

第4章 平面図形・空間図形の計量

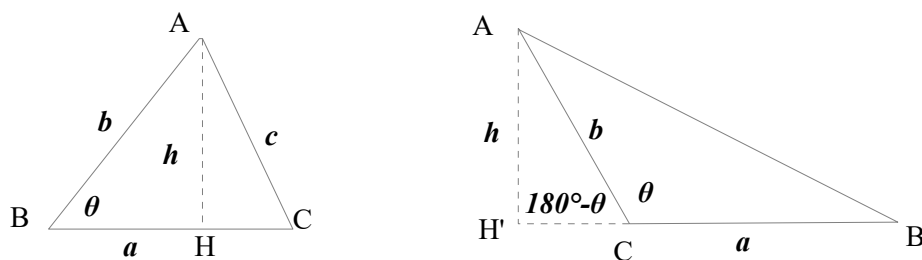
§ 4.1 三角比の応用

ここでは、三角形の分析を行うための基本ツールである、正弦定理や余弦定理などを学んでいこう。

4.1.1 三角形の面積と三角比

■三角形の面積

$\triangle ABC$ の面積を、2 辺の長さ a, b と、その間の角度 θ を用いて表すことを考えてみよう。
下の左の図は θ が鋭角の場合、下の右の図は θ が鈍角の場合を表している。



上の図の三角形において、底辺を a とすれば高さは h であるから、三角形の面積 S はどちらも $S = ah$ である。

ここで高さ h は、上の左の図では、 $h = b \sin \theta$ であり、上の右の図でも

$$h = b \sin(180^\circ - \theta) = b \sin \theta$$

である。すなわち、鋭角三角形、鈍角三角形のどちらの場合でも、高さは $h = b \sin \theta$ となり

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{a \cdot b \sin \theta}{2} = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

と表すことができる(これは、 $\theta = 90^\circ$ の直角三角形の場合も含んでいる)。

4.1.2 正弦定理

■正弦定理

三角形の3つの頂点を通る円を、その三角形の**外接円(circumscribed circle)**という。

1つの三角形に対し、外接円は1つに定まる。いま、右図のような三角形とその外接円を考える。

このとき、外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

が成り立つ。これを、**正弦定理(sine theorem)**という。この式が成り立つことを、鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形の場合に分けて以下にみていこう。

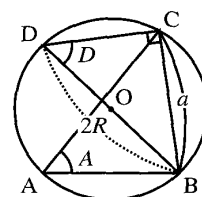
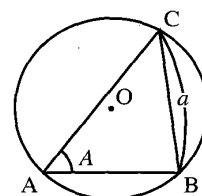
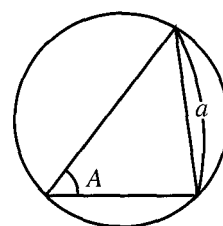
i) $\angle A$ が鋭角のとき

右図のように、 $\triangle ABC$ に外接する円に、直径 BD を引くと、右下図のようになる。

いま、右図の $\triangle DBC$ は直角三角形となるから

$$\sin D = \frac{a}{2R} \quad \text{であり、円周角の定理より } A = D \quad \text{であるから}$$

$$\sin A = \frac{a}{2R} \quad \therefore \quad \frac{a}{\sin A} = 2R \quad \text{となり成立.}$$

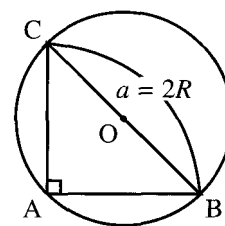


ii) $\angle A$ が直角のとき

$\sin A = 1$, $a = 2R$ であるから

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{1} = 2R$$

となり成立.



【暗記：正弦定理の導出】

上の続きとして、 $\angle A$ が鈍角のとき正弦定理が成り立つことを証明せよ.

【解答】

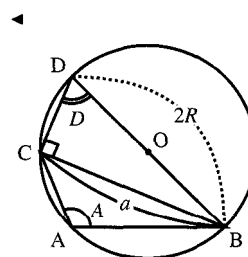
$\triangle ABC$ に外接する円に、直径 BD を引くと、右図のようになる.

いま、右図の $\triangle DBC$ は直角三角形となるから $\sin D = \frac{a}{2R}$

であり、円に内接する四角形の性質から $A = 180^\circ - D$ であるから

$$\sin(180^\circ - A) = \sin A = \frac{a}{2R} \quad \therefore \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

となり成立.



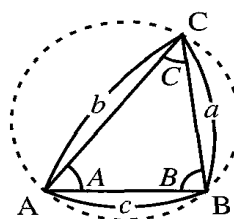
正弦定理

$\triangle ABC$ において

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成り立つ.

ただし、 R は $\triangle ABC$ の外接円の半径とする.



正弦定理の使い方は主に2つある. 1つは、 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ の関係から、辺の長さや角度を求める

ことである. この場合、正弦定理は2辺と2角について成り立つ関係式であることに注意しよう.

2つの角と1つの辺がわかれば、この関係式からもう1つの辺の長さが計算できる.

そしてもう1つの使い方は、外接円の半径 R を求めることである. 内接円ではないので注意しよう

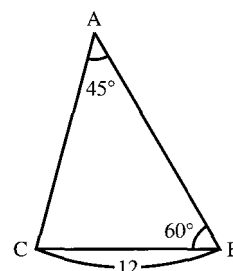
【例題：正弦定理の利用～その1～】

$\triangle ABC$ において、 $a=12$, $A=45^\circ$, $B=60^\circ$ のとき、 b の値を求めよ. また、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めよ.

【解答】

正弦定理より、 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ であるから

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{12 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{6}$$



図形の角度や長さを求める問題では、図示してから考えるようにしよう。図形的感覚を磨くのに役に立ち、単純なミスを防ぐ効果もある。

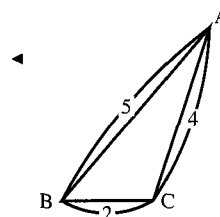
【例題：正弦定理の利用～その2～】

$\triangle ABC$ において、各辺の長さが $a:b:c=2:4:5$ であるとき、 $\sin A:\sin B:\sin C$ の値を求めよ。

【解答】

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理より
 $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$
 であるから

$$2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C=2:4:5$$



4.1.3 余弦定理

■第1余弦定理

右図のような三角形の2つの角と2辺の長さの間に次の関係式が成り立つ。

$$c = b \cos A + a \cos B$$

これを、第1余弦定理(first cosine theorem)という。

この式が成り立つことを、 A が鋭角、直角、鈍角の場合に分けて、以下に見ていこう。

i) A が鋭角のとき

線分 AB 上に、右図のように垂線 CH をひくと

$$(\text{右辺}) = b \cos A + a \cos B = AH + BH = AB = c = (\text{左辺})$$

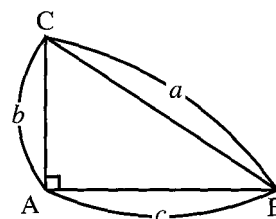
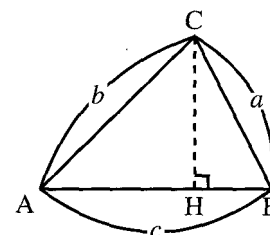
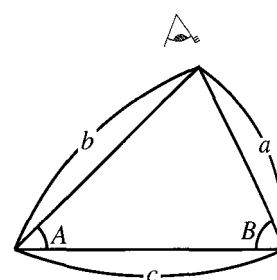
となり成立。

ii) A が直角のとき

$A=90^\circ$ より、 $\cos A=0$ となるので

$$(\text{右辺}) = b \cos A + a \cos B = a \cos B = c = (\text{左辺})$$

となり成立。



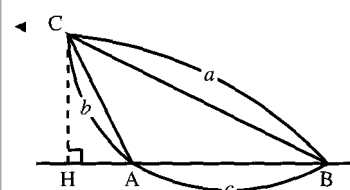
【暗記】：第1余弦定理の導出

上の続きとして、 A が鈍角のときも第1余弦定理が成り立つことを証明せよ。

【解答】

直線 AB 上に、右欄外の図のように垂線 CH をひくと

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= b \cos A + a \cos B = -b \cos(180^\circ - A) + a \cos B \\ &= -AH + BH = AB = c = (\text{左辺}) \end{aligned}$$



第1 余弦定理

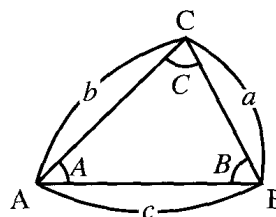
$\triangle ABC$ において

$$c = b \cos A + a \cos B$$

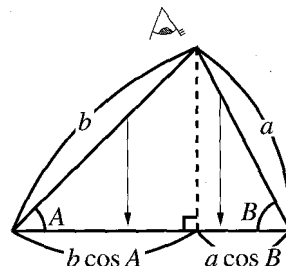
$$b = a \cos C + c \cos A$$

$$a = c \cos B + b \cos C$$

が成り立つ.



この定理は、ある角から見たときに左右2つの辺を向かいの辺に押しつぶす感じで覚えると良い.

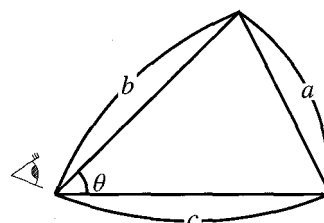


■第2 余弦定理(余弦定理)

三角形の1つの角と3辺の長さの間に次の関係式が成り立つ.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$$

これを、第2 余弦定理(second cosine theorem)といい、単に余弦定理(cosine theorem)というときにはこちらを指す. この式が成り立つことを、 A が鋭角, 直角, 鈍角の場合に分けて、以下に見ていこう.



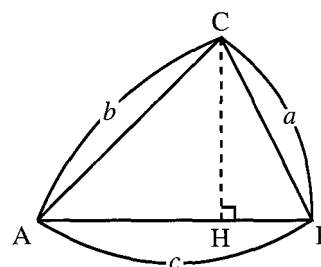
i) A が鋭角のとき

右図のように、線分 AB 上に垂線 CH をひき、

$\triangle BCH$ に三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} = a^2 &= BC^2 = CH^2 + BH^2 \\ &= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \\ &= b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = \text{(右辺)} \end{aligned}$$

となり成立.

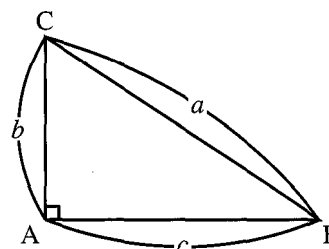


ii) A が直角のとき

$A = 90^\circ$ より、 $\cos A = 0$ となるので

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} = a^2 &= BC^2 = CA^2 + AB^2 \\ &= b^2 + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \frac{\cos A}{0} = \text{(右辺)} \end{aligned}$$

となり成立.



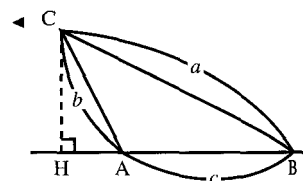
【暗記】：余弦定理の導出

上の続きとして、 A が鈍角のときも余弦定理が成り立つことを証明せよ.

【解答】

直線 AB 上に、右欄外の図のように垂線 CH をひき、 $\triangle BCH$ に三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= a^2 = BC^2 = CH^2 + BH^2 \\
 &= \{b \sin(180^\circ - A)\}^2 + \{c + b \cos(180^\circ - A)\}^2 \\
 &= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \\
 &= C = 90^\circ \\
 &= \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \\
 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A
 \end{aligned}$$



となり成立.

第2 余弦定理 (余弦定理)

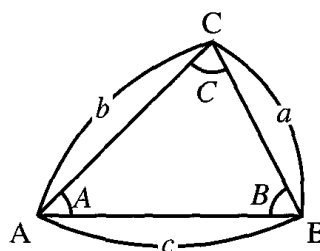
$\triangle ABC$ において

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

が成り立つ.



余弦定理の主な使い方は、 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ などの関係式から、辺の長さや角度を求めることである。余弦定理は3辺と1角について成り立つ関係式であることに注意しよう。

たとえば、2つの辺と1つの角がわかれば、この関係式からもう1つの辺の長さが計算できるという具合である。

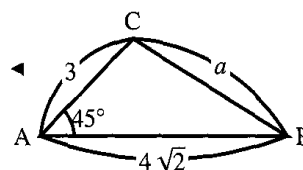
【例題: 余弦定理の利用～その1～】

$\triangle ABC$ において、 $b=3$ 、 $c=4\sqrt{2}$ 、 $A=45^\circ$ のとき、 a の値を求めよ。

【解答】

点 A からみる余弦定理より

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2ab \cos A \\
 &= 3^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4\sqrt{2} \cos 45^\circ \\
 &= 9 + 32 - 24\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 17
 \end{aligned}$$



よって、 $a = \sqrt{17}$ である。

$\triangle ABC$ の3辺の長さ a 、 b 、 c がわかっているとき、 $\angle A$ の大きさは、余弦定理を変形した

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

から求めることができる。

【例題: 余弦定理の利用～その2～】

$\triangle ABC$ において、 $a = \sqrt{21}$ 、 $b = 4$ 、 $c = 5$ のとき、 A の値を求めよ。
また、 $\cos B$ を求めよ。

【解答】

△ ABC に点 A からみる余弦定理を用いると、

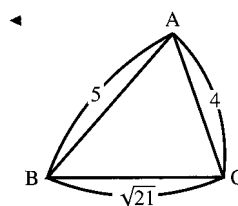
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{これより}$$

$$\cos A = \frac{4^2 + 5^2 - (\sqrt{21})^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{2}$$

よって、 $A = 60^\circ$ となる。

同じく余弦定理を用いると、 $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ これより

$$\cos B = \frac{5^2 + (\sqrt{21})^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{21}} = \frac{30}{10\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$



§ 4.2 平面図形の計量

ここではまず、三角形の形状や大きさが決まるための条件を整理し、その後、今まで学んできたことの実地訓練として、平面図形の具体的な計量を行う。

このセクションの終わりには、平面図形に関する有名な定理も紹介する。

4.2.1 三角形の決定

■三角形の合同

2つの図形が**合同**(congruence)であるとは、2つの図形が空間的な回転・平行移動によって完全に重なることを意味する。

2つの三角形の場合は、3辺と3つの内角がすべて一致すれば合同である。2つの三角形の間に、**三角形の合同条件**(conditions of congruence)

- 1) 1辺とその両端の角が等しい(2角きょう辺相等)
- 2) 2辺とその間の角が等しい(2辺きょう角相等)
- 3) 3辺が等しい(3辺相等)

のいずれかが成り立てば、その2つの三角形は合同である。

■三角形の決定条件

三角形の3辺と3つの内角が決まった値をもつとき、この三角形は決定しているという。

たとえば、三角形の3つの内角が 40° , 60° , 80° と与えられても、辺の長さはわからないので、この三角形は決定しない。しかし、さらにどこか1辺の長さが与えられれば、この三角形は決定する。

三角形を決定するための条件は、上の合同条件1)~3)に対応して、3つの場合がある。

- a) 1辺とその両端の角が与えられた場合
- b) 2辺とその間の角が与えられた場合
- c) 3辺が与えられた場合

たとえば、a)の条件で三角形を2つ描けば、その2つの三角形は合同条件1)によって合同である。

b), c)も同様である。

また、常にではないが

- d) 2辺とその間でない角が与えられた場合

でも、三角形を決定する場合がある。

以下では、これらの情報が与えられ三角形が決定したとき、残りの辺と角を求める方法を考えてみよう。

【例題:a) 1 辺とその両端の角が与えられた場合】

- (1) $A=60^\circ$, $B=75^\circ$, $AB=2$ である三角形において, C , a , b を求めよ.
 (2) $A=60^\circ$, $B=45^\circ$, $AB=2$ である三角形において, C , a , b を求めよ.

【解答】

- (1) 三角形の内角の和は 180° なので

$$C=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$$

また、正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ を用いて

$$a=\frac{c \sin A}{\sin C}=\frac{2 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$$

また、点 B からみる第1余弦定理 $b=a \cos C+c \cos A$ を用いて

$$b=\sqrt{6} \cos 45^\circ+2 \cos 60^\circ=\sqrt{3}+1$$

【別解: 75° の三角比を覚えている場合】

正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ より

$$b=\frac{2 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=2 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}+1$$

- (2) 三角形の内角の和は 180° なので

$$C=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$$

また、正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin 60^\circ} &= \frac{b}{\sin 45^\circ} \rightarrow a \div \frac{\sqrt{3}}{2} = b \div \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \rightarrow a &= \frac{\sqrt{3}}{2} b \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} b \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

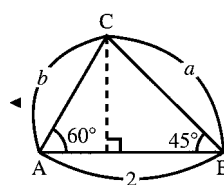
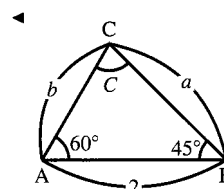
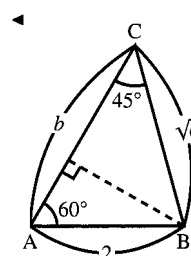
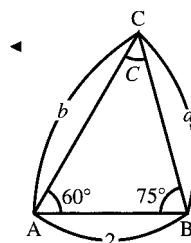
また、点 C からみる第1余弦定理 $c=a \cos B+b \cos A$ を用いて

$$\begin{aligned} 2 &= b \cos 60^\circ + a \cos 45^\circ \rightarrow 2 = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{2} a}{2} \\ \rightarrow 4 &= b + \sqrt{2} a \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①を②に代入して

$$\begin{aligned} 4 &= b + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} b \rightarrow 4 = (1 + \sqrt{3}) b \\ \rightarrow b &= \frac{4}{1 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 2 \end{aligned}$$

①に代入して、 $a=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ となる。



【別解: 75° の三角比を覚えている場合】

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ より

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2\sqrt{3} - 2$$

【例題:b) 2 辺とその間の角が与えられた場合】

(1) $A = 45^\circ, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{3} + 1$ である三角形において, a, B, C を求めよ.

(2) $A = 75^\circ, b = \sqrt{6}, c = 2$ である三角形において, a, B, C を求めよ. ただし,

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ である.}$$

【解答】

(1) 点 A からみる余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ を用いて

$$\begin{aligned} a^2 &= \sqrt{6}^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)\cos 45^\circ \\ &= 6 + 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 10 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = 4 \end{aligned}$$

より, $a = 2$ となる.

また, 点 B からみる余弦定理 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ を用いて

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{3} + 1) \cdot 2} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{3} + 4 - 6}{4(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{4(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

より, $B = 60^\circ$ となる.

三角形の内角の和は 180° なので

$$C = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$$

(2) 点 A からみる余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ を用いて

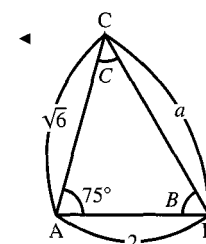
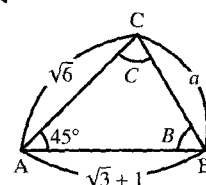
$$\begin{aligned} a^2 &= (\sqrt{6})^2 + 2^2 - 2\sqrt{6} \cdot 2 \cos 75^\circ \\ &= 10 - 2\sqrt{6} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 10 - \sqrt{6}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ &= 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2 \text{ より,} \\ a &= \sqrt{3} + 1 \text{ となる.} \end{aligned}$$

また, 点 B からみる余弦定理 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ を用いて

$$\cos B = \frac{2^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \cdot 2(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{4(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{2}$$

より, $B = 60^\circ$ となる.

三角形の内角の和は 180° なので $C = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$



【例題: 3 辺が与えられた場合】

(1) $a = 2, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{3} + 1$ である三角形において, A, B, C を求めよ.

(2) $a = 2, b = \sqrt{6} + \sqrt{2}, c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ である三角形において, A, B, C を求めよ.

【解答】

(1) 点 A からみる余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ を用いて

$$\begin{aligned}
 \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{6}(\sqrt{3}+1)} \\
 &= \frac{6+4+2\sqrt{3}-4}{2(3\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{6+2\sqrt{3}}{2(3\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}} \\
 &= \frac{(3+\sqrt{3})(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{18-6} = \frac{9\sqrt{2}-3\sqrt{6}+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{12} \\
 &= \frac{6\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

よって, $A=45^\circ$ となる.また, 点 B からみる余弦定理 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ を用いて

$$\begin{aligned}
 \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\
 &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{3}+1) \cdot 2} \\
 &= \frac{4+2\sqrt{3}+4-6}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

より, $B=60^\circ$ となる.三角形の内角の和は 180° なので

$$C = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$$

(2) 点 A からみる余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ を用いて

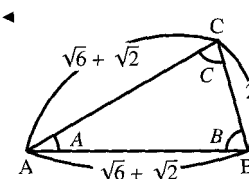
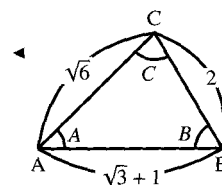
$$\begin{aligned}
 \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
 &= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - 2^2}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} \\
 &= \frac{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - 4}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} \\
 &= \frac{2(8+4\sqrt{3})-4}{2(8+4\sqrt{3})} = \frac{12+8\sqrt{3}-4}{16+8\sqrt{3}} = \frac{8+8\sqrt{3}}{16+8\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

より, $A=30^\circ$ となる.ここで, $b=c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ より $\triangle ABC$ は二等辺三角形であるから, $B=C$ なので

$$B=C = \frac{180^\circ - A}{2} = 75^\circ$$

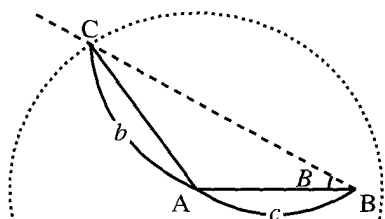
■2 辺とその間でない角が与えられた場合

2 辺とその間でない角が与えられた場合は, 三角形がただ1つ決定するとは限らない.

たとえば, b, c と B が与えられている場合を考えてみよう. B を鋭角としたとき, b の値によって次の4つの場合があるとわかる. このとき, 点 A を中心とする半径 b の円を考えるとわかりやすい.

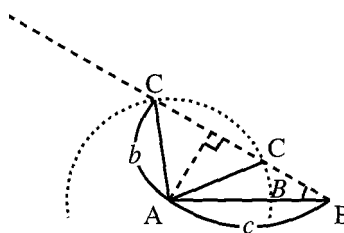
i) $c \leq b$ の場合

$\triangle ABC$ は1つだけ存在する.



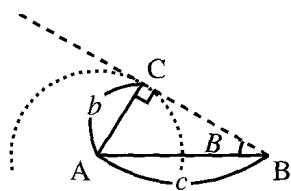
ii) $c \sin B < b < c$ の場合

2つの $\triangle ABC$ が存在する.



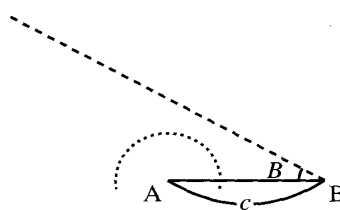
iii) $c \sin B = b$ の場合

$\triangle ABC$ は1つだけ存在する.
このとき, $\triangle ABC$ は $C = 90^\circ$ の
直角三角形となる.



iv) $b < c \sin B$ の場合

このような三角形は存在しない.



以上の条件に注意しながら, 次の例題をみてみよう.

【例題:d) 2 辺とその間でない角が与えられた場合】

(1) $A = 30^\circ$, $a = \sqrt{2}$, $b = 2$ である三角形において, B , C , c を求めよ.

(2) $A = 45^\circ$, $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ である三角形において, B , C , c を求めよ.

【解答】

(1) 正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ を用いて

$$\sin B = \frac{2 \sin 30^\circ}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \div \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

より, $B = 45^\circ$ または 135° となる.

i) $B = 45$ のとき

三角形の内角の和は 180° なので

$$C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

また, 点C からみる第1 余弦定理

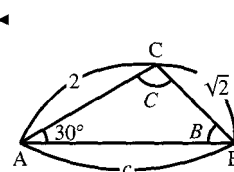
$$c = b \cos A + a \cos B \quad \text{より}$$

$$c = 2 \cos 30^\circ + \sqrt{2} \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} + 1$$

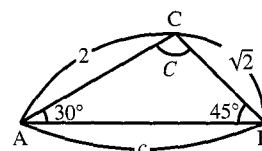
ii) $B = 135^\circ$ のとき

三角形の内角の和は 180° なので

$$C = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ$$



◀このときは, 下の図のようになっている.

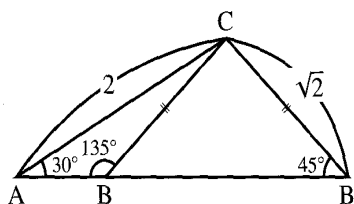


また、点 C からみた第1余弦定理

$$c = b \cos A + a \cos B \quad \text{より}$$

$$c = 2 \cos 30^\circ + \sqrt{2} \cos 135^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{3} - 1$$

この問いでは下図のように2つの場合がある。



(2) 正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ を用いて

$$\sin B = \frac{\sqrt{2} \sin 45^\circ}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \div 2 = \frac{1}{2}$$

より、 $B = 30^\circ$ または 150° となるが、 $B = 150^\circ$ のときは、

$$A + B = 45^\circ + 150^\circ > 180^\circ \quad \text{となって不適。}$$

よって、 $B = 30^\circ$ となる。

三角形の内角の和は 180° なので

$$C = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$$

また、点 C からみる第1余弦定理 $c = b \cos A + a \cos B$ より

$$c = \sqrt{2} \cos 45^\circ + 2 \cos 30^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

【例題：四角形の計量】

四角形 $ABCD$ において、 $AB=5$ 、 $BC=8$ 、 $CD=5$ 、 $\angle ABC=60^\circ$ 、 $\angle CAD=45^\circ$ のとき、次の間に答えよ。

- (1) AC の長さを求めよ。
- (2) AD の長さを求めよ。
- (3) 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ。

【解答】

(1) $\triangle ABC$ に点 B からみる余弦定理

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB BC \cos \angle ABC \quad \text{を用いて}$$

$$AC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60^\circ = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 49$$

よって、 $AC=7$ である。

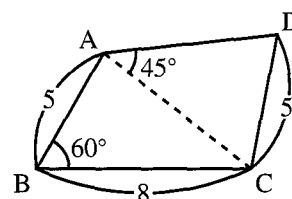
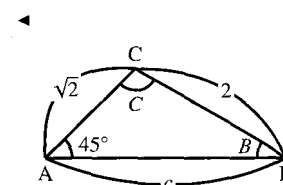
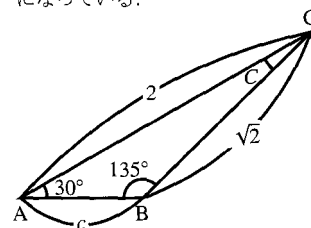
(2) $\triangle CAD$ に点 A からみる余弦定理

$$DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2 AD AC \cos \angle CAD \quad \text{を用いて}$$

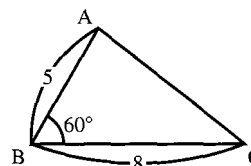
$$5^2 = AD^2 + 7^2 - 2 AD \cdot 7 \cos 45^\circ$$

$$\rightarrow 25 = AD^2 + 49 - 2 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} AD \rightarrow AD^2 - 7\sqrt{2} AD + 24 = 0$$

◀このときは、下の図のようになっている。



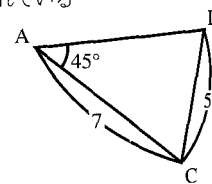
◀2辺とその間の角が与えられている



2 次方程式の解の公式より

$$\begin{aligned} AD &= \frac{7\sqrt{2} \pm \sqrt{(7\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 24}}{2} \\ &= \frac{7\sqrt{2} \pm \sqrt{98 - 96}}{2} = \frac{7\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} \\ &= 3\sqrt{2} \text{ または } 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

◀ 2 辺とその間でない角が与えられている



(3) $\triangle ABC$ の面積を S_1 , $\triangle CAD$ の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \angle CAD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot AD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

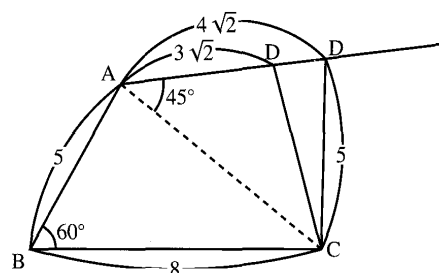
つまり, $AD = 3\sqrt{2}$ のときは $S_2 = \frac{21}{2}$, $AD = 4\sqrt{2}$ のときは $S_2 = 14$

四角形 $ABCD$ の面積は $S_1 + S_2$ に等しいので,

$$\begin{aligned} AD = 3\sqrt{2} \text{ のときは } 10\sqrt{3} + \frac{21}{2} \\ AD = 4\sqrt{2} \text{ のときは } 10\sqrt{3} + 14 \end{aligned}$$

が求める答えになる.

この間では右の図のように2つの場合がある.



4.2.2 平面図形におけるいくつかの定理

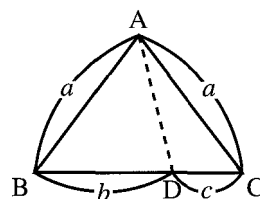
■二等辺三角形を分割する線の長さ

ここでは, 平面図形に関して覚えておくべき定理を紹介する. 三角形の決定条件を頭に浮かべながら, 以下の例題を見てみよう.

【例題: 二等辺三角形を分割する線の長さ】

右図のような二等辺三角形 ABC において次の問に答えよ. ただし $b > c$ とする.

- (1) AD の長さを求めよ.
- (2) $\cos \angle ABD$ の値を求めよ.



【解答】

- (1) $\angle ABD = \angle ACD = \theta$ とおき, $AD = x$ とおく. $\triangle ABD$ に点 B からみる余弦定理を用いると

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab} \dots \textcircled{1}$$

$\triangle ACD$ に点 C からみる余弦定理を用いると

$$\cos \theta = \frac{a^2 + c^2 - x^2}{2ac} \dots \textcircled{2}$$

①、②より

$$\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab} = \frac{a^2 + c^2 - x^2}{2ac}$$

$$c(a^2 + b^2 - x^2) = b(a^2 + c^2 - x^2)$$

$$(b-c)x^2 = ba^2 + bc^2 - ca^2 - cb^2$$

$$(b-c)x^2 = a^2(b-c) - bc(b-c)$$

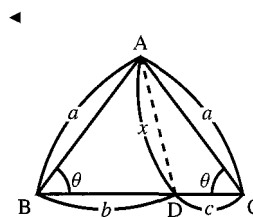
$$(b-c)x^2 = (a^2 - bc)(b-c)$$

$b > c$ より $b \neq c$ なので、両辺を $(b-c)$ で割って

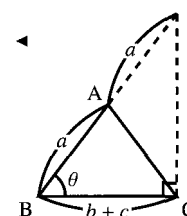
$$x^2 = a^2 - bc \quad \therefore \quad x = \sqrt{a^2 - bc}$$

(2) (1) で求めた $x = \sqrt{a^2 - bc}$ を①に代入して

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - bc)}{2ab} = \frac{b^2 + bc}{2ab} = \frac{b+c}{2a}$$



別解として、以下のように補助線を引いて、導くこともできる。



■角の2等分線の定理

【例題：角の2等分線の定理】

$\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の2等分線と辺 BC との交点を D とする。

(1) $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ の面積を考えることによって、
 $AB:AC = BD:DC$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $AB=a$, $AC=b$, $BD=c$, $CD=d$ とするとき、
 $AD = \sqrt{ab - cd}$ と表せることを示せ。

【解答】

(1) $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ の面積をそれぞれ S_1 , S_2 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \theta \quad S_2 = \frac{1}{2} AD \cdot AC \sin \theta$$

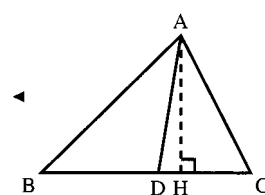
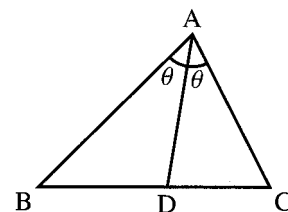
と表せるので、 $S_1:S_2 = AB:AC \dots \textcircled{1}$

また、 A から辺 BC に下ろした垂線 AH の長さを h とおくと

$$S_1 = \frac{1}{2} BD \cdot h, \quad S_2 = \frac{1}{2} DC \cdot h \text{ と表せるので、}$$

$$S_1:S_2 = BD:DC \dots \textcircled{2}$$

①、②より $AB:AC = BD:DC$



(2) まず $a \neq b$ とする. $AD=x$ とおき, $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ に余弦定理を用いると

$$(\cos \theta) = \frac{x^2 + a^2 - c^2}{2xa} = \frac{x^2 + b^2 - d^2}{2xb}$$

$$b(x^2 + a^2 - c^2) = a(x^2 + b^2 - d^2)$$

$$(a-b)x^2 = ab(a-b) - (bc^2 - ad^2)$$

$$(a-b)x^2 = ab(a-b) - (adc - bcd)$$

$$(a-b)x^2 = ab(a-b) - cd(a-b)$$

$$x^2 = ab - cd \quad \therefore x = \sqrt{ab - cd}$$

$a=b$ のときは $c=d$, $\angle ADC=90^\circ$ となる. $\triangle ABD$ に三平方の定理を用いて

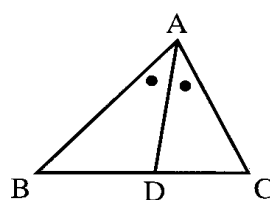
$$AD = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{ab - cd}$$

角の2等分線の定理

$\triangle ABC$ において, $\angle A$ の2等分線と辺 BC との交点を D とするとき

$$AB : AC = BD : DC$$

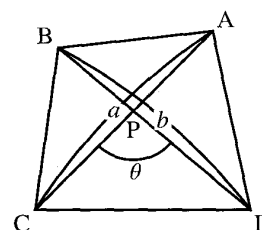
が成り立つ.



■四角形の対角線と面積

【例題: 四角形の対角線と面積】

2つの対角線の長さが a , b で, そのなす角が θ である, 右図のような四角形の面積 S を求めよ.



【解答】

$\triangle ABP$, $\triangle BCP$, $\triangle CDP$, $\triangle DAP$ の面積を, それぞれ S_1 , S_2 , S_3 , S_4 とおくと

$$S_1 = \frac{1}{2} AP \cdot BP \sin \theta$$

$$S_2 = \frac{1}{2} BP \cdot CP \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2} BP \cdot CP \sin \theta$$

$$S_3 = \frac{1}{2} CP \cdot DP \sin \theta$$

$$S_4 = \frac{1}{2} DP \cdot AP \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2} DP \cdot AP \sin \theta$$

となるから

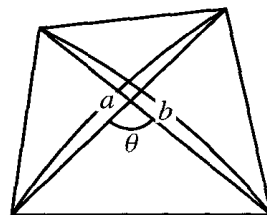
$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ &= \frac{1}{2} (AP \cdot BP + BP \cdot CP + CP \cdot DP + DP \cdot AP) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} BP (AP + CP) + DP (CP + AP) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} (AP + CP) (BP + DP) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \theta = \frac{1}{2} ab \sin \theta \end{aligned}$$

四角形の対角線と面積

右図のような四角形の2つの対角線の長さが a , b ,
そのなす角が θ のとき, この四角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$

となる.



■ 三角形の面積と内接円の半径

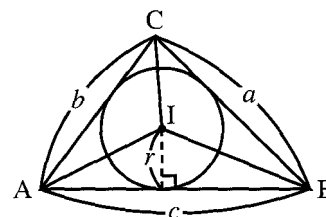
【例題: 三角形の面積と内接円の半径】

三角形の3つの辺すべてに接する円を, その三角形の内接円(inscribed circle)という.

1つの三角形に対し, 内接円は1つに定まる.

$b=4$, $c=5$, $A=60^\circ$ である $\triangle ABC$ について,
内接円の半径を r とする.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ.
- (3) $\triangle ABC$ の内接円の半径を求めよ.



【解答】

(1) 点 A からみる余弦定理より

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2ab \cos A \\ &= 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos 60^\circ \\ &= 16 + 25 - 40 \cdot \frac{1}{2} = 21 \quad \text{よって,} \quad a = \sqrt{21} \text{ である.} \end{aligned}$$

$$(2) \quad S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$$

(3) 内接円の中心を I とすると, $\triangle ABI$, $\triangle BCI$, $\triangle CAI$ の面積は
それぞれ $\frac{1}{2}cr$, $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$ となるから, $\triangle ABC$ の面積 S は
それぞれ, AB , BC , CA を底辺とみて, 内接円の半径を高さにとって

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a+b+c) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

とも表せる. よって(2)と③より

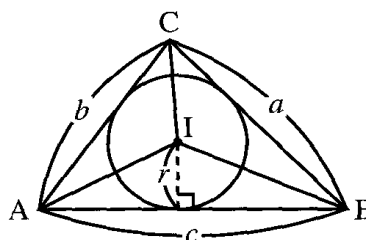
$$r = \frac{2S}{(a+b+c)} = \frac{2 \cdot 5\sqrt{3}}{\sqrt{21}+4+5} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{21}+9} = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$$

三角形の内接円と面積の関係

三角形の面積 S は, 内接円の半径 r を用いて

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

と表すことができる. ここで a , b , c は各辺の
長さを表す.

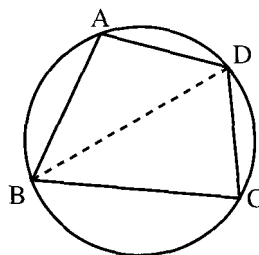


■円に内接する四角形

【例題：円に内接する四角形】

円に内接する四角形 $ABCD$ において, $AB=4$, $BC=5$, $CD=3$, $DA=3$ とする.

- (1) $A+C=180^\circ$ を示せ.
- (2) $\cos A = -\cos C$ を示せ.
- (3) 対角線 BD の長さを求めよ.
- (4) 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ.

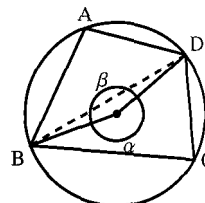


【解答】

- (1) 中心角は円周角の2倍なので

A は右図の $\frac{1}{2}\alpha$ と等しく,

C は右図の $\frac{1}{2}\beta$ と等しい.



よって, $A+C=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=180^\circ$

- (2) (1) より, $A=180^\circ-C$ であるので
 $\cos A = \cos(180^\circ - C) = -\cos C$

- (3) $\triangle ABD$ に点 A からみる余弦定理を用いて
 $BD^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos A = 25 - 24 \cos A \cdots \cdots \textcircled{1}$

- $\triangle CBD$ に点 C からみる余弦定理を用いて
 $BD^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos C = 34 - 30 \cos C \cdots \cdots \textcircled{2}$

- ①, ②, $\cos A = -\cos C$ より

$$25 - 24 \cos A = 34 + 30 \cos A \quad \therefore \cos A = -\frac{9}{54} = -\frac{1}{6}$$

これを①に代入して

$$BD^2 = 25 - 24 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 29$$

$$BD > 0 \text{ であるので, } BD = \sqrt{29}$$

- (4) $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{35}}{6}$ より

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = \sqrt{35}$$

また, $\sin C = \sin(180^\circ - A) = \sin A$ より

$$\triangle CBD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6}$$

よって, 求める面積は $\sqrt{35} + \frac{5}{4}\sqrt{35} = \frac{9}{4}\sqrt{35}$

■トレミーの定理

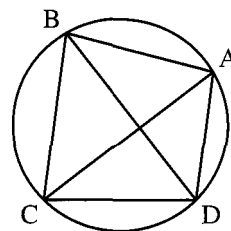
【例題:トレミーの定理】

右図のように、四角形 $ABCD$ が円に内接している。

$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ とするとき、以下の式を示せ。

$$(1) \quad (ad+bc)BD^2=(ab+cd)(ac+bd)$$

$$(2) \quad AC \cdot BD = ac + bd$$



【解答】

(1) $\triangle ABD$ に点 A からみる余弦定理を用いると

$$\cos \angle BAD = \frac{a^2 + d^2 - BD^2}{2ad} \dots\dots ①$$

$\triangle CBD$ に点 C からみる余弦定理を用いると

$$\cos \angle BCD = \frac{b^2 + c^2 - BD^2}{2bc} \dots\dots ②$$

$-\cos \angle BAD = \cos \angle BCD$ であるので、①、②より

$$\begin{aligned} -\frac{a^2 + d^2 - BD^2}{2ad} &= \frac{b^2 + c^2 - BD^2}{2bc} \\ bc(BD^2 - a^2 - d^2) &= ad(b^2 + c^2 - BD^2) \\ (ad + bc)BD^2 &= ad(b^2 + c^2) + bc(a^2 + d^2) = ab(bd + ac) + cd(ac + bd) \\ &= (ab + cd)(ac + bd) \end{aligned}$$

(2) $\cos \angle ABC = -\cos \angle ADC$ より

$$-\frac{a^2 + b^2 - AC^2}{2ab} = \frac{c^2 + d^2 - AC^2}{2cd}$$

(1) と同様に整頓すれば、

$$\begin{aligned} (ab + cd)AC^2 &= cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2) \\ (ab + cd)AC^2 &= (ad + bc)(ac + bd) \end{aligned}$$

これと(1)の結果より、

$$\begin{aligned} (ad + bc)BD^2 \times (ab + cd)AC^2 &= (ab + cd)(ac + bd) \times (ad + bc)(ac + bd) \\ BD^2 \cdot AC^2 &= (ac + bd)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore BD \cdot AC = (ac + bd)$$

§ 4.3 空間図形の計量

空間図形は,上手に切り口を選ぶことにより,平面図形の問題へと帰着される。以下では,代表的な空間図形の計量についてみていこう。

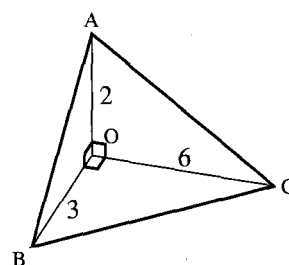
4.3.1 直角が1つの頂点に集まった四面体

■ 直角三角錐の計量

1つの頂点に直角が3つ集まった三角錐のことを直角三角錐(rectangular triangular pyramid)という。

【例題:直角三角錐の計量】

右の図のように, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ の
直角三角錐 $OABC$ において,次の間に答えよ。ただし,
 $OA=2, OB=3, OC=6$ とする。



- (1) 辺 AB, BC, CA の長さをそれぞれ求めよ。
- (2) $\angle ACB = \theta$ とするとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。

【解答】

- (1) $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$ それぞれに,三平方の定理を用いて

$$AB = \sqrt{13}, BC = 3\sqrt{5}, CA = 2\sqrt{10}$$

- (2) $\triangle ABC$ に点 C からみる余弦定理を用いて

$$\cos \theta = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA \cdot CB} = \frac{40 + 45 - 13}{2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

- (3) (2)より

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{18}{25}} = \frac{\sqrt{7}}{5} \end{aligned}$$

だから, (1)より $\triangle ABC$ の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} CA \cdot CB \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{7}}{5} = 3\sqrt{14} \end{aligned}$$

上の例題で, $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$ の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とおくと

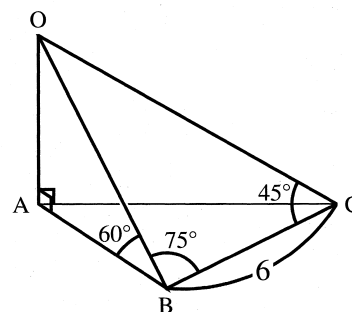
$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$$

がなりたっているのが確認できる。この関係は,一般の直角三角錐で成り立ち,三平方の定理の空間版といえるものである。

【例題:三角錐の計量】

右図のような三角錐 $OABC$ において,次の間に答えなさい。

- (1) 辺 OB の長さを求めよ。
- (2) 辺 OA の長さを求めよ。
- (3) 辺 AC の長さを求めよ。
- (4) $\angle ABC = \theta$ とするとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。



【解答】

- (1)
- $\triangle OBC$
- に正弦定理を用いて

$$\frac{OB}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 60^\circ}$$

$$\Leftrightarrow OB = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} \times 6 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times 6 = 2\sqrt{6}$$

$$(2) \quad OA = OB \sin 60^\circ = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}$$

- (3) まず、
- $\triangle OBC$
- に点
- B
- からみる第1余弦定理を用いて、

$$OC = BO \cos \angle BOC + BC \cos \angle BCO$$

$$= 2\sqrt{6} \cos 60^\circ + 6 \cos 45^\circ$$

$$= 2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6} + 3\sqrt{2}$$

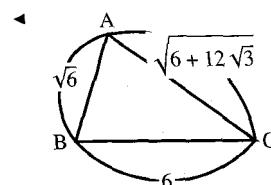
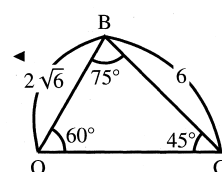
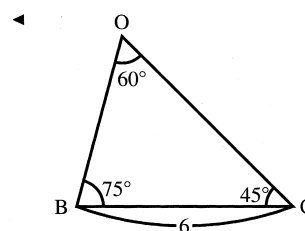
これより、 $\triangle OAC$ に三平方の定理を用いて、

$$AC = \sqrt{OC^2 - OA^2} = \sqrt{(\sqrt{6} + 3\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{6 + 12\sqrt{3}}$$

- (4) まず、
- $AB = OB \cos 60^\circ = 2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{6}$
- これより、

$\triangle ABC$ に $\triangle ABC$ からみる余弦定理を用いて

$$\cos \theta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{6 + 36 - (6 + 12\sqrt{3})}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot 6} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$



4.3.2 正四面体

■ 正四面体

空間図形において、すべての面が合同な正多角形からなり、各頂点にあつまる辺の数がすべて等しい多面体のことを正多面体(regular polyhedron)という。

正多面体には

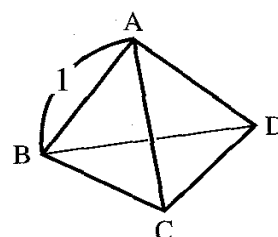
- (1) 正四面体
- (2) 正六面体
- (3) 正八面体
- (4) 正十二面体
- (5) 正二十面体

の5つしかないことが知られている。

【例題:正四面体の計量】

右下図のように、1辺の長さが1である正四面体 $ABCD$ について以下の問に答えよ。

- (1) $\triangle BCD$ の面積 S を求めよ
- (2) 頂点 A から $\triangle BCD$ におろした垂線の足を H とするとき、 AH の長さを求めよ。
- (3) 正四面体 $ABCD$ に内接する球の半径を求めよ。
- (4) 正四面体 $ABCD$ に外接する球の半径を求めよ。



【解答】

(1) $\angle CBD = 60^\circ$ であるから

$$S = \frac{1}{2} BD \cdot BC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(2) まず、辺 BC の中点を M とおくと、 $AM \perp BC, DM \perp BC$ となり、 H は、 A から MD におろした垂線の足であるとなる。

まず、 $\triangle ABM$ に三平方の定理を用いて

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

よって $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 同様に、 $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

次に、 $\angle AMD = \theta$ とおくと、 $\triangle AMD$ に点 M からみる余弦定理 $AD^2 = MA^2 + MD^2 - 2MA \cdot MD \cos \theta$ を用いて

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{MA^2 + MD^2 - AD^2}{2MA \cdot MD} \\ &= \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1^2\right) \div 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

であり、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって、 AH の長さは

$$AH = AM \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

【別解: H が $\triangle BCD$ の重心であることを使う】

まず、辺 BC の中点を M とおくと、 $AM \perp BC$ となるので、 $\triangle ABM$ に三平方の定理を用いて

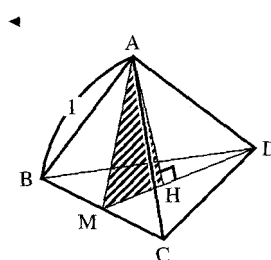
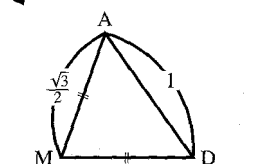
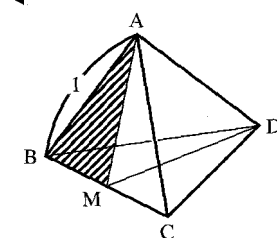
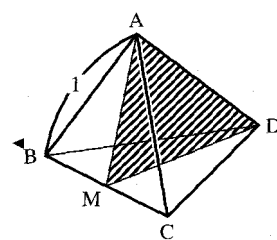
$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

よって、 $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 同様に、 $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

次に、正四面体の対称性から、点 H は $\triangle BCD$ の重心となるので

$$MH : HD = 1 : 2, \text{つまり}$$

$$MH = \frac{1}{3} DM = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



最後に、 $\triangle AMH$ に三平方の定理を用いて、

$$AH^2 = AM^2 - MH^2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{36} = \frac{27-3}{36} = \frac{2}{3}$$

$$\text{よって、 } AH = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(3) 内接球の中心の点を O とし、その半径を r とおく。このとき、正四面体は4つの正三角錐 $OABC, OACD, OADB, OBCD$ に分けることができる。

これらの正三角錐の体積は、どれも $\frac{1}{3} \times S \times r$ であるから、

正四面体 $ABCD$ の体積 V は

$$V = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} r = \frac{\sqrt{3}r}{3} \dots\dots ①$$

また、(1), (2)より正四面体 $ABCD$ の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times S \times AH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \dots\dots ② \end{aligned}$$

よって、①, ②より

$$\frac{\sqrt{3}r}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

(4) M を辺 BC の中点にとり、 H, H' を右図のようにとる。

図形の対称性から、外接球の中心 O は AH 上および DH' 上にあるのがわかる。

H は $\triangle BCD$ の重心だから

$$DH = DM \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。同様に、 $AH' = \frac{\sqrt{3}}{3}$ である。

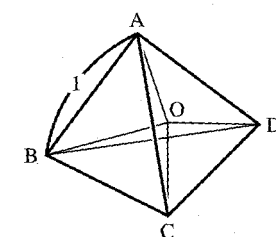
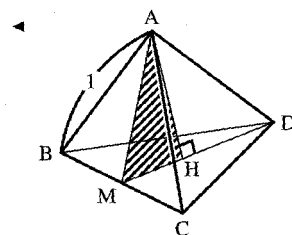
ここで、 $AO = r$ とおくと、 $\triangle AH'O \sim \triangle AHM$ より

$$AH' : AO = AH : AM$$

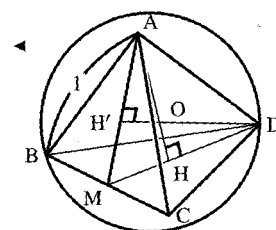
$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} : r = \frac{\sqrt{6}}{3} : \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} r = \frac{1}{2}$$

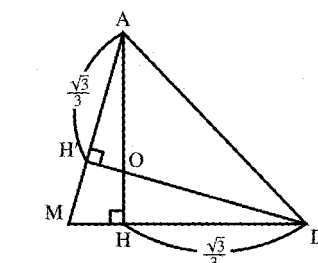
$$\Leftrightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$



◀ このやり方は、平面上の三角形における、内接円の半径の導き方 (p.183) と同じ発想である。



◀ $MH = \sqrt{AM^2 - AH^2}$ から計算してもよい。

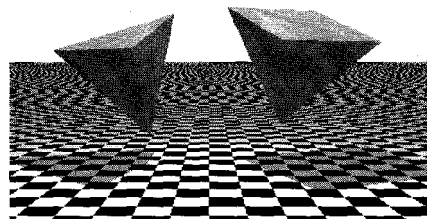


4.3.3 正多角錐

■正多角錐

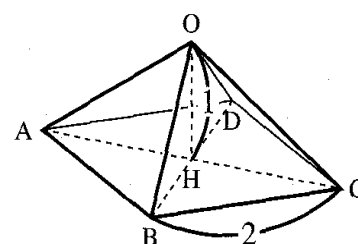
空間図形において、底面が正多角形で、側面が二等辺三角形で作られ、側面の頂点が一点に集まっている多面体のことを正多角錐 (regular pyramid) という (正角錐ともいう)。底面が正 n 角形の正多角錐のことを正 n 角錐といい、 n は3以上の自然数をとる。

右の図は正三角錐と正四角錐である。底面の形状がわかり易いように底面を上にしてある。



【例題:正四角錐の計量】

右図のように、底面の1辺の長さが2, 高さ OH が1である正四角錐 $OABCD$ について以下の問に答えよ。



- (1) 底面と側面のなす角 α を求めよ。
- (2) A から辺 OB に下ろした垂線 AE の長さを求めよ。
- (3) 隣り合う2つの側面のなす角 β を求めよ。

【解答】

(1) 辺 AB の中点を M とおくと、 $\triangle OAB, \triangle HAB$ は共に二等辺三角形であるから、 $OM \perp AB, HM \perp AB$ である。

よって、 $\angle OMH$ が底面と側面のなす角 α である。

いま、直角三角形 OMH において、 $OH = HM = 1$ より、 $\alpha = 45^\circ$ となる。これは、他の側面についても同様である。

(2) $\angle OBA = \theta$ とおくと、三平方の定理より

$$OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$$

$$OM = \sqrt{2}$$

である。 $\triangle OBM$ に着目して、 $\sin \theta = \frac{OM}{OB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

となる。ここで、 $\triangle ABE$ に着目すれば、

$$AE = AB \sin \theta = 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

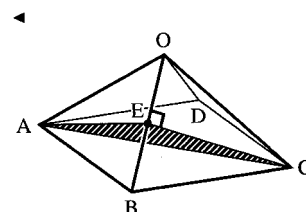
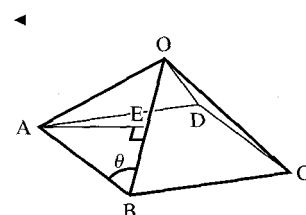
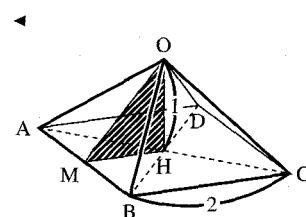
(3) $\triangle OAB = \triangle OCB$ であり、 $AE \perp OB$ より、 $CE \perp OB$ である。よって、 $\angle AEC$ が求める角 β である。

$\triangle AEC$ に点 E からみる余弦定理を用いると

$$\cos \beta = \frac{AE^2 + CE^2 - AC^2}{2 AE \cdot CE} = \frac{2 AE^2 - AC^2}{2 AE^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{(2\sqrt{2})^2}{2(\frac{2\sqrt{6}}{3})^2}}{2(\frac{2\sqrt{6}}{3})^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{よって、}$$

よって、 $\beta = 120^\circ$ となる。



§ 4.4 図形の面積比・体積比

相似な図形どうしでは面積比や体積比について、一定の法則が成り立つ。ここでは、相似な図形をもちいた平面や空間図形の計量について考えていこう。

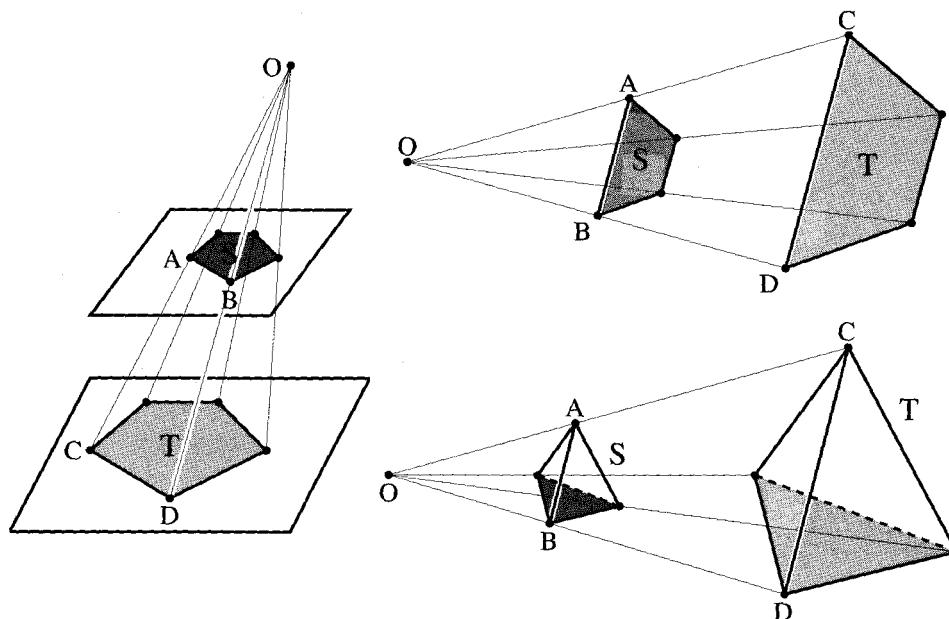
4.4.1 相似と相似比

■相似

2つの図形が相似(similar)であるとは、一方の図形を、ある1点に対して拡大・縮小すれば、他方の図形と合同になる関係のことをいった。

これらの定義は、空間図形の相似についても当てはまる。

下の図において、図形 S と図形 T はいずれも相似である。



■相似比

相似な二つの図形の、対応する辺の長さの比を相似比(ratio of similitude)という。上の図の S と T の相似比は、たとえば $AB:CD$ で与えられる。

4.4.2 相似な図形の比

■平面図形の面積比

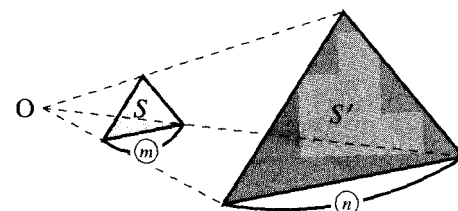
右の図のように、相似比が $m:n$ である2つの三角形の面積比 $S:S'$ を考えてみよう。

相似比が $m:n$ であるから、底辺の比は $m:n$, 高さの比も $m:n$ となるので、左側の三角形の底辺と高さをそれぞれ a, h とすると、右側の三角形の底辺と高さは $a \times \frac{n}{m}$, $h \times \frac{n}{m}$ となる。

これより $S:S'$ は

$$S:S' = \frac{1}{2}ah : \frac{1}{2} \left(a \frac{n}{m}\right) \left(h \frac{n}{m}\right) = 1 : \frac{n^2}{m^2} = m^2 : n^2$$

三角形でなく任意の多角形の場合でも、ある頂点から他の頂点に対角線を引くことで三角形の分割できるので、この式は任意の多角形で成り立つ。また、多角形に限らず一般的な平面図形においても、この式は成り立つ。



相似な平面図形の面積比

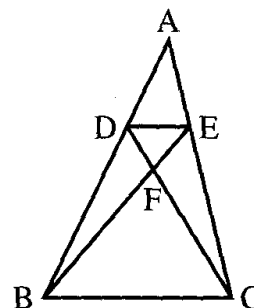
相似比が $m:n$ である2つの平面図形について、その面積比は $m^2:n^2$ である。

【例題・相似な図形の相似比】

右の図において、 $AD:DB=1:2, AE:EC=1:2$ であるとする。

(1) 相似な三角形の組を2つ見つけ、それぞれについて面積の比を求めよ。

(2) $\triangle DEF$ と $\triangle ABC$ の面積比を求めよ。



【解答】

(1) $\triangle ADE$ と $\triangle ABC$ について、

$AD:AB=AE:AC=1:3$, $\angle A$ は共通であるので、

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ である。

相似比は $1:3$ なので、面積比は $1^2:3^2=1:9$ である。

また、 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ より $\angle ADE = \angle ABC$ なので $DE \parallel BC$.

これより、 $\triangle FDE \sim \triangle FBC$ である。

相似比は $DE:BC=1:3$ なので、面積比は $1^2:3^2=1:9$ である。

(2) $\triangle DEF$ の面積を S とおくと、(1)より $\triangle FCB=9S$ である

また

$EF:FB=1:3$ より $\triangle DBF=3S$

$DF:FC=1:3$ より $\triangle EFC=3S$

であるので、四角形 $DECB=S+3S+3S+9S=16S$

ここで、(1)より $\triangle ADE:\triangle ABC=1:9$ より

四角形 $DECB:\triangle ABC=8:9$

となるので、 $\triangle ABC=16S \times \frac{9}{8}=18S$

よって、 $\triangle DEF$ と $\triangle ABC$ の面積比は $S:18S=1:18$ である。

■空間図形の表面積比と体積比

相似比が $m:n$ である、2つの相似な三角錐について、表面積比 $S:S'$ と体積比 $V:V'$ を考えてみよう。

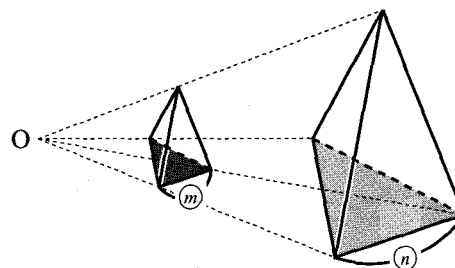
右の図のように、2つの立体が相似ならば、対応する表面の図形も互いに相似である。

それゆえ、相似比が $m:n$ の図形の表面比は

$S:S'=m:n$ となる。

また、左の三角錐の底面積と高さを T, h とすると、右の三角錐の底面積と高さは

$T \times \frac{n^2}{m^2}, h \times \frac{n}{m}$ となるから



$$V:V' = \frac{1}{3}Th : \frac{1}{3} \times \frac{Tn^2}{m^2} \times \frac{hn}{m} = 1 : \frac{n^3}{m^3} = m^3:n^3$$

となる。

また、一般の空間図形においても、次のことが成り立つ

相似な空間図形の表面積比と体積比

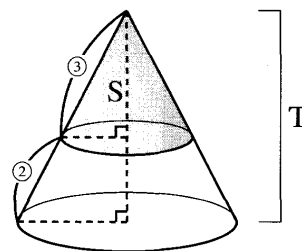
相似比が $m:n$ である 2 つの空間図形について

- 1) それぞれの表面をなす図形は相似であり, その相似比は $m:n$ である.
- 2) 表面積比は $m^2:n^2$ である.
- 3) 体積比は $m^3:n^3$ である.

【例題:相似比と面積比・体積比】

右図のような円錐 T を切り,上にできた円錐を S とする.

- (1) S と T は相似である.相似比を求めよ.
- (2) S と T の表面積比を求めよ.
- (3) T から S を除いた図形を U とする. S と U の体積比を求めよ.



【解答】

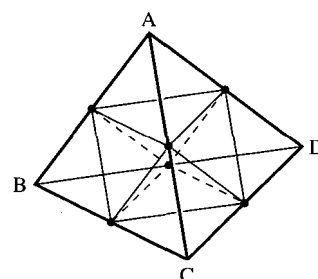
- (1)母線の長さの比から, $3:5$
- (2)(1)より,表面積比は $3^2:5^2=9:25$
- (3)(1)より, S と T の体積比は $3^3:5^3=27:125$
つまり, S と U の体積比は $27:(125-27)=27:98$

◀ 相似比が $m:n$ のとき, 表面積比は $m^2:n^2$
◀ 相似比が $m:n$ のとき, 体積比は $m^3:n^3$. また, S と U は相似ではないことに注意.

【例題:空間図形の表面積比と体積比】

正四面体のそれぞれの辺の中点を結ぶと,正八面体ができる.このとき,つぎの間に答えよ.

- (1)この正四面体と正八面体の表面積比を求めよ.
- (2)この正四面体と正八面体の体積比を求めよ.



【解答】

- (1)まず,正四面体の1つの面も,正八面体の1つの面も正三角形であり,互いに相似である.相似比は $2:1$ であるから,面積比は $2^2:1^2=4:1$ である.

正四面体の1つの面の面積を S とすると,正四面体の表面積は $4S$,
正八面体の表面積は $8 \times (\frac{S}{4}) = 2S$ である.

よって,求める比は $4S:2S=2:1$ である.

- (2)正八面体は,もとの正四面体から4つの小さい正四面体を除いたものである.

もとの正四面体と小さい正四面体の相似比は $2:1$ だから,体積比は

$2^3:1^3=8:1$ つまり,正四面体の体積を V とすると小さい正四面体の

体積は $\frac{V}{8}$ よって,正八面体の体積は $V - 4 \times (\frac{V}{8}) = \frac{V}{2}$ とな.,

求める比は $V:\frac{V}{2}=2:1$ である.

◀ 相似比が $m:n$ のとき, 面積比は $m^2:n^2$
◀ 正八面体は, その名の通り 8 枚の正三角形から成っている.

◀ 相似比が $m:n$ のとき, 体積比は $m^3:n^3$

§ 4.5 球の体積と表面積

ここでは、球とその切り口に現れる円の計量について考えていこう。

4.5.1 球の表面積と体積

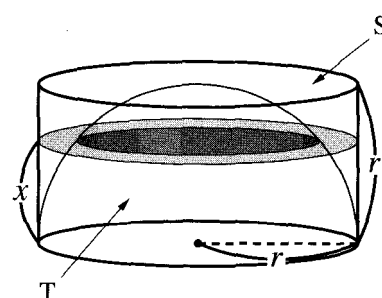
■ 球の体積

球の体積について考えるため、まず次の例題を解いてみよう。

【例題:球と円柱】

右の図において、円柱から半球 T を除いた図形を S とする。 $0 < x < r$ のとき、

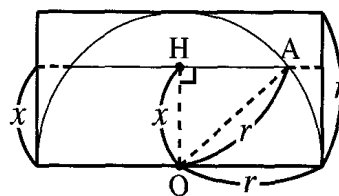
- (1) 高さ x の水平面で S を切ったときの、切り口に現れる小さい方の円の半径を求めよ。
- (2) 高さ x の水平面による、 S の断面積を求めよ。



【解答】

(1) 底面に垂直な平面で立体を半分に分ければ、右の断面図となる。

高さ x の平面による半球 T の切り口は、左図の線分 HA を半径とした円になるので、線分 HA の長さを求めればよい。



よって、求める長さは

$$HA = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

(2) 求める面積は

「高さ x の平面による円柱の切り口の面積」
(これは半径 r の円)

から

「高さ x の平面による半球 T の切り口の面積」
(これは半径 $\sqrt{r^2 - x^2}$ の円)

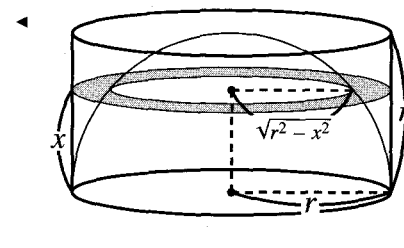
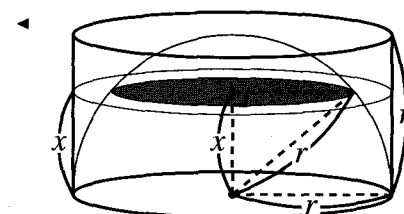
を引けばよいので、求める面積は

$$\pi r^2 - \pi (\sqrt{r^2 - x^2})^2 = \pi r^2 - \pi (r^2 - x^2) = \pi x^2$$

一般に、2つの立体について、どの高さに対する切り口の面積も等しいならば、これら2つの立体の体積は等しいことが知られている。上の例題において、底面の半径 r 、高さ r の円錐を U とすると、高さ x における U の断面積は S と等しく πx^2 になる、つまり、 S と U は体積が等しく

$$(\text{半球 } T \text{ の体積}) = (\text{円柱の体積}) - (\text{円錐 } U \text{ の体積}) = \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

と計算できる。この T の体積を2倍して、半径 r の球の体積 $\frac{4}{3} \pi r^3$ を得る。



球の体積

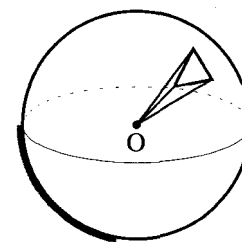
半径 r の球の体積 V は、 $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ である。

■球の表面積

まず,中心 O ,半径 r の球の体積と表面積の関係について考えてみよう。

球の表面に小さい三角形を描き,その3頂点と球の中心 O を結ぶと三角錐ができあがる。今度は,その三角形の一边を使ってまた別の三角形を描き,頂点と中心 O を結ぶと別の三角錐ができあがる。

このような操作を繰り返していけば,球全体を三角錐の集まりとして分割することができる。



球体である地球の地面を,通常私たちは平らであると感じてい。

つまり,球の表面に描く三角形も十分に小さければ,平らであると扱ってもよいだろう。

すると,球体は三角錐の集まりとして扱ってもよいだろう。

また,このときひとつひとつの三角錐は大変細長いものとなるので,その高さはすべて r と考えてもよいだろう。

すべての三角錐の体積が $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$ であるから,

角錐の体積の和は, $\frac{1}{3} \times (\text{底面積の和}) \times (\text{高さ})$ となる・三角錐の底面積の和は球の表面積と考えてよいので,

半径 r の球の体積を V ,表面積を S とすると, $V = \frac{1}{3} S r$ である。

「球の体積」より $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ なので,

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} S r \quad \therefore S = 4 \pi r^2$$

である。

球の表面積

半径 r の球の表面積 S は, $S = 4\pi r^2$ である。

【例題:球の表面積,体積】

- (1) 半径 4 cm の球の,表面積と体積をそれぞれ求めよ。
- (2) 1辺 8 cm の立方体の表面積と直径 10 cm の球の表面積では,どちらが大きいのか。
- (3) 1辺 10 cm の立方体に高さ 9 cm まで水を入れてある。この水の中に半径 3 cm の球を静かに入れると,何 cm^3 の水があふれるか。ただし,表面張力は考えない。

【解答】

(1) 表面積は $4\pi \cdot 4^2 = 64\pi \text{ cm}^2$

体積は $\frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi \text{ cm}^3$

(2) 1辺 8 cm の立方体の表面積は, $6 \times 8^2 = 384\text{ cm}^2$

直径 10 cm の球の半径は 5 cm なので,表面積は

$$4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \approx 100 \times 3.14 = 314\text{ cm}^2$$

よって,1辺 8 cm の立方体の表面積の方が大きい。

(3) 水の中に入れた球の体積は $\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$ なので,水の体積と球の体積の和は

$$10 \cdot 10 \cdot 9 + 36\pi = 900 + 36\pi \text{ cm}^3$$

である。実際には $10^3 = 1000 \text{ cm}^3$ しか入らないので,あふれる水の体積は

$$(900 + 36\pi) - 1000 = 36\pi - 100 \text{ cm}^3$$

【例題:円錐と内接球】

底面の半径が 4 ,母線の長さが 10 の円錐がある。

(1)この円錐に内接する球 O_1 の半径を求めよ。

(2)球 O_1 の上に外接し,さらに円錐に内接する球 O_2 の半径を求めよ。

ただし,球 O_1, O_2 とも,半径はできるだけ大きくなるようにする。

【解答】

円錐の頂点を A ,球 O_1, O_2 の中心をそれぞれ P, Q とし,
 A から底面に下ろした垂線の足を H とする.このとき,線分
 AH は P, Q を通る。

(1)直線 AH を含むように,この立体図形を縦に垂直に切る.
 すると,断面図は右欄外の図のようになり,球 O_1 の断面
 は, $\triangle ABC$ の内接円になる。

$\triangle ABC$ の面積を S ,球 O_1 の半径 r_1 とすると

$$S = \frac{1}{2}(10+10+8)r_1 \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

面積 S は, $AH = \sqrt{10^2 - 4^2} = 2\sqrt{21}$ より

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{21} = 8\sqrt{21}$$

であるので,これを①に代入して

$$8\sqrt{21} = \frac{1}{2}(10+10+8)r_1$$

$$\therefore r_1 = \frac{8}{14}\sqrt{21} = \frac{4}{7}\sqrt{21}$$

(2)(1)と同じ断面を考え,右欄外の図のように E をとると

$\triangle AQE \sim \triangle ACH$ である。

よって,球 O_2 の半径を r_2 とすれば

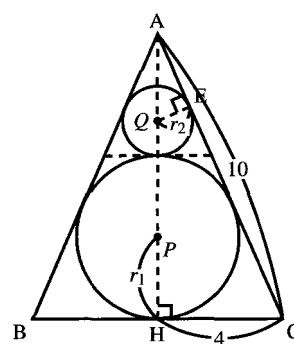
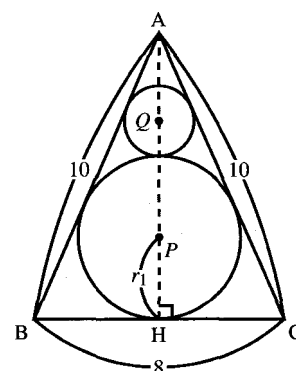
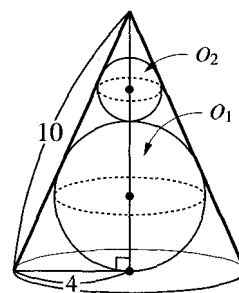
$$AQ:QE = AC:CH$$

$$(AH - 2r_1 - r_2):r_2 = 10:4 = 5:2$$

$$2\left(2\sqrt{21} - \frac{8}{7}\sqrt{21} - r_2\right) = 5r_2$$

$$\frac{12}{7}\sqrt{21} = 7r_2$$

$$\therefore r_2 = \frac{12}{49}\sqrt{21}$$



付録
三角比の表

角	sin	cos	tan	角	sin	cos	tan
0.	0.0000	1.0000	0.0000	45.	0.7071	0.7071	1.0000
1.	0.0175	0.9998	0.0175	46.	0.7193	0.6947	1.0355
2.	0.0349	0.9994	0.0349	47.	0.7314	0.6820	1.0724
3.	0.0523	0.9986	0.0524	48.	0.7431	0.6691	1.1106
4.	0.0698	0.9976	0.0699	49.	0.7547	0.6561	1.1504
5.	0.0872	0.9962	0.0875	50.	0.7660	0.6428	1.1918
6.	0.1045	0.9945	0.1051	51.	0.7771	0.6293	1.2349
7.	0.1219	0.9925	0.1228	52.	0.7880	0.6157	1.2799
8.	0.1392	0.9903	0.1405	53.	0.7986	0.6018	1.3270
9.	0.1564	0.9877	0.1584	54.	0.8090	0.5878	1.3764
10.	0.1736	0.9848	0.1763	55.	0.8192	0.5736	1.4281
11.	0.1908	0.9816	0.1944	56.	0.8290	0.5592	1.4826
12.	0.2079	0.9781	0.2126	57.	0.8387	0.5446	1.5399
13.	0.2250	0.9744	0.2309	58.	0.8480	0.5299	1.6003
14.	0.2419	0.9703	0.2493	59.	0.8572	0.5150	1.6643
15.	0.2588	0.9659	0.2679	60.	0.8660	0.5000	1.7321
16.	0.2756	0.9613	0.2867	61.	0.8746	0.4848	1.8040
17.	0.2924	0.9563	0.3057	62.	0.8829	0.4695	1.8807
18.	0.3090	0.9511	0.3249	63.	0.8910	0.4540	1.9626
19.	0.3256	0.9455	0.3443	64.	0.8988	0.4384	2.0503
20.	0.3420	0.9397	0.3640	65.	0.9063	0.4226	2.1445
21.	0.3584	0.9336	0.3839	66.	0.9135	0.4067	2.2460
22.	0.3746	0.9272	0.4040	67.	0.9205	0.3907	2.3559
23.	0.3907	0.9205	0.4245	68.	0.9272	0.3746	2.4751
24.	0.4067	0.9135	0.4452	69.	0.9336	0.3584	2.6051
25.	0.4226	0.9063	0.4663	70.	0.9397	0.3420	2.7475
26.	0.4384	0.8988	0.4877	71.	0.9455	0.3256	2.9042
27.	0.4540	0.8910	0.5095	72.	0.9511	0.3090	3.0777
28.	0.4695	0.8829	0.5317	73.	0.9563	0.2924	3.2709
29.	0.4848	0.8746	0.5543	74.	0.9613	0.2756	3.4874
30.	0.5000	0.8660	0.5774	75.	0.9659	0.2588	3.7321
31.	0.5150	0.8572	0.6009	76.	0.9703	0.2419	4.0108
32.	0.5299	0.8480	0.6249	77.	0.9744	0.2250	4.3315
33.	0.5446	0.8387	0.6494	78.	0.9781	0.2079	4.7046
34.	0.5592	0.8290	0.6745	79.	0.9816	0.1908	5.1446
35.	0.5736	0.8192	0.7002	80.	0.9848	0.1736	5.6713
36.	0.5878	0.8090	0.7265	81.	0.9877	0.1564	6.3138
37.	0.6018	0.7986	0.7536	82.	0.9903	0.1392	7.1154
38.	0.6157	0.7880	0.7813	83.	0.9925	0.1219	8.1443
39.	0.6293	0.7771	0.8098	84.	0.9945	0.1045	9.5144
40.	0.6428	0.7660	0.8391	85.	0.9962	0.0872	11.4301
41.	0.6561	0.7547	0.8693	86.	0.9976	0.0698	14.3007
42.	0.6691	0.7431	0.9004	87.	0.9986	0.0523	19.0811
43.	0.6820	0.7314	0.9325	88.	0.9994	0.0349	28.6363
44.	0.6947	0.7193	0.9657	89.	0.9998	0.0175	57.2900
45.	0.7071	0.7071	1.0000	90.	1.0000	0.0000	なし

あとがき

コンピュータがネットワークで繋がれた現在、ソフトウェアの開発において、オープンソースという活動があります。オープンソースとは、ソフトウェアの設計図にあたるソースコードを、インターネットなどを通じて無償で公開し、誰でもそのソフトウェアの開発に参加できるというものです。

ソースコードさえあれば、そのソフトウェアで利用されている技術を容易に転用することが可能となるため、企業などでは自社の開発したソフトウェアのソースコードは極秘とするのが普通です。しかし、オープンソースの考え方は、ソースコードを公開して有用な技術を共有することで、世界中の誰もが自由にソフトウェアの開発に参加することができ、その方が素晴らしいソフトウェアが生まれるはずだという思想に基づいています。

私達FTEXTは、このオープンソースという考え方を、ソースコードに限らず教材や一般のコンテンツ作成に応用する活動を進めています。このFTEXT数学シリーズもそうして作られたものです。

このような手法で教科書を作ることに、従来の教科書作りにはない特徴として、次のことが挙げられます。まず1点目として、書く側と読む側とに完全に二分化されていた状況が崩れ、全ての人が書くことに参加できる、ということがあります。従来では、教師が生徒の視点を想像して文章を書いていました。しかし、この新しい教科書作りでは、教科書が作られるまさにその過程で、生徒からの質問や指摘が飛び込んできます。さらには、能力とやる気さえあれば生徒自らが教科書を書き進めていくこともできるのです。

次に2点目として、数学の教授法について、全国の先生方がもつコツを取り入れた教科書作りができる、ということがあります。食べ物に好き嫌いがあるように、教師といえども教える部分によって、説明の得意不得意があるものです。この新しい教科書作りでは、全国の先生方の得意な部分を集めていくことができるのです。これは、生徒のためになるだけではなく、他の先生方の教授法のスキルアップにもつながるでしょう。実際このFTEXT数学でも、従来の教科書では見られない最新の教授法を取り入れた編集になっています。

最後に3点目として、この教科書はインターネットを通じて世界中の人に公開されるので、今まで教育業界とは直接関係なかった方々の意見やアイデアも取り入れられる、ということがあります。ある分野での専門家の方々に、教科書で学ぶ数学の応用例などを盛んに紹介していただければ、「数学なんて何の役に立つのかわからない」などという言説を払拭することができるかもしれません。

普通、教材というものは、ある技術を身に付ける必要のある人が利用するものであり、特化した知識を扱うものですが、“教科書”は日本中のほぼ全員が触れるという特殊な教材です。それゆえ、教科書の役割とは、次代を支える人たちにぜひ学んでおいて欲しい知識について、その時代のスタンダードを担うものであると考えます。

工学的技術の進歩により、世界の知識はより細分化の方向に進んでいます。しかし、そのような時代であるからこそ、知識の全体を広く見渡せる教科書の存在が必要なのではないでしょうか。

現在私達は、世界の知恵を集めるという手法を用いて、数学の教科書に限らず、他の分野の教科書についても執筆をはじめようとしています。さらに今後は、教科書を作るという枠組みを超えて、新しい教材作成のプラットフォームを開発していく予定です。

しかし、これらを実行していくための力がまだまだ私達には足りません。このような活動に興味をもたれた方やご支援いただける方は、ぜひホームページ(<http://www.ftext.org/>)の方までアクセスください。