow \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \text{ を使った} \end{aligned}$$

いま，$x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ なので，$(x-1)\underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{常に正}} \geqq 0$ となるのは，$x - 1 \geqq 0$，つまり $x \geqq 1$ と解くことができる.

【例題：簡単な高次不等式】

次の不等式を解け.

(1) $x^3 \geqq 27$　　(2) $x^3 < -8$　　(3) $x^3 - 9x < 0$　　(4) $x^3 - x^2 \geqq 0$

【解答】

(1)
$$\begin{aligned} & x^3 \geqq 27 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - 27 \geqq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ (x-3)(x^2+3x+9) \geqq 0$$

◀ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ を使った

いま，$x^2+3x+9 = \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4} > 0$ なので，$(x-3)(x^2+3x+9) \geqq 0$ となるのは，$x-3 \geqq 0$，つまり $\boldsymbol{x \geqq 3}$ である．

(2)　$x^3 < -8$

$$\Leftrightarrow\ x^3+8 < 0$$

$$\Leftrightarrow\ (x+2)(x^2-2x+4) < 0$$

◀ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ を使った

いま，$x^2-2x+4 = (x-1)^2+3 > 0$ なので，$(x+2)(x^2-2x+4) < 0$ となるのは，$x+2 < 0$，つまり $\boldsymbol{x < -2}$ である．

(3)　$x^3 - 9x < 0$

$$\Leftrightarrow\ x(x^2-9) < 0$$

$$\Leftrightarrow\ (x+3)x(x-3) < 0$$

いま，$(x+3)x(x-3)$ の符号は x の値に応じて，以下のようにまとめることができる．

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+3)x(x-3)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

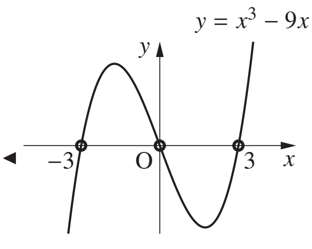
これより，$(x+3)x(x-3) < 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{x < -3}$**，**$\boldsymbol{0 < x < 3}$ である．

【別解：3 次関数のグラフを使う方法】

◀ この解法について詳しくは『3 次関数のグラフを使った 3 次不等式の解法』(p.283) で学ぶ

$f(x) = x^3 - 9x < 0$ とおくと

$$f(x) = x(x^2-9) = (x+3)x(x-3)$$



より $y = f(x)$ のグラフは右図となるので，$f(x) < 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{x < -3}$**，**$\boldsymbol{0 < x < 3}$ である．

(4)　$x^3 - x^2 \geqq 0$

$$\Leftrightarrow\ x^2(x-1) \geqq 0$$

いま，$x^2(x-1)$ の符号は x の値に応じて，以下のようにまとめることができる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
x^2	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

これより，$x^2(x-1) \geqq 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{x = 0}$，$\boldsymbol{1 \leqq x}$ である．

【別解：3 次関数のグラフを使う方法】

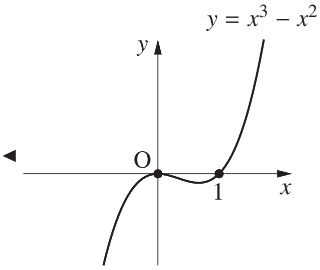
◀ この解法について詳しくは『3 次関数のグラフを使った 3 次不等式の解法』(p.283) で学ぶ

$f(x) = x^3 - x^2 < 0$ とおくと

$$f(x) = x^2(x-1)$$

より $y = f(x)$ のグラフは右図となるので，$f(x) \geqq 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{x = 0}$，$\boldsymbol{1 \leqq x}$ である．

◀



■因数定理を利用した高次不等式の解法

高次方程式の場合 (p.75 参照) と同様に，因数定理を利用して因数分解できれば，高次不等式を解くことができる．

【例題：高次不等式】

次の不等式を解け．

(1) $x^3 + 3x^2 - 4 > 0$　　(2) $2x^3 - 7x^2 + 9 \leqq 0$

(3) $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 < 0$　　(4) $x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 72x - 63 \geqq 0$

【解答】

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ とおく．

$$f(1) = 1 + 3 - 4 = 0$$

であるから，因数定理より $f(x)$ は $x - 1$ を因数にもつのがわかる．

◀ 先に $f(-2) = 0$ を見つけてもよい

よって，$f(x) > 0$ は

$$(x-1)(x^2 + 4x + 4) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ (x-1)(x+2)^2 > 0$$

◀ 組立除法を使うなら

1	1	3	0	-4
		1	4	4
	1	4	4	0

いま，$(x-1)(x+2)^2$ の符号は x の値に応じて，以下のようにまとめることができる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)(x+2)^2$	$-$	0	$-$	0	$+$

これより，$(x-1)x^2>0$ を満たすのは，$\mathbf{1<x}$ である．

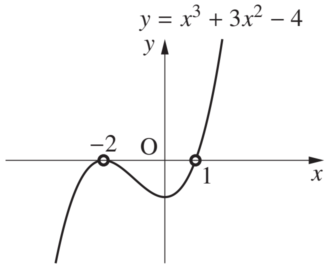
【別解：3 次関数のグラフを使う方法】

◀ この解法について詳しくは『3 次関数のグラフを使った 3 次不等式の解法』(p.283) で学ぶ

$f(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと

$$f(x)=(x-1)(x+2)^2$$

より $y=f(x)$ のグラフは右図となるので，$f(x)>0$ を満たすのは，$\mathbf{1<x}$ である．



(2) $f(x)=2x^3-7x^2+9$ とおく．

$$f(-1)=-2-7+9=0$$

であるから，因数定理より $f(x)$ は $x+1$ を因数にもつのがわかる．

◀ 先に $f(3)=0$ や $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$ を見つけてもよい

よって，$f(x)\leqq 0$ は

$$\begin{aligned} &(x+1)(2x^2-9x+9)\leqq 0 \\ \Leftrightarrow\ &(x+1)(2x-3)(x-3)\leqq 0 \end{aligned}$$

◀ 組立除法を使うなら

-1	2	-7	0	9
		-2	9	-9
	2	-9	9	0

いま，$(x+1)(2x-3)(x-3)$ の符号は x の値に応じて，以下のようにまとめることができる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

これより，$(x+1)(2x-3)(x-3)\leqq 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{x\leqq -1,\ \frac{3}{2}\leqq x\leqq 3}$ である．

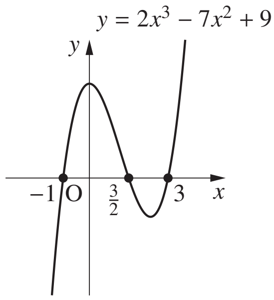
【別解：3 次関数のグラフを使う方法】

◀ この解法について詳しくは『3 次関数のグラフを使った 3 次不等式の解法』(p.283) で学ぶ

$f(x)=2x^3-7x^2+9$ とおくと

$$f(x)=(x+1)(2x-3)(x-3)$$

より $y=f(x)$ のグラフは右図となるので，$f(x)\leqq 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{x\leqq -1,\ \frac{3}{2}\leqq x\leqq 3}$ である．



(3) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$ とおく．

$$f(1) = 1 - 6 + 7 + 6 - 8 = 0$$

であるから，因数定理より $f(x)$ は $x - 1$ を因数にもつのがわかる．
よって

$$f(x) = (x - 1)(x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$$

◀ 先に $f(-1) = 0$ や $f(2) = 0$ などを見つけてもよい

◀ 組立除法を使うなら

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -6 & 7 & 6 & -8 \\ & & 1 & -5 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & -5 & 2 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

さらに，$g(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ とおくと

$$g(-1) = -1 - 5 - 2 + 8 = 0$$

であるから，因数定理より $g(x)$ は $x + 1$ を因数にもつのがわかる．
よって

$$\begin{aligned} g(x) &= (x + 1)(x^2 - 6x + 8) \\ &= (x + 1)(x - 2)(x - 4) \end{aligned}$$

◀ 先に $g(2) = 0$ や $g(4) = 0$ などを見つけてもよい

◀ 組立除法を使うなら

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 2 & 8 \\ & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

である．以上から，$f(x) < 0$ は

$$\begin{aligned} & (x - 1)(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) < 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 4) < 0 \end{aligned}$$

いま，$(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$ の符号は x の値に応じて，以下のようにまとめることができる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

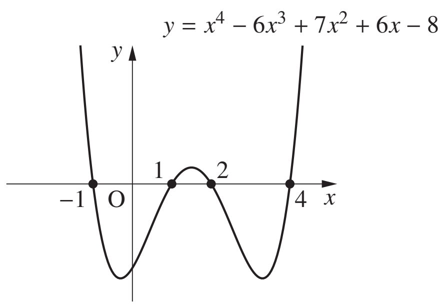
これより，$(x+1)(x-1)(x-2)(x-4) < 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{-1 < x < 1,\ 2 < x < 4}$ である．

【別解：4 次関数のグラフを使う方法】
$f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$ とおくと

$$f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 4)$$

より $y = f(x)$ のグラフは右図となるので，$f(x) < 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{-1 < x < 1,\ 2 < x < 4}$ である．

◀



(4) $f(x) = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 72x - 63$ とおく．

$$f(1) = 1 - 8 - 2 + 72 - 63 = 0$$

であるから，因数定理より $f(x)$ は $x-1$ を因数にもつのがわかる．
よって

$$f(x) = (x-1)(x^3 - 7x^2 - 9x + 63)$$

◀ 先に $f(3) = 0$ や $f(-3) = 0$ などを見つけてもよい

◀ 組立除法を使うなら

1	1	−8	−2	72	−63
		1	−7	−9	63
	1	−7	−9	63	0

さらに，$g(x) = x^3 - 7x^2 - 9x + 63$ とおくと

$$g(3) = 27 - 63 - 27 + 63 = 0$$

であるから，因数定理より $g(x)$ は $x-3$ を因数にもつのがわかる．よって，

$$g(x) = (x-3)(x^2 - 4x - 21)$$
$$= (x-3)(x+3)(x-7)$$

◀ 先に $g(-3) = 0$ や $g(7) = 0$ などを見つけてもよい

◀ 組立除法を使うなら

3	1	−7	−9	63
		3	−12	−63
	1	−4	−21	0

である．以上から $f(x) \geqq 0$ は

$$(x-1)(x^3 - 7x^2 - 9x + 63) \geqq 0$$
$$\Leftrightarrow\ (x+3)(x-1)(x-3)(x-7) \geqq 0$$

いま，$(x+3)(x-1)(x-3)(x-7)$ の符号は x の値に応じて，以下のようにまとめることができる．

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	7	$\cdots$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

これより，$(x+3)(x-1)(x-3)(x-7) \geqq 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{x \leqq -3,\ 1 \leqq x \leqq 3,\ 7 \leqq x}$ である．

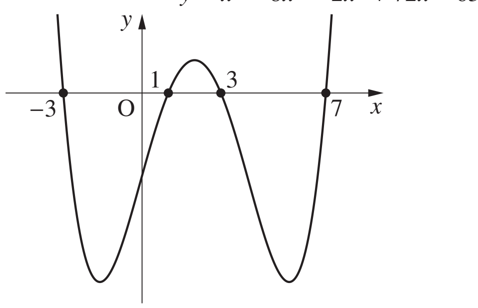
【別解：4次関数のグラフを使う方法】
$f(x) = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 72x - 63$ とおくと

$$f(x) = (x+3)(x-1)(x-3)(x-7)$$

より $y = f(x)$ のグラフは右図となるので，$f(x) \geqq 0$ を満たすのは，$\boldsymbol{x \leqq -3,\ 1 \leqq x \leqq 3,\ 7 \leqq x}$ である．

◀ この解法について詳しくは『4次関数のグラフを使った4次不等式の解法』(p.??) で学ぶ．

◀



1.5.3　解と係数の関係

■2 次方程式の解と係数の関係

$f(x) = x^2 + ax + b$ とし，2 次方程式 $f(x) = 0$ を考える．$f(x) = 0$ の 2 解を α，β とすると，$f(\alpha) = 0$，$f(\beta) = 0$ なので，$f(x)$ は $x - \alpha$ および $x - \beta$ を因数にもつのがわかるので

$$(f(x) =)\, x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$$

とおける．

$(x - \alpha)(x - \beta)$ を展開すると $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ であり

$$x^2 + ax + b = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

これらは多項式として等しいので，両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} a = -(\alpha + \beta) \\ b = \alpha\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = b \end{cases}$$

が成り立つ．

2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 解を α，β とすると

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = b \end{cases}$$

が成り立つ．

x^2 の係数が 1 でないときでも，その値で方程式全体を割ることにより，x^2 の係数が 1 である方程式に変え考えることができる．

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

これより，$ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解を α，β とすると

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

とわかる．

【例題：2 次方程式の解と係数の関係】

次の 2 次方程式の 2 解を α，β とする．$\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ の値を求めよ．

(1) $x^2 - 5x + 7 = 0$　　(2) $3x^2 + 8x - 6 = 0$

【解答】

(1) 2 次方程式の解と係数の関係から

$\alpha+\beta=\mathbf{5}$

$\alpha\beta=\mathbf{7}$

(2) 式全体を 3 で割り，$x^2+\frac{8}{3}-2=0$．2 次方程式の解と係数の関係から

$\alpha+\beta=\mathbf{-\frac{8}{3}}$

$\alpha\beta=\mathbf{-2}$

【例題：2 次方程式の解と係数の関係の利用】

2 次方程式 $2x^2-6x+7=0$ の 2 解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2$　(2) $(\alpha-2)(\beta-2)$　(3) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

(4) $\alpha^3+\beta^3$　(5) $\alpha^4+\beta^4$　(6) $\alpha^5+\beta^5$

【解答】

2 次方程式の解と係数の関係より

$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=\frac{7}{2}$ ……………………… ①

である．

(1) $\alpha^2+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=3^2-2\cdot\frac{7}{2}$

$=9-7=\mathbf{2}$

◀ 対称式は基本対称式の組合せであらわすことができる『対称式の定理』(p.14)

◀ ① を使った

(2) $(\alpha-2)(\beta-2)$

$=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$

$=\frac{7}{2}-2\cdot3+4$

$=\mathbf{\frac{3}{2}}$

◀ 対称式は基本対称式の組合せであらわすことができる『対称式の定理』(p.14)

◀ ① を使った

【別解】

$2x^2-6x+7=2(x-\alpha)(x-\beta)$ の両辺に $x=2$ を代入すると

$3=2(2-\alpha)(2-\beta)$

$\Leftrightarrow\ (\alpha-2)(\beta-2)=\mathbf{\frac{3}{2}}$

(3)

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}$$
$$=\frac{2}{\left(\frac{7}{2}\right)^2}$$
$$=\mathbf{\frac{8}{49}}$$

◀対称式は基本対称式の組合せであらわすことができる『対称式の定理』(p.14)

◀(1) と ① を使った

(4)

$$\alpha^3+\beta^3$$
$$=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$
$$=3\left(2-\frac{7}{2}\right)$$
$$=\mathbf{-\frac{9}{2}}$$

◀対称式は基本対称式の組合せであらわすことができる『対称式の定理』(p.14)

◀(1) と ① を使った

(5)

$$\alpha^4+\beta^4$$
$$=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$$
$$=2^2-2\left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$=\mathbf{-\frac{41}{2}}$$

◀対称式は基本対称式の組合せであらわすことができる『対称式の定理』(p.14)

◀(1) と ① を使った

(6)

$$\alpha^5+\beta^5$$
$$=(\alpha^3+\beta^3)(\alpha^2+\beta^2)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$$
$$=\left(-\frac{9}{2}\right)\cdot 2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\cdot 3$$
$$=\mathbf{-\frac{183}{4}}$$

◀対称式は基本対称式の組合せであらわすことができる『対称式の定理』(p.14)

◀(1), (4) と ① を使った

【暗記：2 次方程式の解と係数の関係の逆】

α, β に関する連立方程式

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-a & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta=b & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の解は，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 解であることを証明せよ.

【解答】

①より

$$\beta=-a-\alpha \quad \cdots\cdots ③$$

これを②に代入して

$$\alpha(-a-\alpha) = b$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + a\alpha + b = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

これより，α は 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解であることがわかる．

また，このとき $x^2 + ax + b$ の x に β を代入すると

$$\begin{aligned}&\beta^2 + a\beta + b\\ =& (-a-\alpha)^2 + a(-a-\alpha) + b\\ =& \alpha^2 + a\alpha + b\\ =& 0\end{aligned}$$

◀ ③より

◀ ④より

となり，β も 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解であることがわかる．■

2 次方程式の解と係数の関係の逆

α，β に関する連立方程式

$$\begin{cases}\alpha+\beta = -a\\ \alpha\beta = b\end{cases}$$

の解は，2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 解である．

【例題：2 次方程式の解と係数の関係の逆の利用】

次の連立方程式を解け．

(1) $\begin{cases}x+y=3\\ xy=-10\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x+y=-\dfrac{5}{2}\\ xy=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+y=-2\\ x^2+y^2=20\end{cases}$　(4) $\begin{cases}xy=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

【解答】

(1) 和が 3，積が -10 となる 2 数は，2 次方程式 $t^2 - 3t - 10 = 0$ の解である．

$$\begin{aligned}& t^2 - 3t - 10 = 0\\ \Leftrightarrow\ & (t-5)(t+2) = 0\\ \Leftrightarrow\ & t = -2,\ 5\end{aligned}$$

より，$\boldsymbol{(x,\ y) = (-2,\ 5),\ (5,\ -2)}$．

(2) 和が $-\dfrac{5}{2}$，積が $-\dfrac{3}{2}$ となる 2 数は，2 次方程式 $t^2 +$

$\frac{5}{2}t - \frac{3}{2} = 0$ の解である．

$$
\begin{aligned}
& t^2 + \frac{5}{2}t - \frac{3}{2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(t - \frac{1}{2}\right)(t+3) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & t = \frac{1}{2},\ -3
\end{aligned}
$$

より，$\boldsymbol{(x,\ y) = \left(\frac{1}{2},\ -3\right),\ \left(-3,\ \frac{1}{2}\right)}$.

(3) 連立方程式を変形していくと

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x + y = -2 \\ (x+y)^2 - 2xy = 20 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x + y = -2 \\ (-2)^2 - 2xy = 20 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -8 \end{cases}
\end{aligned}
$$

和が -2, 積が -8 となる 2 数は, 2 次方程式 $t^2+2t-8=0$ の解である.

$$
\begin{aligned}
& t^2 + 2t - 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (t+4)(t-2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & t = -4,\ 2
\end{aligned}
$$

より，$\boldsymbol{(x,\ y) = (-4,\ 2),\ (2,\ -4)}$.

(4) 連立方程式を変形していくと

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} xy = 1 \\ (x+y)^2 - 2xy = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} xy = 1 \\ (x+y)^2 - 2 \cdot 1 = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = \pm\sqrt{3} \end{cases}
\end{aligned}
$$

和が $\pm\sqrt{3}$，積が 1 となる 2 数は，2 次方程式 $t^2 \mp \sqrt{3}t + 1 = 0$ の解である．

$$
t^2 - \sqrt{3}t + 1 = 0
$$

$$\Leftrightarrow \ t = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$$

また

$$t^2 + \sqrt{3}t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ t = \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}$$

より

$$\boldsymbol{(x,\ y) =}$$
$$\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2},\ \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right),}$$
$$\boldsymbol{\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2},\ \frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2},\ \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)}$$

■3 次方程式の解と係数の関係

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とし，3 次方程式 $f(x) = 0$ を考える．$f(x) = 0$ の 3 解を α，β，γ とすると，$f(\alpha) = 0$，$f(\beta) = 0$，$f(\gamma) = 0$ なので，$f(x)$ は $x - \alpha$，$x - \beta$ および $x - \gamma$ を因数にもつのがわかるので

$$(f(x) =)\, x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

とおける．

$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ を展開すると $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$ であり

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

これらは多項式として等しいので，両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} a = -(\alpha + \beta + \gamma) \\ b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \\ c = -\alpha\beta\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \\ \alpha\beta\gamma = -c \end{cases}$$

が成り立つ．

3 次方程式の解と係数の関係

3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の 3 解を α，β，γ とすると

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \\ \alpha\beta\gamma = -c \end{cases}$$

が成り立つ．

2 次方程式の場合と同様に，x^3 の係数が 1 でないときでも，その値で方程式全体を割ることにより，x^3 の係数が 1 である方程式に変え考えることができる．

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \iff x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

これより，$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 解を α，β，γ とすると

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

とわかる．

2 次方程式と 3 次方程式に限らず，解と係数の関係は一般の n 次方程式まで成立する．

【例題：3 次方程式の解と係数の関係】

次の 3 次方程式の 3 解を α，β，γ とする．$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ および $\alpha\beta\gamma$ の値を求めよ．

(1) $x^3-5x^2+7x-1=0$　　(2) $3x^3+8x^2-6x+5=0$

【解答】

(1) 3 次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=\mathbf{5}$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\mathbf{7}$$
$$\alpha\beta\gamma=\mathbf{1}$$

(2) 式全体を 3 で割り，$x^3+\frac{8}{3}x^2-2x+\frac{5}{3}=0$．3 次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=\boldsymbol{-\frac{8}{3}}$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\mathbf{-2}$$
$$\alpha\beta\gamma=\boldsymbol{-\frac{5}{3}}$$

【例題：3 次方程式の解と係数の関係の利用】

3 次方程式 $x^3-3x+5=0$ の 3 解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

(3) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$　　(4) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

【解答】

3 次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=-5 \quad \cdots\cdots ①$$

である．

(1)
$$\begin{aligned}&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\\ =&(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\ =&0^2-2\cdot(-3)\\ =&\mathbf{6}\end{aligned}$$

◀ ① を使った

(2)
$$\begin{aligned}&(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\\ =&\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1\\ =&-5-3+0+1\\ =&\mathbf{-7}\end{aligned}$$

◀ ① を使った

【別解】
$x^3-3x+5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ の両辺に $x=-1$ を代入すると

$$\begin{aligned}&7=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)\\ \Leftrightarrow\ &(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\mathbf{-7}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\\ =&\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\\ =&\frac{-3}{-5}\\ =&\mathbf{\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

◀ ① を使った

(4)
$$\begin{aligned}&\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\\ =&(\alpha+\beta+\gamma)\left\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right\}\\ &\qquad+3\alpha\beta\gamma\\ =&0\cdot\{6-(-3)\}+3\cdot(-5)\\ =&\mathbf{-15}\end{aligned}$$

◀ (1) と ① を使った

1.5.4　実数が係数である方程式の共役解

■2 次方程式の場合

2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ は

$$x^2+2x+3=0$$
$$\Leftrightarrow\ x=-1\pm\sqrt{11}i$$

と解け，共役な複素数である $-1+\sqrt{11}i$ と $-1-\sqrt{11}i$ を解にもつのがわかる．

a_2，a_1，a_0 を実数とするとき，これらを係数とする 2 次方程式

$$a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

は

$$x=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1{}^2-4a_2a_0}}{2a_2}$$

と解けるので，判別式 $a_1{}^2-4a_2a_0$ の値が負であるとき，共役な複素数である

$$\frac{-a_1+\sqrt{4a_2a_0-a_1{}^2}i}{2a_2}\ と\ \frac{-a_1-\sqrt{4a_2a_0-a_1{}^2}i}{2a_2}$$

を解にもつことがわかる．

判別式の値が負のとき，2 次方程式が共役な複素数を解にもつことは, , 次のような方法で示すこともできる．

a_2，a_1，a_0 を実数とするとき，これらを係数とする 2 次方程式

$$a_2x^2+a_1x+a_0=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が $x=\alpha$ という複素数解をもつとすると，①に α を代入して

$$a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

いま，①の左辺に $x=\overline{\alpha}$ を代入してみると

$$\begin{aligned}
&a_2\overline{\alpha}^2+a_1\overline{\alpha}+a_0\\
&=a_2\overline{\alpha^2}+a_1\overline{\alpha}+a_0 && \leftarrow『共役な複素数の性質』(p.40)\\
&=\overline{a_2}\,\overline{\alpha^2}+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}+\overline{a_0} && \leftarrow『複素数の実数条件と純虚数条件』(p.39)\\
&=\overline{a_2\alpha^2}+\overline{a_1\alpha}+\overline{a_0} && \leftarrow『共役な複素数の性質』(p.40)\\
&=\overline{a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0} && \leftarrow『共役な複素数の性質』(p.40)\\
&=0 && \leftarrow ②より
\end{aligned}$$

となるので，①は共役な複素数解 $x=\overline{\alpha}$ をもつ．

■3 次方程式の場合

【暗記：実数係数の 3 次方程式の共役複素数解】

a_3，a_2，a_1，a_0 を実数とするとき，これらを係数とする 3 次方程式

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

が $x = \alpha$ という複素数解をもつとき，共役な複素数 $x = \overline{\alpha}$ も解にもつことを証明せよ．

【解答】

①が $x = \alpha$ という複素数解をもつとすると，①に α を代入して

$$a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

いま，①の左辺に $x = \overline{\alpha}$ を代入してみると

$$\begin{aligned}
& a_3\overline{\alpha}^3 + a_2\overline{\alpha}^2 + a_1\overline{\alpha} + a_0 \\
&= a_3\overline{\alpha^3} + a_2\overline{\alpha^2} + a_1\overline{\alpha} + a_0 \\
&= \overline{a_3}\,\overline{\alpha^3} + \overline{a_2}\,\overline{\alpha^2} + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_3\alpha^3} + \overline{a_2\alpha^2} + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

◀『共役な複素数の性質』(p.40)

◀『複素数の実数条件と純虚数条件』(p.39)

◀『共役な複素数の性質』(p.40)

◀『共役な複素数の性質』(p.40)

◀ ②より

となるので，①は共役な複素数解 $x = \overline{\alpha}$ をもつのがわかる． ■

一般に次のことがいえる．

実数係数の n 次方程式の共役複素数解

係数がすべて実数である n 次方程式 $P(x) = 0$ が，$x = \alpha$ という複素数の解をもつ，すなわち

$$P(\alpha) = 0$$

であるとき，$P(x) = 0$ は共役な複素数 $x = \overline{\alpha}$ を解にもつ，すなわち

$$P(\overline{\alpha}) = 0$$

である．

以上は係数が実数の場合でしか成り立たない．たとえば，$x^2-2ix+5=0$ のように，虚数を係数にもつ方程式ではこのようなことはいえないので注意しよう．

【例題：実数係数の n 次方程式の共役複素数解】

実数係数の 3 次方程式

$$x^3+ax^2+bx+6=0 \quad \cdots\cdots ①$$

が $x=1+\sqrt{2}i$ を解にもつとき，実数 a，b の値と他の解を求めよ．

【解答】

①が $x=1+\sqrt{2}i$ を解にもつとき，それと共役な複素数 $1-\sqrt{2}i$ も解にもつ．

◀『実数係数の n 次方程式の共役複素数解』を使った

よって，①は

$$\left\{x-(1+\sqrt{2}i)\right\}\left\{x+(1-\sqrt{2}i)\right\}=x^2-2x+3$$

で割り切れるから

$$x^3+ax^2+bx+6=(x^2-2x+3)(x+c)$$

とおける．右辺を展開すると

$$(x^2-2x+3)(x+c)=x^3+(-2+p)x^2+(3-2p)x+3p$$

となるので，係数を比較すると

$$\begin{cases} a=-2+p \\ b=3-2p \\ 6=3p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=2 \\ \boldsymbol{a=0} \\ \boldsymbol{b=-1} \end{cases}$$

他の解は，$\boldsymbol{x=1-\sqrt{2}i,\ -2}$.

【別解：『3 次方程式の解と係数の関係』(p.89) を使う】

①が $x=1+\sqrt{2}i$ を解にもつとき，それと共役な複素数 $1-\sqrt{2}i$ も解にもつ．

◀『実数係数の n 次方程式の共役複素数解』を使った

$\alpha=1+\sqrt{2}i$，$\beta=1-\sqrt{2}i$ とおき，残りひとつの解を γ とすると 3 次方程式の解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-a \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b \\ \alpha\beta\gamma=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(1+\sqrt{2}i\right)+\left(1-\sqrt{2}i\right)+\gamma=-a \\ \left(1+\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right) \\ \qquad\qquad +\left\{\left(1+\sqrt{2}i\right)+\left(1-\sqrt{2}i\right)\right\}\gamma=b \\ \left(1+\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)\gamma=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+\gamma=-a \\ 3+2\gamma=b \\ 3\gamma=-6 \end{cases}$$

これを解くと，$\gamma=-2$，$\boldsymbol{a=0}$，$\boldsymbol{b=-1}$ となる．
他の解は，$\boldsymbol{x=1-\sqrt{2}i,\ -2}$．