

## 第3章 三角比

### § 3.1 鋭角の三角比

この節ではまず、直角三角形について考え、 $90^\circ$  より小さな角(鋭角)について三角比の基礎を学ぶ。どのような多角形も、対角線を引くことによっていくつかの三角形に分割できる。逆にいえば、適当な三角形を組み合わせていくことにより、任意の多角形を作ることができる。そのため、三角形は多角形の中でも最も基本的な図形であるといえる。ここではまず、三角形の分析のための基礎となる、直角三角形について考えてみる。

#### 3.1.1 正接 (tan)

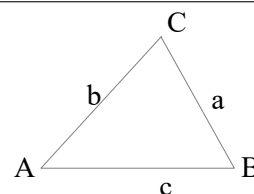
##### ■三角形の表記に関する注意

$\triangle ABC$  において、以下のように略することが多い。

$\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  の大きさ  $\rightarrow$  それぞれ  $A$ ,  $B$ ,  $C$

辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  の長さ  $\rightarrow$  それぞれ  $a$ ,  $b$ ,  $c$

今後、特に断りのない限りこの記法にしたがうこととする。



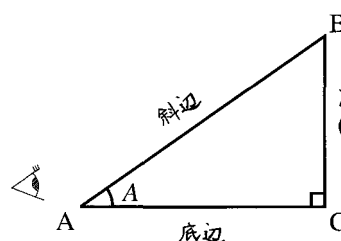
##### ■直角三角形の表記に関する注意

右図のような直角三角形  $ABC$  を  $\angle A$  からみるとき

辺  $AB$  のことを斜辺(hypotenuse)

辺  $BC$  のことを対辺(opposite side)

辺  $CA$  のことを底辺(base)



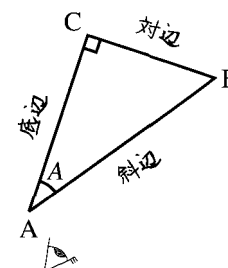
という。

このうち底辺、対辺は、 $\angle A$  から直角をみることによって相対的に決まる。

図で描かれたときに、下の部分にあるから底辺というのではない。

たとえば、右図のように斜めになっている直角三角形でも、点  $A$  からみた

ときの斜辺、対辺、底辺は、それぞれ辺  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  となる。



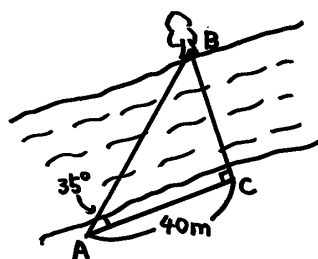
##### ■川を渡らず川幅を知る方法

右図において、川を渡ることなく、 $C$  点から対岸の  $B$  点までの距離  $BC$  を求めるにはどうしたらよいだろうか。

まず、 $C$  点から見て、直線  $CB$  と直角の方向に  $A$  点を適当に定め、 $C$  点から  $A$  点までの距離を測る。

たとえば、これは  $40\text{ m}$  であったとする。

次に、 $A$  点から見て、直線  $AB$  と直線  $AC$  のつくる角の大きさを測る。たとえば、これは  $35^\circ$  であったとする。



$\triangle ABC$  は  $\angle C$  が直角の直角三角形であるから、この縮図  $\triangle A'B'C'$  を、たとえば、 $A'C' = 3\text{ cm}$  として描くと左図のようになる。

そこで、辺  $B'C'$  の長さを測ると約  $\boxed{\text{ア}}$  cm になっている(実際にじょうぎ定規で測ってみよう)。

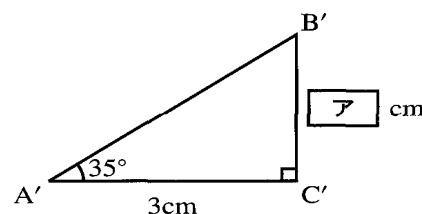
ここで、 $\triangle ABC$  と  $\triangle A'B'C'$  は相似であるから

$$\frac{CB}{AC} = \frac{C'B'}{A'C'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\boxed{\text{ア}}}{3} = \boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ。この値は、いわば  $AC$  に対する  $CB$  の倍率であることに注意しよう。

実際には、 $AC = 40\text{ m}$  であったから

$$BC \approx AC \times \boxed{\text{イ}} = 40\text{ m} \times \boxed{\text{イ}} = \boxed{\text{ウ}}\text{ m} \quad \text{と計算できる。}$$



このように、実際に川を渡らずとも距離 $BC$ が求められたのは、適当な縮図 $\triangle A'B'C'$ を使い、 $AC$ に対する $CB$ の倍率(比)を計算したためである。この値は縮図の大きさによらない、 $35^\circ$ という角度に関する固有の値である。

ア、イ、ウの答えーア=2.1 , イ=0.70 , ウ=28

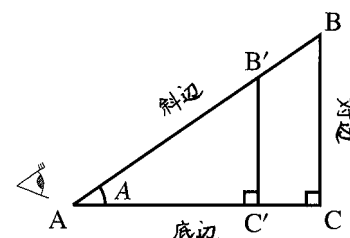
## ■正接の定義

一般に、 $\angle C$ が直角である直角三角形 $ABC$ において、 $\angle A$ から見たときの

$$\frac{(\text{対辺})}{(\text{底辺})} = \frac{CB}{AC}$$

の値は、 $\triangle ABC$ の大きさに関係無く、 $\angle A$ の大きさだけで決まる。  
たとえば、右図の $\triangle AB'C'$ は $\triangle ABC$ の0.75倍の大きさで描かれているので

$$\frac{C'B'}{AC'} = \frac{0.75 \times CB}{0.75 \times AC} = \frac{CB}{AC}$$



となり、直角三角形の大きさとは関係ないことがわかる。

ここで、この(対辺)／(底辺)の値を $A$ の正接または、 $A$ のタンジェント(tangent)といい、 $\tan A$  と書く。

正接の定義

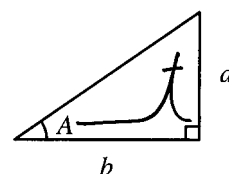
右図の直角三角形  $ABC$  において

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

とする。

$\tan A$  の値  $\frac{a}{b}$  は、右図のように  $\tan$  の頭文字  $t$  の筆記体の書き順に合わせ、「 $b$  分の  $a$  」と記憶するとよい。

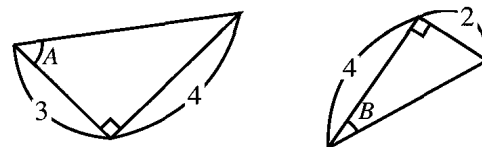
$\tan A$  は、 $\angle A$ からみたときの底辺に対する対辺の倍率を表していて、さきほどの川の例では、(底辺):(対辺) =  $b:a = 1:\tan 35 \approx 1:0.7$  であった。



## 【例題:正接の定義】

右の図において、 $\tan A$  ,  $\tan B$  をそれぞれ求めよ。

【解答】 右図より、 $\tan A = \frac{4}{3}$   
 $\tan B = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



## 3.1.2 正弦(sin)と余弦(cos)

### ■正弦と余弦の定義

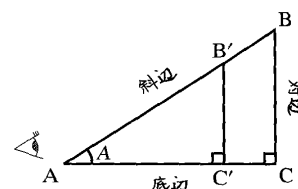
正接の場合と同じように、 $\angle C$ が直角である直角三角形 $ABC$ において、 $\angle A$ から見たときの

$$(\text{対辺}) / (\text{斜辺}) = \frac{BC}{AB} \text{ の値や、} (\text{底辺}) / (\text{斜辺}) = \frac{AC}{BA} \text{ の値は、}$$

$\triangle ABC$ の大きさに関係無く、

$\angle A$ の大きさだけで決まる。

たとえば、右図の $\triangle AB'C'$ は $\triangle ABC$ の0.75倍の



大きさを描かれているが

$$\frac{B'C'}{AB'} = \frac{0.75 \times BC}{0.75 \times AB} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{AC'}{B'A} = \frac{0.75 \times AC}{0.75 \times BA} = \frac{AC}{BA}$$

となり直角三角形の大きさは関係ないのがわかる。

ここで、(対辺)／(斜辺)の値を  $A$  の正弦または、 $A$  のサイン( *sine* )といい、 $\sin A$  と書く。

また、(底辺)／(斜辺)の値を  $A$  の余弦または、 $A$  のコサイン( *cosine* )といい、 $\cos A$  と書く。

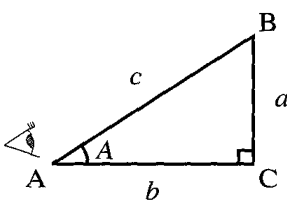
正弦・余弦の定義

右図の直角三角形  $ABC$  において

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

とする。



### 【例題：正弦・余弦の定義】

右の図において、

- (1) 長さ  $x$ ,  $y$  を求めよ.
- (2)  $\sin A$ ,  $\cos A$  を求めよ.
- (3)  $\sin B$ ,  $\cos B$  を求めよ.

【解答】

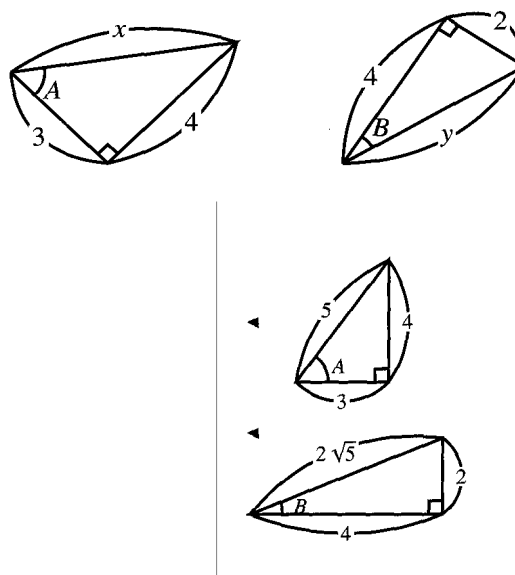
- (1) 三平方の定理より、 $x = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$   
 $y = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

- (2) 右図より定義にしたがって

$$\cos A = \frac{3}{5}, \quad \sin A = \frac{4}{5}$$

- (3) 右図より定義にしたがって

$$\cos B = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \sin B = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



### 3.1.3 三角比の値

正接と正弦および余弦をまとめて、三角比(trigonometric ratio) という。いろいろな角度に関する三角比の値を付録B にまとめている。

この表よりたとえば、 $\cos 40^\circ$  の値は約  $0.766$  , また  $\sin A = 0.97$  のときの  $A$  の大きさは約  $76^\circ$  とわかる。

#### 【暗記：三角比の値】

次の問に答えよ。

- (1) 3 辺の長さが  $1, 2, \sqrt{3}$  の直角三角形を用い、 $\sin 30^\circ$ ,  $\cos 30^\circ$ ,  $\tan 30^\circ$  を求めよ。  
 また、 $\sin 60^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$ ,  $\tan 60^\circ$  を求めよ。
- (2) 3 辺の長さが  $1, 1, \sqrt{2}$  の直角三角形を用い、 $\sin 45^\circ$ ,  $\cos 45^\circ$ ,  $\tan 45^\circ$  を求めよ。

## 【解答】

(1) 右欄外の直角三角形より

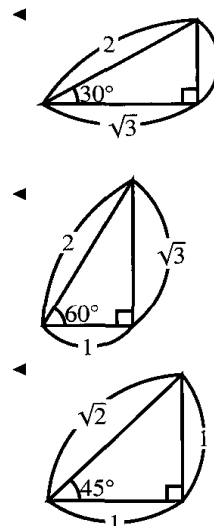
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

また、右図のように向きを変えて

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

(2) 右欄外の直角三角形より

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$



上の例題で導いた  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  は有名角といい、これらの三角比の値は、瞬時に引き出せるようにしておこう。

## 【例題: 三角比どうしの関係】

(1)  $\angle C = 90^\circ$  である直角三角形  $ABC$  について、次の間に答えよ。

a)  $\sin A = \frac{2}{3}$  であったとする。斜辺の長さが  $c = 3$  であるとき、他の2辺の長さを求めよ。

b) a) の三角形を利用して、 $\cos A$ 、 $\tan A$  の値を求めよ。

(2) 上の(1)のやり方をまねて、次の間に答えよ。ただし、 $0^\circ < A < 90^\circ$  である。

a)  $\sin A = \frac{3}{5}$  のとき、 $\cos A$ 、 $\tan A$  の値を求めよ。

b)  $\cos A = \frac{1}{3}$  のとき、 $\sin A$ 、 $\tan A$  の値を求めよ。

c)  $\tan A = 7$  のとき、 $\cos A$ 、 $\sin A$  の値を求めよ。

## 【解答】

(1) a) 直角三角形  $ABC$  を右図のように考える。 $\sin A$  の値は  $\frac{a}{c}$ に等しく、 $c = 3$  より  $a = 2$ 。このとき、三平方の定理より  $2^2 + b^2 = 3^2$  であるから

$$b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

である。よって、直角三角形  $ABC$  の他の2辺の長さは、

$$a = 2, \quad b = \sqrt{5} \text{ である。}$$

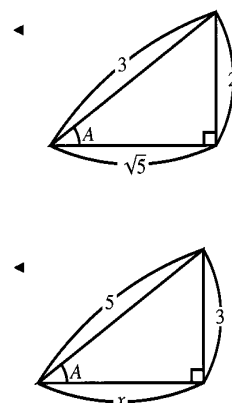
b) a) で求めた値を書き込めば右図のようになる。

これに  $\cos$ 、 $\tan$  の定義を用いれば

$$\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan A = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ である。}$$

(2) a)  $\sin A = \frac{3}{5}$  となる直角三角形の1つとして、右図が考えられる。このとき、底辺の長さを  $x$  とすると、三平方の定理より  $x^2 + 3^2 = 5^2$  であるから

$$x = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

よって、 $\cos A = \frac{4}{5}$ 、 $\tan A = \frac{3}{4}$  となる。

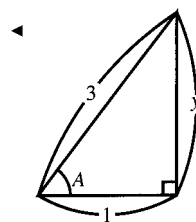
b)  $\cos A = \frac{1}{3}$  となる直角三角形の1つとして、右図が考えられる。

このとき、対辺の長さを  $y$  とすると、三平方の定理より  $1^2 + y^2 = 3^2$  であるから

$$y = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$

よって、次のように求められる。

$$\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tan A = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$



c)  $\tan A = 7$  となる直角三角形の1つとして、右図が考えられる。

このとき、斜辺の長さを  $z$  とすると、三平方の定理より  $1^2 + 7^2 = z^2$  であるから

$$z = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$$

よって、次のように求められる。

$$\cos A = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}, \quad \sin A = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$



### 3.1.4 三角比の相互関係

■  $\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\tan A$  の間にはどのような関係があるか

前ページの例題でみたように、同じ角度に対する三角比の値は、互いにばらばらなものではなく、ある関係によって結ばれている。

以下では、この三角比の間に成り立つ関係を、一般的に導いてみよう。右図の直角三角形において

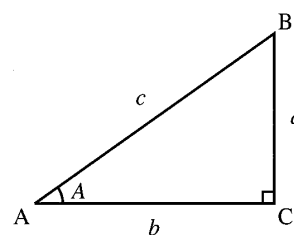
$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A$$

であるから、 $\tan A$  は

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{c \sin A}{c \cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

と表すことができる。つまり

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad \dots\dots ①$$



が成り立つ。また、三平方の定理より  $a^2 + b^2 = c^2$  であるから、これに  $a = c \sin A$  と  $b = c \cos A$  を代入して

$$\begin{aligned} (c \sin A)^2 + (c \cos A)^2 &= c^2 \rightarrow c^2 (\sin A)^2 + c^2 (\cos A)^2 = c^2 \\ \rightarrow (\sin A)^2 + (\cos A)^2 &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。普通  $(\sin A)^2$ ,  $(\cos A)^2$ ,  $(\tan A)^2$  など、それぞれ  $\sin^2 A$ ,  $\cos^2 A$ ,  $\tan^2 A$  と書く。つまり

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad \dots\dots ②$$

が成り立つ。

【暗記】:  $\tan A$  と他の三角比との関係

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  という関係から、次の式を導け.

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{\tan^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A}$$

$$(2) \quad \tan^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}$$

【解答】

(1)  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  の両辺を  $\sin^2 A$  で割ると

$$1 + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\tan^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A} \quad \dots\dots ③$$

(2)  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  の両辺を  $\cos^2 A$  で割ると

$$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + 1 = \frac{1}{\cos^2 A} \rightarrow \tan^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A} \quad \dots\dots ④$$

### 三角比の相互関係

右図の直角三角形において

1)  $\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\tan A$  の関係

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

2)  $\sin A$  と  $\cos A$  の関係

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

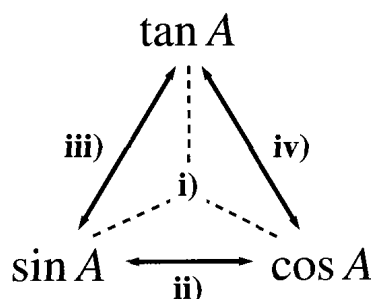
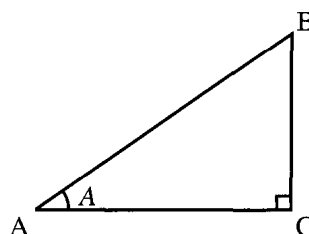
3)  $\tan A$  と  $\sin A$  の関係

$$1 + \frac{1}{\tan^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A}$$

4)  $\cos A$  と  $\tan A$  の関係

$$\tan^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}$$

が成り立つ.



### 【例題: 三角比の相互関係の利用】

『三角形の相互関係』を使って、次の問いに答えよ. ただし,  $0^\circ < A < 90^\circ$  である.

(1)  $\sin A = \frac{3}{5}$  のとき,  $\cos A$ ,  $\tan A$  の値を求めよ.

(2)  $\cos A = \frac{1}{3}$  のとき,  $\sin A$ ,  $\tan A$  の値を求めよ.

(3)  $\tan A = 7$  のとき,  $\cos A$ ,  $\sin A$  の値を求めよ.

【解答】

(1)  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  より

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \quad \cos A > 0 \text{ なので, } \cos A = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ より, } \tan A = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$$

(2)  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  より

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\sin A > 0 \text{ なので, } \sin A = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ である.}$$

$$\text{また, } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ より } \tan A = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{1}{3} = 2\sqrt{2}$$

(3)  $\tan^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}$  より

$$\cos^2 A = \frac{1}{1 + \tan^2 A} = \frac{1}{1 + 7^2} = \frac{1}{50}$$

$$\cos A > 0 \text{ なので, } \cos A = \sqrt{\frac{1}{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \text{ である.}$$

$$\text{また, } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ より}$$

$$7 = \sin A \div \frac{\sqrt{2}}{10} \quad \therefore \sin A = 7 \times \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

### ■ $90^\circ - A$ の三角比

右図の直角三角形において

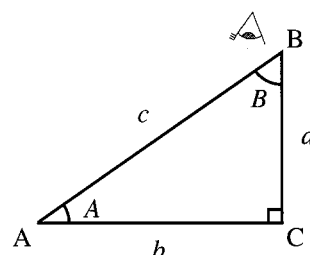
$$B = 90^\circ - A$$

であるから, 以下のように表すことができる.

$$\sin(90^\circ - A) = \sin B = \frac{b}{c} = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \cos B = \frac{a}{c} = \sin A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \tan B = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan A}$$



### 90° - A の三角比

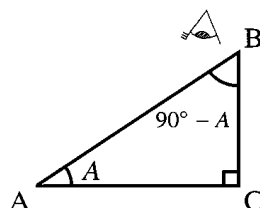
三角比について

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \frac{1}{\tan A}$$

が成り立つ.



「 $90^\circ - A$  の三角比は  $A$  だけを使った三角比で表せる」ということを覚えておくのが大切であり, この式は暗記するものではない. 必要なときに素早く導出できるようにしておこう.

これより,  $45^\circ < A < 90^\circ$  の三角比は,  $0^\circ < A < 45^\circ$  の三角比になおすことができる. 次の例題で確かめてみよう.

### 【例題: $90^\circ - A$ の三角比の利用】

次の三角比を  $45^\circ$  以下の角の三角比で表せ.

- (1)  $\sin 80^\circ$                       (2)  $\cos 46^\circ$                       (3)  $\tan 82^\circ$

【解答】

$$(1) \sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$$

$$(2) \cos 46^\circ = \cos(90^\circ - 44^\circ) = \sin 44^\circ$$

$$(3) \tan 82^\circ = \tan(90^\circ - 8^\circ) = \frac{1}{\tan 8^\circ}$$

### 3.1.5 三角比の利用

#### ■三角比から辺の長さを求める

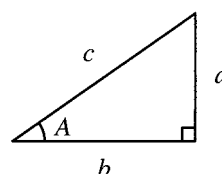
右の図の三角形において、 $\tan A = \frac{a}{b}$  であるが、この式の両辺に  $b$  を掛けて

$$b \tan A = a$$

という式を得る。  $\sin$ ,  $\cos$  についても同じようにして

$$c \sin A = a, c \cos A = b$$

となる。これらの式は、三角比から辺の長さを求めるときに用いられる。

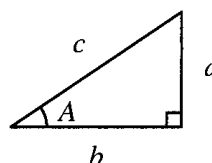


#### 三角比から辺の長さを求める

右図の直角三角形において

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A, \quad a = b \tan A$$

が成り立つ。



#### 【例題：三角比と辺の長さ】

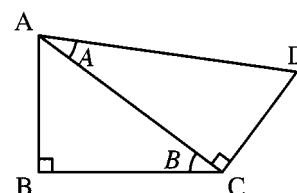
右の図形について、次の問いに答えよ。

- (1)  $AD=6$  のとき、長さが  $6 \sin A$ ,  $6 \cos A \sin B$  に等しい線分を、それぞれ答えよ。  
 (2)  $AC=5$  のとき、 $CD$ ,  $AB$ ,  $AD$  の長さを、 $A$ ,  $B$  で表せ。

【解答】

- (1)  $6 \sin A = CD$ ,  $6 \cos A \sin B = AC \sin B = AB$   
 (2)  $CD = 5 \tan A$ ,  $AB = 5 \sin B$  また、 $AD \cos A = 5$  より、  

$$AD = \frac{5}{\cos A}$$

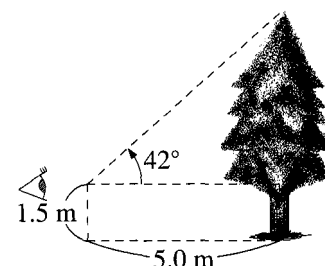


#### 【例題：三角比の応用】

付録Bの三角比の表を使って、以下の問に答えよ。

ただし、小数第2位を四捨五入して答えなさい。

- (1) 目の高さが  $1.5\text{ m}$  にある人が、木から  $5.0\text{ m}$  離れた地点に立って木のてっぺんを見上げた。すると、水平な地面と視線のなす角が  $42^\circ$  であった。この木の高さはおよそ何mか。(右図参照)



- (2) 風揚げをしていたら、水平な地面に対し  $50^\circ$  の角度で長さ  $50.0\text{ m}$  のひもが伸びきった。この風は地面からおおよそ何mの高さにあるか。ただし、ひもを持つ手は  $1.0\text{ m}$  の高さであり、糸が一直線に伸びているとする。

## 【解答】

(1) 右図のように  $O, T, H, A$  をとると、木の高さは  $TA$

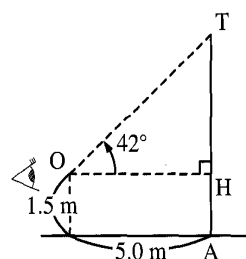
の長さになる.  $\triangle OTH$  に注目して

$$TH = OH \times \tan 42^\circ \quad \text{付録Bの表より} \quad \tan 42^\circ \approx 0.9004$$

$$\approx 5.0 \text{ m} \times 0.9004$$

$$\approx 4.5 \text{ m}$$

よって、木の高さはおおよそ  $4.5 + 1.5 = 6.0 \text{ m}$



(2) 右図のように  $O, T, H, A$  をとると、たこの高さは  $TA$

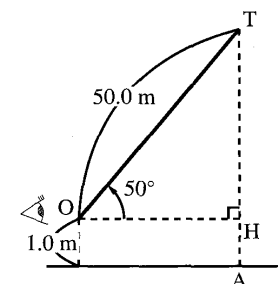
の長さになる.  $\triangle OTH$  に注目して

$$TH = OT \times \sin 50^\circ \quad \text{付録Bの表より} \quad \sin 50^\circ \approx 0.7660$$

$$\approx 50.0 \text{ m} \times 0.7660$$

$$\approx 38.3 \text{ m}$$

よって、たこの高さはおおよそ  $38.3 + 1.0 = 39.3 \text{ m}$



### § 3.2 三角比の拡張

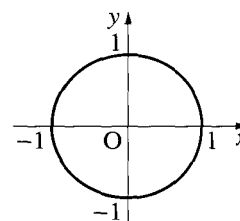
これまでは、直角三角形を用いて鋭角の三角比を考えてきた. より一般的な三角形を分析するための準備として、ここでは三角比の考えを直角・鈍角・ $0^\circ$  へと拡張し、 $0^\circ$  から  $180^\circ$  までの三角比を統一的に扱おう.

#### 3.2.1 座標と三角比の関係

##### ■単位円

座標平面上の原点  $O$  を中心とする半径  $1$  の円を単位円(unit circle)という.

三角比は、この単位円を用いて( $90^\circ$  以上に)拡張される.



##### ■三角比の拡張

三角比の定義を、斜辺が  $1$  である直角三角形  $OPQ$

において考えてみよう. すると、正弦、余弦、正接はそれぞれ

$$\sin \theta = \frac{PQ}{OP} = PQ$$

$$\cos \theta = \frac{OQ}{PO} = OQ$$

$$\tan \theta = \frac{QP}{OQ} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

と書ける. つまり、斜辺の長さが  $1$  である直角三角形では

「対辺の長さは  $\sin \theta$  の値を表し、底辺の長さは  $\cos \theta$  の値を表す」

ことがわかる.

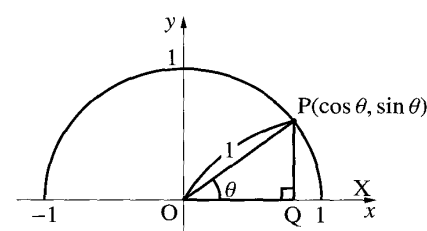
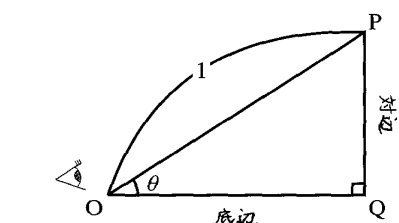
この  $\triangle OPQ$  を、左図のように単位円の(上半分の)中に描いてみよう.

そのようにすれば、

$P$  の  $x$  座標が  $\cos \theta$

$P$  の  $y$  座標が  $\sin \theta$

となる.



このように、「単位円周上の点の座標」として三角比をとらえなおすと、角度が鋭角でなくても三角比を考えることができる.

そこで、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  の範囲にある角  $\theta$  の三角比を、

次のように定義しなおそう.

## 三角比の拡張

点  $O$  を原点とする座標平面上に単位円の上半分をとり、その周上に一点  $P$  をとる。  
 $x$  軸の正の部分  $OX$  に対し、 $\angle POX$  を  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) とするとき

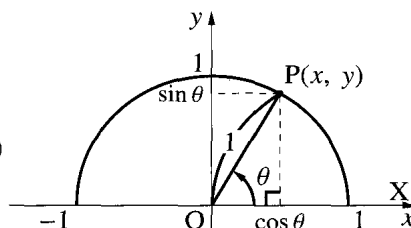
$$\cos \theta = (\text{点 } P \text{ の } x \text{ 座標})$$

$$\sin \theta = (\text{点 } P \text{ の } y \text{ 座標})$$

$$\tan \theta = \frac{(\text{点 } P \text{ の } y \text{ 座標})}{(\text{点 } P \text{ の } x \text{ 座標})} = (\text{直線 } OP \text{ の傾き})$$

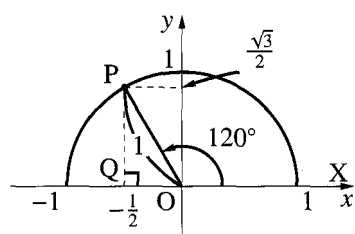
とする。

ただし、点  $P$  の  $x$  座標が  $0$  のとき、つまり  $\theta = 90^\circ$  のときは  $\tan \theta$  を定義しない。



たとえば、 $\theta$  が鈍角のときは次のようになる。

例 i)  $120^\circ$  の三角比



$$\text{上図より, } \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

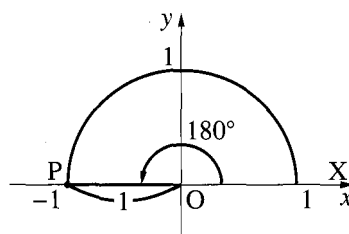
$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

( $\triangle OPQ$  が  $QO : OP : PQ = 1 : 2 : \sqrt{3}$  の直

角三角形であることに注意しよう.)

例 ii)  $180^\circ$  の三角比



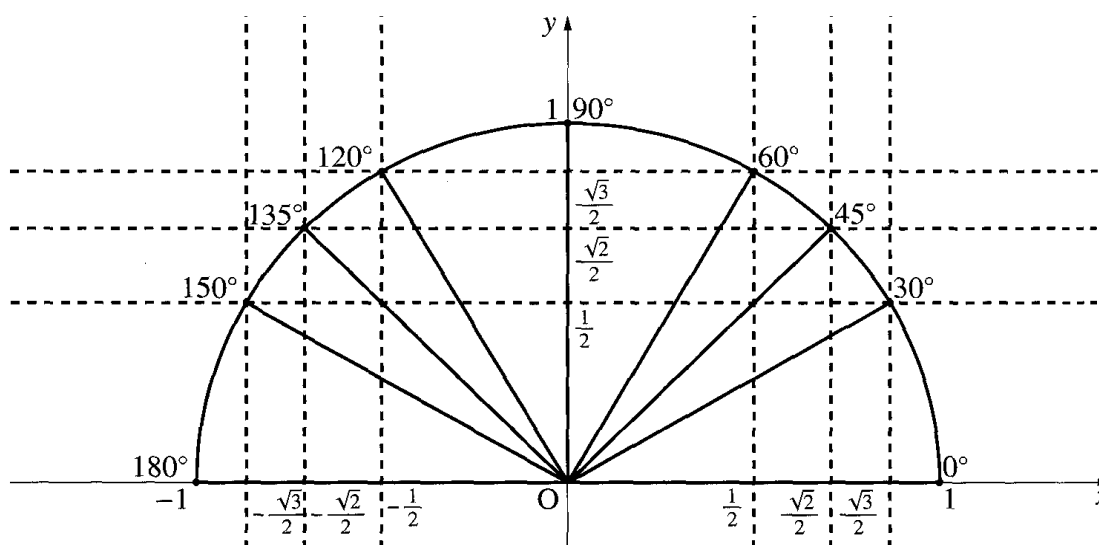
$$\text{上図より, } \cos 180^\circ = -1$$

$$\sin 180^\circ = 0$$

$$\tan 180^\circ = 0$$

### ■ 三角比の値のまとめ

角度が  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$  の場合の三角比は、頭の中で次のような図を思い描き、素早く求められるようになる。



## 【例題:有名角の三角比】

前ページの図をもとに下の表を完成させよ。

| $\theta$      | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
|---------------|-----------|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\sin \theta$ |           |            |            |            |            |             |             |             |             |
| $\cos \theta$ |           |            |            |            |            |             |             |             |             |
| $\tan \theta$ |           |            |            |            |            |             |             |             |             |

## 【解答】

| $\theta$      | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$ | $120^\circ$          | $135^\circ$           | $150^\circ$           | $180^\circ$ |
|---------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|
| $\sin \theta$ | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1          | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$         | 0           |
| $\cos \theta$ | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0          | $-\frac{1}{2}$       | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1          |
| $\tan \theta$ | 0         | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | なし         | $-\sqrt{3}$          | -1                    | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0           |

## ■三角比を含む方程式と不等式

## 【例題:三角比を含む方程式】

以下の式を満たす  $\theta$  を求めよ。ただし  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。

(1)  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$       (2)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$       (3)  $\tan \theta = -\sqrt{3}$       (4)  $\sin \theta = 1$

## 【解答】

(1) 右図のように、上半分の単位円周上において、 $x$  座標が

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である点を取る。

このとき、 $\triangle OPQ$  は辺の長さが  $1:2:\sqrt{3}$  の直角三角形  
なので  $\angle POQ = 30^\circ$

つまり、

$$\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

(2) 右図のように、上半分の単位円周上において、 $y$  座標が

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である点を取る。

そのような点は2つ存在し、 $\triangle OPQ$ 、 $\triangle OP'Q'$ とも  
直角二等辺三角形であるので

$$\angle POQ = 45^\circ, \quad \angle P'OQ' = 45^\circ$$

つまり、

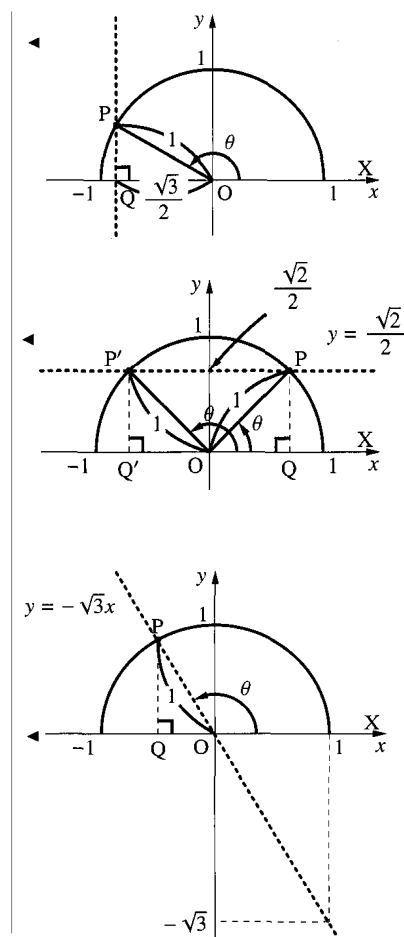
$$\theta = 45^\circ, \quad \text{または、} \quad \theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

(3) 動径の傾きが  $\tan$  に一致するので、右図のように、傾き  $-\sqrt{3}$   
の直線を引く。

$\triangle OPQ$  は辺の長さが  $1:2:\sqrt{3}$  の直角三角形なので

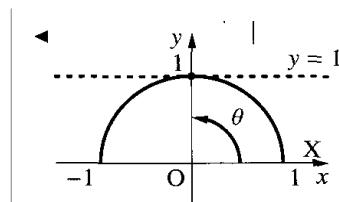
$\angle POQ = 60^\circ$  つまり、

$$\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



- (4) 上半分の単位円周上において、 $y$  座標が  $1$  である点を取ればよい。

このとき、右図より、 $\theta = 90^\circ$



有名角の三角比に限れば、三角比から角度を求めるときと、角度から三角比を求めるときに重要なことは、次のことに限られる。

つまり、条件に合うよう単位円と動径を描き、うまく垂線を引いて

- ・ 3 辺の長さが  $1$  ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  の直角三角形を作ることができる。
- ・ 3 辺の長さが  $1$  ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  $\frac{1}{2}$  の直角三角形を作ることができる。
- ・ 直角三角形を作る必要はない。

のいずれに当てはまるかを判断することである。

### 【例題: 三角比を含む不等式】

以下の式を満たす  $\theta$  を求めよ。ただし  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。

(1)  $\cos \theta \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$       (2)  $\sin \theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$       (3)  $\tan \theta > -\sqrt{3}$

### 【解答】

- (1) 上半分の単位円周上において

$$(x \text{ 座標の値}) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であればよい。そのようになるのは、右欄外の太線部分であるので  
 $150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

- (2) 上半分の単位円周上において

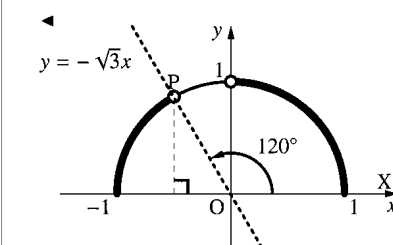
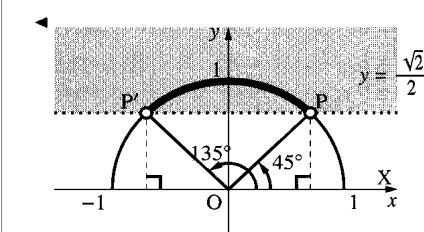
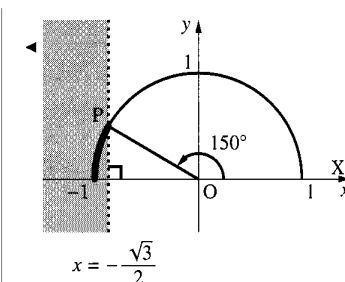
$$(y \text{ 座標の値}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

であればよい。そのようになるのは、右欄外の太線部分であるので  
 $45^\circ < \theta < 135^\circ$

- (3) 上半分の単位円周上において

$$(\text{動径の傾き}) > -\sqrt{3}$$

であればよい。そのようになるのは、右欄外の太線部分であるので  
 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$  ,  $120^\circ < \theta \leq 180^\circ$



## 3.2.2 拡張された三角比の相互関係

### ■ 拡張された三角比の相互関係

拡張された三角比においても、三角比の相互関係

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad , \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad , \quad 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad , \quad \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

が成り立つ. 以下でこれらのことを確認してみよう. 右図の単位円において

$$\cos \theta = x, \quad \sin \theta = y$$

であるから,  $\tan \theta$  は  $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

と表すことができる. つまり

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \dots\dots ①$$

が成り立つ. また, 三平方の定理より,  $x^2 + y^2 = 1$  であるから

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \dots\dots ②$$

が成り立ち, ②の両辺を  $\sin^2 \theta$  で割って,  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  を用いると

$$1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad \therefore \quad 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad \dots\dots ④$$

また, ②の両辺を  $\cos^2 \theta$  で割って,  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  を用いると

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \therefore \quad \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \dots\dots ④$$

#### 拡張された三角比の相互関係

角  $\theta$  が  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき, 次の式が成り立つ.

1)  $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$  の関係

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

2)  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の関係

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

3)  $\tan \theta$  と  $\sin \theta$  の関係

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

4)  $\cos \theta$  と  $\tan \theta$  の関係

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

同じ問を, 前ページの関係を使って解いてみよう. ただし, 今回は  $0^\circ$  から  $180^\circ$  までの範囲で考える.

#### 【例題: 三角比の相互関係の利用】

『拡張された三角比の相互関係』を使って次の問に答えよ. ただし  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  である.

(1)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  のとき,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  の値を求めよ.

(2)  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$  のとき,  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$  の値を求めよ.

(3)  $\tan \alpha = 7$  のとき,  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$  の値を求めよ.

【解答】

(1)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  より

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

よって,  $\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{26}{25}} = \pm \frac{4}{5}$  また,  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  より,

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ のとき } \tan \alpha = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{-4}{5} \text{ のとき } \tan \alpha = \frac{3}{5} \div \frac{-4}{5} = \frac{-3}{4}$$

(2)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  より

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\sin \alpha \geq 0 \text{ なので, } \sin \alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

また,  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  より

$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{1}{3} = 2\sqrt{2}$$

(3)  $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  より

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 7^2} = \frac{1}{50}$$

よって,  $\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{50}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{10}$  である.

また,  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  より

$$7 = \frac{\sin \alpha}{\pm \frac{\sqrt{2}}{10}} \quad \therefore \quad \sin \alpha = 7 \times \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \pm \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$0 \leq \sin \alpha$  であるので,  $\sin \alpha = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$  は不適. よって

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}, \sin \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

【例題: 三角比の計算】

次の式を簡単にせよ.

$$(1) (\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$$

$$(2) \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$$

【解答】

$$(1) (\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$$

$$= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

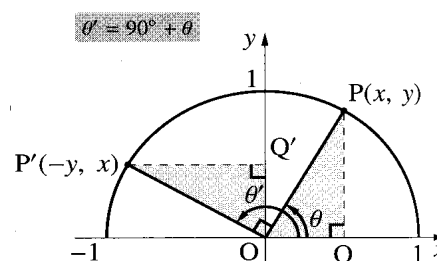
$$= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2$$

$$\begin{aligned}
 (2) &= \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta) - \cos \theta (1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\
 &= \frac{-2 \cos \theta \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{-2 \cos \theta \sin \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{-2 \sin \theta}{\cos \theta} = -2 \tan \theta
 \end{aligned}$$

### ■ $90^\circ + \theta$ の三角比

右図のように、単位円周上に角  $\theta$  の動径  $OP$  と角  $90^\circ + \theta$  ( $= \theta'$  とする) の動径  $OP'$  をとる。点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とすると、 $\triangle OPQ$  と  $\triangle OP'Q'$  は合同なので、点  $P'$  の座標は  $(-y, x)$  となるから

$$\begin{aligned}
 \sin \theta' &= x = \cos \theta \\
 \cos \theta' &= -y = -\sin \theta \\
 \tan \theta' &= \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\tan \theta}
 \end{aligned}$$



と表すことができる。

ここで、 $\theta' = 90^\circ + \theta$  であるから、次のようにまとめることができる。

**$90^\circ + \theta$  の三角比**

角  $\theta$  が  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  の三角比において

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = -\frac{1}{\tan \theta}$$

が成り立つ。

「 $90^\circ + \theta$  の三角比は  $\theta$  だけを使った三角比で表せる」ということを覚えておくのが大切であり、この式は暗記するようなものではない。必要なときに、上の図を描いて素早く導出できるようにしておけばよい。これより、 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  の三角比は、 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$  の三角比になおして、その値を求めることができる。

### 【例題： $90^\circ + \theta$ の三角比の利用】

次の式を満たすように【   】の中に  $90^\circ$  より小さい角を入れよ。

$$(1) \sin 100^\circ = \cos [ \quad ] \quad (2) \cos 179^\circ = -\sin [ \quad ] \quad (3) \tan 125^\circ = -\frac{1}{\tan [ \quad ]}$$

### 【解答】

$$(1) \sin 100^\circ = \sin(90^\circ + 10^\circ) = \cos 10^\circ$$

$$(2) \cos 179^\circ = \cos(90^\circ + 89^\circ) = -\sin 89^\circ$$

$$(3) \tan 125^\circ = \tan(90^\circ + 35^\circ) = -\frac{1}{\tan 35^\circ}$$

## ■ $180^\circ - \theta$ の三角比

右図のように、単位円周上に角  $\theta$  の動径  $OP$  と角  $180^\circ - \theta$  ( $= \theta'$  とする) の動径  $OP'$  をとる。点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とすると、点  $P'$  の座標は  $(-x, y)$  となるから

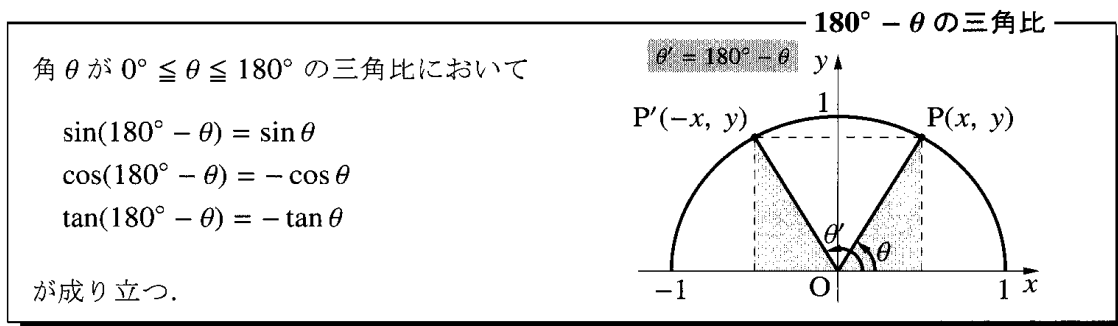
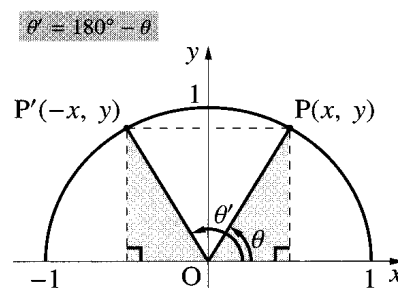
$$\sin \theta' = y = \sin \theta$$

$$\cos \theta' = -x = -\cos \theta$$

$$\tan \theta' = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$

と表すことができる。

ここで、 $\theta' = 180^\circ - \theta$  であるから、次のようにまとめることができる。



「 $180^\circ - \theta$  の三角比は  $\theta$  だけを使った三角比で表せる」ということを覚えておくのが大切であり、この式も暗記するようなものではない。やはり、必要なときに、単位円を描いて導出できるようにしておけばよい。これからも、 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  の三角比は、 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$  の三角比になおして、その値を求めることができる。

### 【例題： $180^\circ - \theta$ の三角比の利用】

次の式を満たすように【 】の中に  $90^\circ$  より小さい角を入れよ。

- (1)  $\sin 100^\circ = \sin [ \quad ]$       (2)  $\cos 179^\circ = -\cos [ \quad ]$       (3)  $\tan 125^\circ = -\tan [ \quad ]$

### 【解答】

- (1)  $\sin 100^\circ = \sin (180^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ$   
 (2)  $\sin 105^\circ = \sin (90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$   
 (3)  $\tan 125^\circ = \tan (180^\circ - 55^\circ) = -\tan 55^\circ$

## § 3.3 有名角以外の三角比

$30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  といった有名角を含む三角形を利用することで、有名角以外の角の三角比を求める場合がある。ここでは、 $15^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $105^\circ$ ,  $165^\circ$  の三角比を考えてみよう。

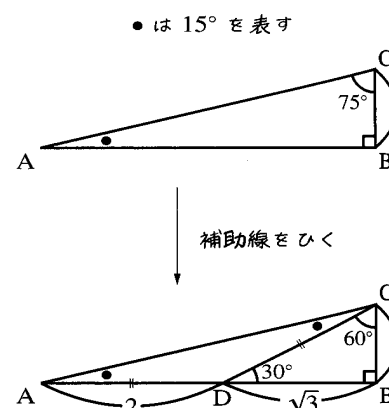
### 3.3.1 $15^\circ$ , $75^\circ$ , $105^\circ$ , $165^\circ$ の三角比

#### ■ $15^\circ$ , $75^\circ$ , $90^\circ$ の三角形を考える

$15^\circ$  に関する三角比を考えるため、まず右図のような直角三角形  $ABC$  の  $AC$ ,  $AB$  の長さを求めよう。ここで、辺  $AB$  上に点  $D$  を  $\angle CDB = 30^\circ$  となるようにとると、 $\angle DCB = 60^\circ$  であるから、 $\angle DCA = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$  である。このとき、 $\angle DCA = \angle DAC = 15^\circ$  となるから、 $\triangle DCA$  は二等辺三角形とわかる。

$\triangle BCD$  において、 $BC = 1$  から

$$DB = \sqrt{3}, DC = 2$$



となり、また△  $DCA$  は二等辺三角形だったから

$$AD = DC = 2$$

となる。以上より、 $AB = 2 + \sqrt{3}$  とわかった。

さらに、直角三角形  $ABC$  に三平方の定理を用いて

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3} + 1} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

ここで、 $\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$  の2重根号をはずすと

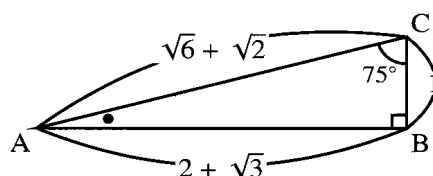
$$\sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

より、 $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$  となる。

$15^\circ$  に関する三角比を求めることを目的とするなら、 $CB$  の長さはいくつでもよい。ここでは、考えやすくするため  $1$  とした。

### ■ $15^\circ$ の三角比とその周辺

以上から直角三角形  $ABC$  の3辺の長さは、下図のようになる。



これより、 $15^\circ$  の三角比は以下のように求められる。

$$\sin 15^\circ = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{AB}{CA} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6 - 2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}$$

【例題:  $15^\circ$  とその周辺の三角比】

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

を利用して、次の三角比を求めよ。

(1)  $\sin 75^\circ$ ,  $\cos 75^\circ$ ,  $\tan 75^\circ$

(2)  $\sin 105^\circ$ ,  $\cos 105^\circ$ ,  $\tan 105^\circ$

(3)  $\sin 165^\circ$ ,  $\cos 165^\circ$ ,  $\tan 165^\circ$

【解答】

(1)  $75^\circ = 90^\circ - 15^\circ$  であるから、『 $90^\circ - A$  の三角比』より次のように求めることができる。

$$\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75^\circ = \tan(90^\circ - 15^\circ) = \frac{1}{\tan 15^\circ} = 2 + \sqrt{3}$$

- (2)  $105^\circ = 90^\circ + 15^\circ$  であるから、『 $90^\circ + \theta$  の三角比』より次のように求めることができる.

$$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

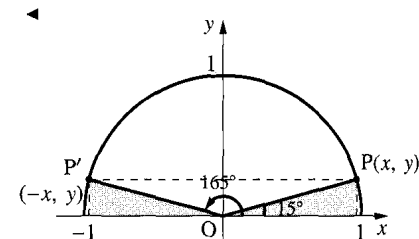
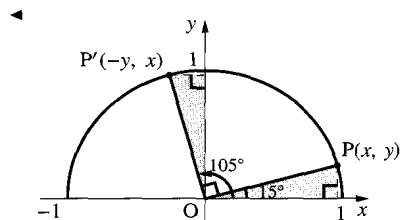
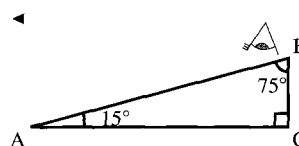
$$\tan 105^\circ = \tan(90^\circ + 15^\circ) = \frac{-1}{\tan 15^\circ} = -2 - \sqrt{3}$$

- (3)  $165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$  であるから、『 $180^\circ - \theta$  の三角比』より次のように求めることができる.

$$\sin 165^\circ = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

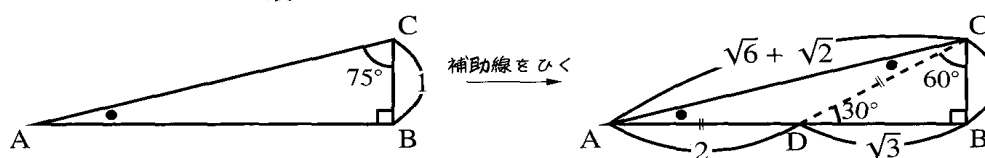
$$\tan 165^\circ = \tan(180^\circ - 15^\circ) = -\tan 15^\circ = -2 + \sqrt{3}$$



#### 15° とその周辺の三角比

右下図のような  $A = 15^\circ$  の直角三角形  $ABC$  において、 $\angle DCB = 60^\circ$  となるように点  $D$  をとることにより、各辺の比がわかるので、以下のような三角比の値が求められる.

● は  $15^\circ$  を表す



$$\begin{cases} \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \cos 105^\circ = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \tan 105^\circ = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 165^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \cos 165^\circ = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \tan 165^\circ = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

例題でみたように、これらはすべて  $15^\circ$  を基準とした

$$15^\circ, 90^\circ \pm 15^\circ, 180^\circ - 15^\circ$$

の三角比なので、 $15^\circ$  の三角比から他の角度の三角比は簡単に導ける。

$15^\circ$  の三角比の値は覚えなくてもよいが、 $15^\circ$  を含む直角三角形から導けるようにしておこう。  
これらの角以外にも、 $18^\circ$ 、 $36^\circ$ 、 $72^\circ$ 、 $144^\circ$  などの角も、特殊な三角形を考えることによって三角比を求めることができる。

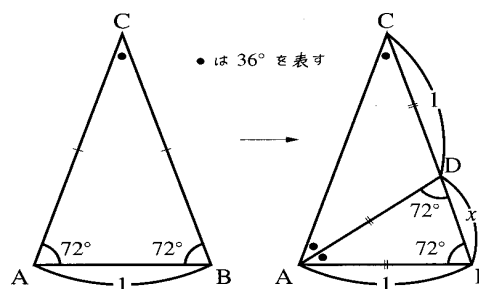
### 3.3.2 $36^\circ$ 、 $72^\circ$ などの三角比

#### ■ $36^\circ$ 、 $72^\circ$ 、 $72^\circ$ の三角形を考える

$18^\circ$  に関する三角比を考えるため、まず、右図のような二等辺三角形  $ABC$  を考え、 $BC$ 、 $AC$  の長さを求めよう。

ここで、右図の奥のように  $\angle A$  の2等分線と辺  $BC$  の交点を  $D$  とする。このとき、

$$\angle DAC = \angle DCA = 36^\circ$$



より  $\triangle DAC$  は二等辺三角形になる。また、 $\angle ADB = \angle ABD = 72^\circ$  より

$\triangle ABD$  も二等辺三角形になる。これらより、 $CD = AD = AB = 1$  が成り立つ。

さらに、 $\triangle CAB \sim \triangle ABD$  であるから、 $CB : AB = AB : BD$  が成り立つ。よって、 $AB^2 = CB \times BD$  であるので、 $BD = x$  とおくと

$$1 \times 1 = (1+x)x \quad \rightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$x > 0$  であるから、解の公式より  $BD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  と求められる。これより

$$BC = BD + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

となる。また、 $AC = BD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  である。

#### ■ $36^\circ$ の三角比とその周辺

$\triangle ACD$  に着目し、右図のように、点  $D$  から辺  $AC$  へ垂線  $DH$  を引く。

直角三角形  $DCH$  に、余弦の定義を用いて

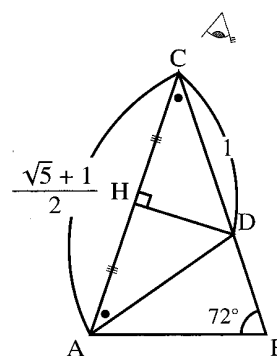
$$\cos 36^\circ = \frac{CH}{DC} = \frac{1}{2} CA = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

さらに、三角比の相互関係  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  を用いて

$$\sin^2 36^\circ = 1 - \cos^2 36^\circ = 1 - \left( \frac{\sqrt{5}+1}{4} \right)^2 = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

であり、 $\sin 36^\circ > 0$  であるから、 $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$  である。

また、これらより  $\tan 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} = \dots = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$  である。



【例題:  $36^\circ$  とその周辺の三角比】

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \tan 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \quad \text{を利用して次の三角比の値を求めよ.}$$

- (1)  $\sin 54^\circ$ ,  $\cos 54^\circ$ ,  $\tan 54^\circ$   
 (2)  $\sin 126^\circ$ ,  $\cos 126^\circ$ ,  $\tan 126^\circ$   
 (3)  $\sin 144^\circ$ ,  $\cos 144^\circ$ ,  $\tan 144^\circ$

【解答】

- (1)  $54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$  であるから、『 $90^\circ - \theta$  の三角比』より  
 次のように求めることができる.

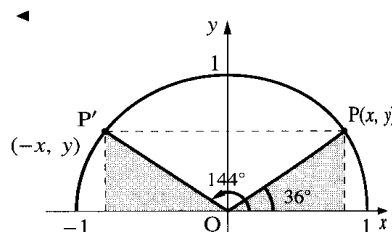
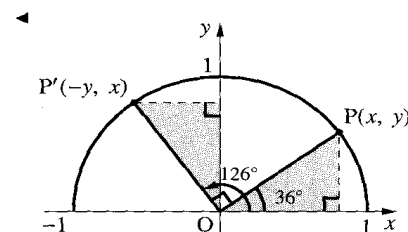
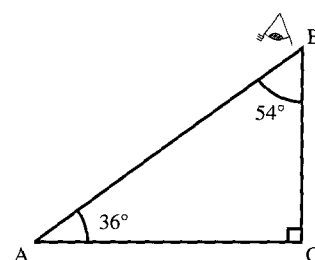
$$\begin{aligned} \sin 54^\circ &= \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \\ \cos 54^\circ &= \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \tan 54^\circ &= \frac{1}{\tan 36^\circ} = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

- (2)  $126^\circ = 90^\circ + 36^\circ$  であるから、『 $90^\circ + \theta$  の三角比』より  
 次のように求めることができる.

$$\begin{aligned} \sin 126^\circ &= \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \\ \cos 126^\circ &= -\sin 36^\circ = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \tan 126^\circ &= \frac{-1}{\tan 36^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

- (3)  $144^\circ = 180^\circ - 36^\circ$  であるから、『 $180^\circ - \theta$  の三角比』より  
 次のように求めることができる.

$$\begin{aligned} \sin 144^\circ &= \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \cos 144^\circ &= -\cos 36^\circ = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \\ \tan 144^\circ &= -\tan 36^\circ = -\sqrt{5-2\sqrt{5}} \end{aligned}$$



### ■ $72^\circ$ の三角比とその周辺

今度は、 $\triangle ABD$  に着目し、右図のように、点  $A$  から  
 辺  $BD$  へ垂線  $AH'$  を引く.

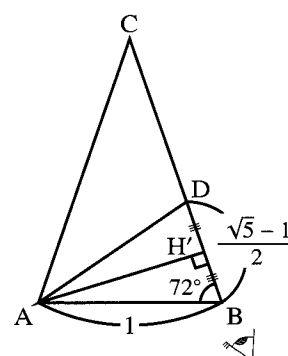
直角三角形  $ABH'$  に、余弦の定義を用いて

$$\cos 72^\circ = \frac{BH'}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BD}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

さらに、三角比の相互関係  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  を用いて

$$\begin{aligned} \sin^2 72^\circ &= 1 - \cos^2 72^\circ = 1 - \left( \frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} \end{aligned}$$

であり、



$\sin 72^\circ > 0$  であるから,  $\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$  である. また, これらより

$$\tan 72^\circ = \frac{\sin 72^\circ}{\cos 72^\circ} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} = \dots = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

である.

【例題:  $72^\circ$  とその周辺の三角比】

$$\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \tan 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \quad \text{を利用して}$$

次の三角比を求めよ.

- (1)  $\sin 18^\circ, \cos 18^\circ, \tan 18^\circ$
- (2)  $\sin 108^\circ, \cos 108^\circ, \tan 108^\circ$
- (3)  $\sin 162^\circ, \cos 162^\circ, \tan 162^\circ$

【解答】

- (1)  $18^\circ = 90^\circ - 72^\circ$  であるから, 『 $90^\circ - \theta$  の三角比』より次のように求めることができる.

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ &= \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \cos 18^\circ &= \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ \tan 18^\circ &= \frac{1}{\tan 72^\circ} = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

- (2)  $108^\circ = 180^\circ - 72^\circ$  であるから, 『 $180^\circ - \theta$  の三角比』より次のように求めることができる.

$$\begin{aligned} \sin 108^\circ &= \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ \cos 108^\circ &= -\cos 72^\circ = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \tan 108^\circ &= -\tan 72^\circ = -\sqrt{5+2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

- (3)  $162^\circ = 90^\circ + 72^\circ$  であるから, 『 $90^\circ + \theta$  の三角比』より次のように求めることができる.

$$\begin{aligned} \sin 162^\circ &= \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \cos 162^\circ &= -\sin 72^\circ = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ \tan 162^\circ &= \frac{-1}{\tan 72^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

