第2章

関数と方程式・不等式

§ 2.1 関数

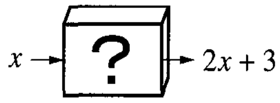
2 つの変数 x と y が，互いに関係なくばらばらに動くのではなく，x の値に応じて y の値が決まるとき，y は x の関数であるという．以下では，関数の考え方を確認し，関数にまつわる基本的な用語について学んでいく．

2.1.1 関数の基本知識

■関数とは何か

$3\,l$ の水が入ってる水槽の中に毎分 $2\,l$ の割合で水を入れるとする．
水を入れてから経過した時間が x 分とすると，
水槽の中の水の量 $y\,l$ は

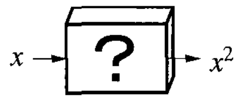
$$y=2x+3$$



時間と水の量の関係

と計算することができる．
また，正方形の一辺の長さを $x\,cm$ とすると，
その面積 $y\,cm^2$ は

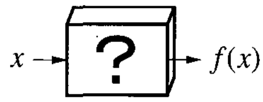
$$y=x^2$$



正方形の**1** 辺の長さと面積の関係

と計算することができる．
このように，「x の値を決めるとそれに応じて y の値がただ**1** つだけ決まる」とき，y は
x の**関数(function)** であるという．
y が x の関数であるということを，一般的に

$$y=f(x)$$



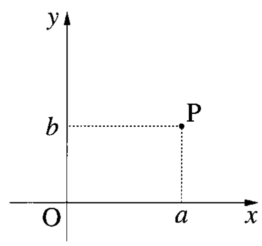
などと表す．関数 $y=f(x)$ において，x の値が a であるとき，対応する y の値を $f(a)$ で表し，$f(a)$ を $x=a$ のときの関数 $f(x)$ の値という．

たとえば，$f(x)=2x^2-3x+4$ のとき

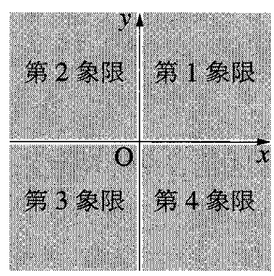
$$f(1)=2\cdot1^2-3\cdot1+4=3$$
$$f(a)=2\cdot a^2-3\cdot a+4=2a^2-3a+4$$

である．

■関数をグラフで表すということ



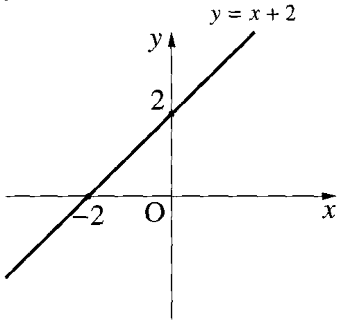
平面上に数直線を**2** 本，直交するようにとると，その平面上の点**P** の位置は，右図のように実数の組 (a,b) で表すことができる．
この組 (a,b) を点**P** の**座標(coordinates)** といい，$P(a,b)$ と書く．
この直交する数直線のことを**座標軸(coordinate axes)** といい，座標軸の定められた平面を**座標平面(coordinate plane)** という．
座標平面は，座標軸によって**4** つの部分に分けられる．
これらを右図のように，それぞれ



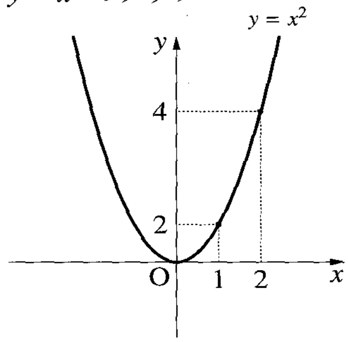
$x>0$，$y>0$ ：**第1象限(first quadrant)**
$x<0$，$y>0$ ：**第2 象限(second quadrant)**
$x<0$，$y<0$ ：**第3 象限(third quadrant)**
$x>0$，$y<0$ ：**第4 象限(fourth quadrant)**
という(座標軸はどの象限にも含めない)．

次に, 関数 $y=f(x)$ を座標平面に図示することを考えよう.
たとえば, 関数 $y=x+2$ を図示するには, $y=x+2$ を満たす値の組 (x, y) を座標として座標平面上に点を打っていけばよい. 同様に, 関数 $y=x^2$ を図示するには, $y=x^2$ を満たす値の組 (x, y) を座標として座標平面上に点を打っていけばよい.
一般に, 関数 $y=f(x)$ において, x の値とそれに対応する y の値の組 (x, y) を座標とする点全体の作る座標平面上の図形を, 関数 $y=f(x)$ の**グラフ(graph)** という.

例 i) $y=x+2$ のグラフ



例 ii) $y=x^2$ のグラフ

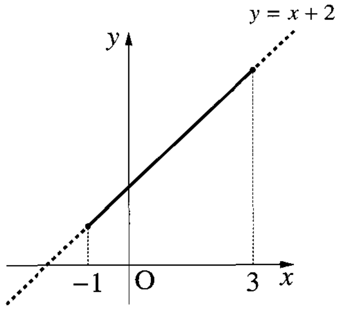


■**定義域とは何か**

関数 $y=f(x)$ において, x のとる値の範囲を, この関数の**定義域(domain)** という.
定義域をはっきりと示す場合には, 関数とともに

$$y=f(x) \qquad (a \leq x \leq b)$$

などと書く.
たとえば, 関数 $y=x+2$ において, x のとる値の範囲, すなわち定義域を $-1 \leq x \leq 3$ とするとき



$$y=x+2 \qquad \frac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\frac{6}{3}=2$$

と表す. ただし, 関数においてその定義域が特に示されていない場合には, その関数が意味をもつ範囲ですべての x の値を考える. たとえば

$$y=x+2$$

とだけ書かれていた場合には, 定義域はすべての実数であり, また

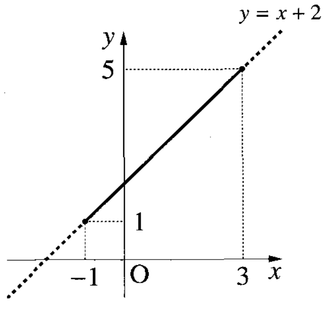
$$y=\frac{1}{x}$$

とだけ書かれていた場合には, 0 での除法は意味をなさないので, 定義域は 0 以外のすべての実数である.

■**値域と最大値・最小値**

関数 $y=f(x)$ において, x が定義域すべての値をとるときの y のとる値の範囲を, この関数の**値域(range)** という.
たとえば, 関数

$$y=x+2 \qquad (-1 \leq x \leq 3)$$



の値域は，右のグラフからわかるように

$$1 \leq y \leq 5$$

となる．
このように，関数において，その値域に最も大きい値があるとき，その値をこの関数の**最大値(maximum value)** といい，その値域に最も小さい値があるとき，その値をこの関数の**最小値(minimum value)** という．

§ 2.2　1 次関数とそのグラフ

ここでは，**1** 次関数のグラフの描き方について復習していこう．中学で学習済みの内容ではあるが，**2** 次関数のグラフを描くために必要な視点から，まとめておく．

2.2.1　1 次関数のグラフ

■1 次関数の定義

1 次関数の定義

関数 $f(x)$ が x の 1 次式で表されるとき，つまり，$a\ (\neq 0)$，b を定数として

$$f(x) = ax + b$$

の形で表されるとき，$f(x)$ は x の **1 次関数** (linear function) であるという．

例えば、以下の　x　の関数　$f(x)$　は、全て**1**次関数である。

$$f(x)=x+2 \quad , \qquad f(x)=3x-\frac{1}{2} \quad , \qquad f(x)=-2x+\sqrt{2}$$

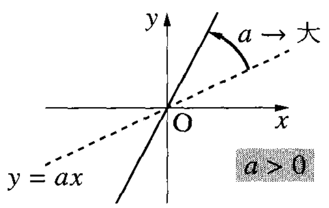
■　$y=ax$　のグラフ

1 次関数　$y=ax+b$　において，まずは　$b=0$　の場合，つまり　$y=ax$　のグラフについて考えてみよう．このタイプのグラフは次のような特徴があった．

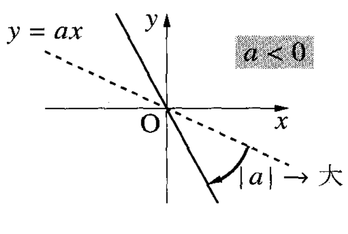
$y = ax$ のグラフの特徴

I) 原点を通る直線である．

II)　i) **$a > 0$ のとき**
- x が増加するとき，y も増加するため，グラフは右上がり
- a が大きいほど，右上がりは急



ii) **$a < 0$ のとき**
- x が増加するとき，y は減少するため，グラフは右下がり
- $|a|$ が大きいほど，右下がりは急



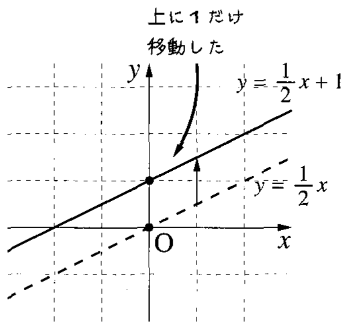
直線の（x 軸に対する）傾き具合を決める，a の値を**傾き** (slope) という．

傾き　a　は「　x　が**1** 増加したときの　y　の増加量」になっている．　a　が負のときは　y　の増加量が負になり，　y　は減少していることになる．

■ $y=ax+b$ のグラフ

例として2つの1次関数

$$y=\frac{1}{2}x \quad , \quad y=\frac{1}{2}x+1$$



の関係を考えてみよう.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\frac{1}{2}x$	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\cdots$
$\frac{1}{2}x+1$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\cdots$

1 を足す

上の表から, $y=\frac{1}{2}x+1$ のグラフは, $y=\frac{1}{2}x$ のグラフを y 軸方向に1だけ平行移動した直線であるとわかる.

また, 原点より y 軸方向に1大きい点 $(0,1)$ を通ることがわかる.

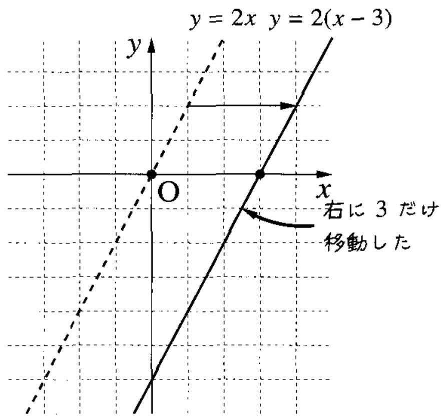
$y = ax + b$ のグラフ

> $y = ax + b$ のグラフは, $y = ax$ のグラフを
>
> 「y 軸方向に b だけ平行移動」
>
> した直線である. このときの b の値を **y 切片** (y-intercept) という.

■ $y=a(x-p)$ のグラフ

例として2つの1次関数

$$y=2x \quad , \quad y=2(x-3)$$



の関係を考えてみよう.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$2x$	$\cdots$	-6	-4	-2	0	2	4	6	$\cdots$
$2(x-3)$	$\cdots$	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	$\cdots$

上の表から, $y=2(x-3)$ のグラフは, $y=2x$ のグラフを x 軸方向に3だけ平行移動した直線になるとわかる.

また, このグラフは原点より x 軸方向に3大きい点 $(3,0)$ を通る.

$y = a(x - p)$ のグラフ

> $y = a(x - p)$ のグラフは, $y = ax$ のグラフを
>
> 「x 軸方向に p だけ平行移動」
>
> した直線である. このときの p の値を **x 切片** (x-intercept) という.

■ $y=a(x-p)+q$ のグラフ

たとえば

$$y=2(x-3)+1$$

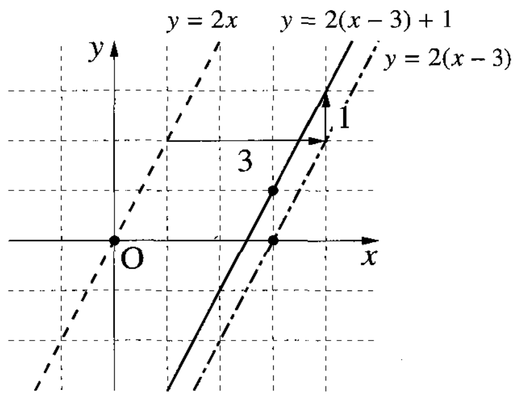
のグラフについて考えてみよう, これは, $y=2x$ のグラフを x 軸方向に3 平行移動した

$$y=2(x-3)$$

のグラフを, さらにy 軸方向に1 平行移動した

$$y=2(x-3)+1$$

のグラフを表している.



また, $y=2(x-3)+1$ のグラフは, 原点より x 軸方向に3 大きく, y 軸方向に1 大きい点 $(3,1)$ を通ることがわかる.

$y=a(x-p)+q$ のグラフ

$y=a(x-p)+q$ のグラフは, $y=ax$ のグラフを

「x 軸方向に p だけ平行移動し, y 軸方向に q だけ平行移動」

した直線である. また、このグラフは (p, q) を通る。

また, $y=2(x-3)+1$ は, 計算によって

$$y=2x-5 \quad や \quad y=2\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

とも表せるので, $y=2x$ を y 軸方向に -5 平行移動したものともいえるし, x 軸方向に $\frac{5}{2}$ 平行移動したものともいえる. このことを, 上のグラフで確認しておくこと.

「1 次関数 $y=ax+b$ のグラフ」のことを「直線 $y=ax+b$ 」ということがある. このときの $y=ax+b$ は, **直線の方程式(equation of line)** といわれる.

【例題:1 次関数のグラフ】

次の1 次関数のグラフはすべて, $y=2x$ のグラフを平行移動してできる. それぞれ, x 軸方向, y 軸方向にいくつ平行移動が行われたのか, 式の形から読み取れ.

また, それぞれのグラフを座標平面上に描け.

(1) $y=2(x+2)$　　　**(2)** $y=2(x+3)-1$

【解答】

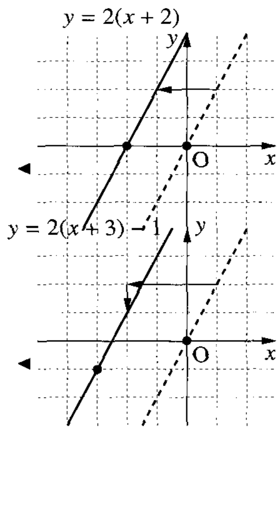
(1) $y=2\{x-(-2)\}$ であるので, $y=2x$ のグラフを x 軸方向に -2 平行移動したグラフである. 座標平面上に表すと右図のようになる.

(2) $y=2\{x-(-3)\}-1$ であるので, $y=2x$ のグラフを

x 軸方向に -3 平行移動し,

y 軸方向に -1 平行移動したグラフ

である. 座標平面上に表すと右図のようになる.



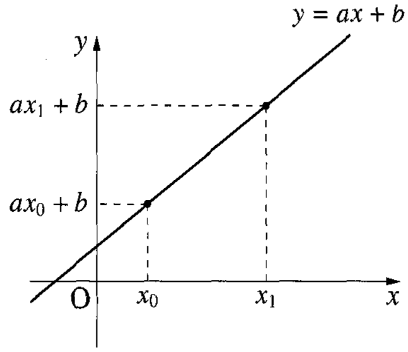
2.2.2　1 次関数の決定

■変化の割合と傾き a

関数 $f(x)$ において, ある x の範囲における「 x の増加量に対する $f(x)$ の増加量の比」を, その x の範囲における**変化の割合(rate of change)** という.

x 座標が, x_0 から x_1 に増加するときの $f(x)$ の変化の割合は

$$(\text{変化の割合})=\frac{f(x)\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$



右図のように, 直線 $y=ax+b$ が異なる2 点 (x_0, ax_0+b) , (x_1, ax_1+b) を通るとき

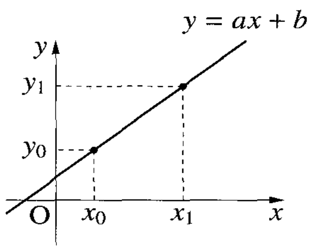
$$\begin{aligned}(\text{変化の割合})&=\frac{(ax_1+b)-(ax_0+b)}{x_1-x_0}\\ &=\frac{ax_1-ax_0}{x_1-x_0}\\ &=a\frac{(x_1-x_0)}{x_1-x_0}\\ &=a\end{aligned}$$

となり, **1** 次関数の変化の割合は傾きと等しいことがわかる.

直線の傾き a

- 1 次関数の変化の割合は，常に，そのグラフの傾きに等しい.
- 異なる 2 点 $(x_0,\ y_0)$，$(x_1,\ y_1)$ を通る直線の傾き a は次の式で求められる.

$$a=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\left(=\frac{(y\text{ の増加量})}{(x\text{ の増加量})}\right)$$



【例題:傾き a を求める】

次の条件にあった**1** 次関数の傾きを求めよ.

(1) x が**3** 増えれば y は**6** 増える**1** 次関数

(2) x が**3** 増えれば y は**6** 減る**1** 次関数

(3) グラフが**2** 点 $(0,0)$, $(3,6)$ を通る**1** 次関数

(4) グラフが**2** 点 $(-3,5)$, $(2,-5)$ を通る**1** 次関数

【解答】

(1) $(\text{傾き})=\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{6}{3}=2$

(2) $(\text{傾き})=\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{-6}{3}=-2$

(3) 傾きは $\dfrac{6-0}{3-0}=2$

(4) 傾きは $y=\dfrac{-5-5}{2-(-3)}=\dfrac{-10}{5}=-2$

■1 次関数を決定する

『 $y=a(x-p)+q$ のグラフ』で学んだことを用い，条件に合った**1** 次関数の式を求めてみよう.

【例題：直線の傾きと通る1 点が与えられた場合】

グラフが次の条件を満たす**1** 次関数を求めよ.

(1) 傾きが**3** で，点**(2, 1)** を通る.

(2) 傾きが**2** で，**y** 切片が**1** である.

(3) 傾きが**2** で，**x** 切片が**3** である.

【解答】

(1) 傾きが**3** で，点 $(2,1)$ を通る直線の方程式は

$$y=3(x-2)+1 \quad \Leftrightarrow \quad y=3x-5$$

(2) y 切片が**1** であるということは，点 $(0,1)$ を通るということであるから

$$y=2(x-0)+1 \quad \Leftrightarrow \quad y=2x+1$$

(3) x 切片が**3** であるということは，点 $(3,0)$ を通るということであるから

$$y=2(x-3)+0 \quad \Leftrightarrow \quad y=2x-6$$

【例題：直線の通る2 点が与えられた場合】

グラフが次の条件を満たす**1** 次関数を求めよ.

(1) 2 点 $(-2,-7)$, $(1,-1)$ を通る.

(2) 2 点 $(-5,-9)$, $(5,7)$ を通る.

(3) x 切片が**3**, y 切片が**5** である.

【解答】

(1) 傾きは

$$\frac{-1-(-7)}{1-(-2)}=2$$

である．通る点を $(-2,-7)$ として

$$y=2\{x-(-2)\}-7 \quad \Leftrightarrow \quad y=2x-3$$

(2) 傾きは

$$\frac{7-(-9)}{5-(-5)}=\frac{8}{5}$$

である．通る点を**(-5, -9)** として

$$y=\frac{8}{5}\{x-(-5)\}-9 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{8}{5}x-1$$

(3) 求めたい関数のグラフは，x 切片が**3** なので $(3,0)$ を通り，y 切片が**5** なので $(0,5)$ を通る.

つまり，傾きは

$$\frac{5-0}{0-3}-\frac{5}{3}$$

であるから，通る点を $(3,0)$ として

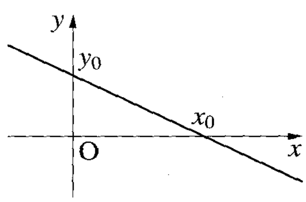
$$y=-\frac{5}{3}(x-3)+0 \quad \Leftrightarrow \quad y=-\frac{5}{3}x+5$$

■切片が与えられたときの直線の方程式

右の図のように原点を通らない直線で，x 切片が x_0 ，y 切片が y_0 である直線は，傾きが

$$\frac{-y_0}{x_0}$$

であり $(0,y_0)$ を通るので， $y=\frac{-y_0}{x_0}x+y_0$ となる.



この式全体を y_0 で割ると

$$\frac{y}{y_0}=-\frac{x}{x_0}+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}=1$$

となる.

切片が与えられたときの直線の方程式

x 切片が x_0, y 切片が y_0 の直線の方程式は $\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{y}{y_0}=1$ で表される.

上の例題の**(3)** は, x 切片が**3**, y 切片が**5** であるから

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1 \quad \Leftrightarrow \quad 5x+3y-15 \quad \Leftrightarrow \quad y=-\frac{5}{3}x+5$$

となりさきほどの解答と確かに一致する.

2.2.3 1 次関数の対称移動

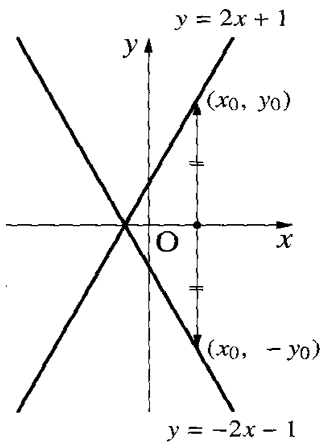
■ x 軸に関する対称移動

たとえば, **1** 次関数

$$y=2x+1$$

と, 右辺全体に -1 を掛けた**1** 次関数

$$y=-2x-1$$



のグラフは, 右図のように互いに x 軸対称となっている.

これは, **2** つの**1** 次関数に関して「同じ x_0 という値に対して, y_0 の値の絶対値は同じだが, 符号は逆になるため」と考えれば明らかであろう.

x 軸対称なグラフの関係

1 次関数 $f(x)=ax+b$ において

$y=f(x)$ のグラフと $y=-f(x)$ のグラフ

は, 互いに x 軸対称になる.

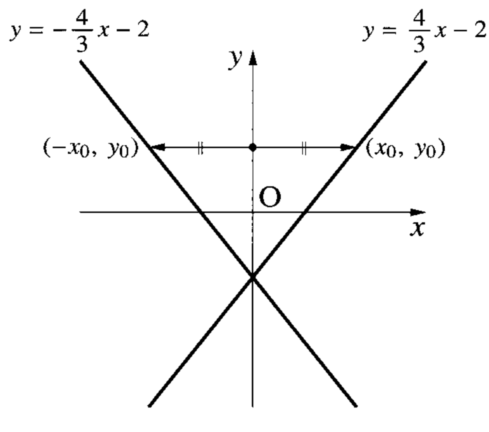
■ y 軸に関する対称移動

次に, **1** 次関数

$$y=\frac{4}{3}x-2 \quad \cdots\cdot①$$

と, 右辺の x を $-x$ で置き換えた**1** 次関数

$$y=\frac{4}{3}(-x)-2=-\frac{4}{3}x-2 \quad \cdots\cdot②$$



のグラフを図示すると, 右図のように互いにy軸対称となっている.

これは, **2** つの**1** 次関数に関して「同じ y_0 という値をとるのが, ①では x_0 , ②では $-x_0$ のときであるため」と考えれば納得できるだろう. 具体的にいえば, ①の x に**3** を代入すると $y=2$ となり, ②の x に -3 を代入すると同じく $y=2$ になるということである.

§ 2.3　1 次方程式と1 次関数

ここでは, 1 次方程式　$ax+b=0$　と1 次関数　$y=ax+b$　のグラフとの間の関係について考えていこう. また, 3 つの文字の連立1 次方程式についても学ぶ.

2.3.1　1 次方程式の解法

1 次方程式の定義とその解

$a \fallingdotseq 0$, b を定数として

$$ax+b=0$$

という形で表される方程式を, x についての **1 次方程式** (linear equation) という.
1 次方程式の解は $x=-\dfrac{b}{a}$ である.

「1 次」という言葉のつかない, 単なる方程式　$ax+b=0$　の解は,　$a=0$　の場合も考えるため, 次のようになる.

方程式 $ax+b=0$ の解

方程式 $ax+b=0$ の解は

I) $a \fallingdotseq 0$ のときは, 1 次方程式なので $\boldsymbol{x=-\dfrac{b}{a}}$
II) $a=0$ のときは, 方程式 $0\cdot x=b$ を考え

i) $b=0$ のとき
方程式は $0\cdot x=0$ となり
解はすべての実数

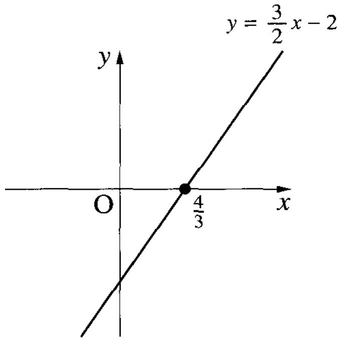
ii) $b \fallingdotseq 0$ のとき
方程式は $0\cdot x=b$ となり
解は存在しない

2.3.2　1 次方程式と1 次関数の関係

1 次関数　$y=\dfrac{3}{2}x-2$　において, このグラフと　x　軸との共有点を考える.
共有点の　y　座標は0 であるから, 共有点の　x　座標は

$$\frac{3}{2}x-2=0$$

という1 次方程式の解として求めることができる.
この方程式の解は, 次のような式変形を行い



$$y=\frac{3}{2}x-2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{2}x=2$$
$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{4}{3}$$

と求めることができる.
つまり,　$y=\dfrac{3}{2}x-2$　のグラフと　x　軸との共有点の　x　座標は　$\dfrac{4}{3}$　である.

以上のことは，次のようにまとめられる．

1 次関数のグラフと x 軸との共有点

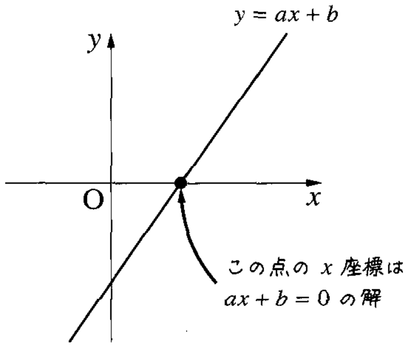
1 次関数

$$y=ax+b$$

のグラフと x 軸との共有点の x 座標は
1 次方程式

$$ax+b=0$$

の解である．



【暗記：1 次方程式と 1 次関数の関係】

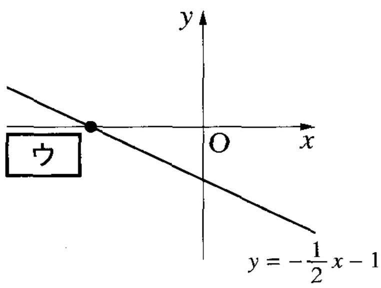
次の文章の四角の中に適当な数字を入れよ．

1 次関数 $y=-\frac{1}{2}x-1$ において，このグラフと x 軸との共有点を考える．共有点の y 座標は $\boxed{ア}$ であるから，共有点の x 座標は

$$-\frac{1}{2}x-1=\boxed{ア}$$

という 1 次方程式の解として求めることができる．
この方程式の解は，x について解くことにより

$$-\frac{1}{2}x-1=\boxed{ア}$$
$$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{2}x=\boxed{イ}$$
$$\Leftrightarrow\ x=\boxed{ウ}$$



と求めることができる．
つまり，$y=-\frac{1}{2}-1$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は $\boxed{ウ}$ である．

【解答】
ア= **0**，イ= **1**，ウ= **−2**

§2.4　1次不等式と1次関数

ある数とある数が等しいことは等号(=)を使った等式で表すことができる．同様に，ある数がある数より大きいことや小さいことは，不等号(＞や　≦　など)を使った式で表すことができる．
以下では，数の大小関係を不等号で表した式，不等式について見ていこう．

2.4.1　不等式の性質

■不等式とは何か

たとえば

「ある数　a　を2倍してから3を加えた数は，4より大きい」

ということを，不等号を用いて表すと

$2a+3>4$　・・・①

となる．この①のように

不等式

2つの数の大小関係を不等号を使って表したものを**不等式**(inequality)という．

等式の場合と同じように，不等号の左側にある式を**左辺(left side)**，右側にある式を**右辺(right side)**という．①の左辺は　$2a+3$　，右辺は4である．やはり，等式の場合と同じように，左辺と右辺をあわせて**両辺(both sides)**という．

ここで不等号の種類をまとめると以下のようになる．

	読み方	意味
$a<b$	a は b より小さい（a は b 未満である）	
$a \leqq b$	a は b 以下である	$a<b$ または $a=b$
$a>b$	a は b より大きい	
$a \geqq b$	a は b 以上である	$a>b$ または $a=b$

【例題：不等式で表す】

次の文章を，不等式を使って表せ．

(1)　a　と3の和は，　b　の2倍より小さい．

(2)　x　の2倍から3引いた数は，　x　の (-2) 倍以上である．

【解答】

(1)　a　と3の和は，　b　の2倍より小さい．　→　$a+3<2b$

◀「AはBより小さい」はA＜B

(2)　x　の2倍から3引いた数は，　x　の (-2) 倍以上である．
→　$2x-3 \geqq -2x$

◀「AはB以上」はA＝B

■不等式の性質

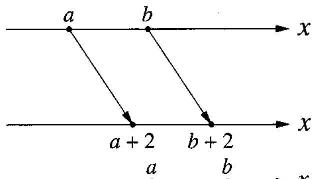
ここでは　$a<b$　として，不等式について成り立つ性質を考えていこう．
以下の説明では，不等式の性質を，数直線上の点の移動として理解できるように図が載せてある．ただ式を追うのではなく，点の移動のイメージをもつようにしよう．

i) 両辺に同じ数を足す(引く)場合

左辺，右辺それぞれに2を加えた　$a+2$　，　$b+2$　は，不等式

$a+2<b+2$

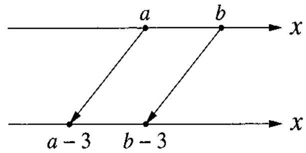
を満たす．



また，左辺，右辺それぞれから3を引いた　$a-3$　，　$b-3$　も，不等式

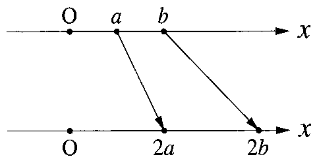
$a-3<b-3$

を満たす．



つまり,「不等式の両辺に同じ数を足しても(引いても), もとの不等式と不等号の向きが変わらない」といえる.

ii) 両辺に正の数を掛ける(割る)場合



左辺, 右辺それぞれに2を掛けた $2a$, $2b$ は, 不等式

$$2a<2b$$

を満たす.

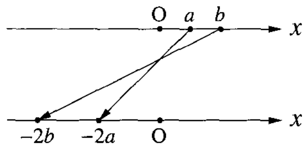
また, 左辺, 右辺それぞれを3で割った値 $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ も不等式

$$\frac{a}{3}<\frac{b}{3}$$

を満たす. つまり,

「不等式の両辺に同じ正の数を掛けても(割っても), もとの不等式と不等号の向きが変わらない」といえる.

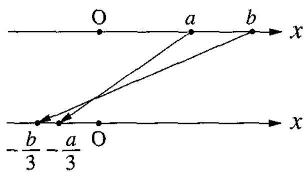
iii) 両辺に負の数を掛ける(割る)場合



左辺, 右辺それぞれに -2 を掛けた $-2a$, $-2b$ は, 不等式

$$-2a>-2b$$

を満たす.



また, 左辺, 右辺それぞれを -3 で割った値 $\frac{-a}{3}$, $\frac{-b}{3}$ も, 不等式

$$-\frac{a}{3}>-\frac{b}{3}$$

を満たす. つまり,

「不等式の両辺に同じ負の数を掛けると(割ると), もとの不等式と不等号の向きが逆になる」といえる.

以上をまとめると次のようになる.

不等式の性質

i) すべての実数 c で $a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$, $a-c<b-c$

ii) $0<c$ のとき $a<b \Leftrightarrow ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

iii) $c<0$ のとき $a<b \Leftrightarrow ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ ←逆符号!

【例題:不等式の性質】

$a<b$ のとき, 次のそれぞれ大小関係を不等号を使って表せ.

(1) $a+2$ と $b+2$　　**(2)** $a-2$ と $b-2$

(3) $2a$ と $2b$　　**(4)** $-2a$ と $-2b$

【解答】

(1) $a+2<b+2$

(2) $a-2<b-2$

(3) $2a<2b$

(4) $-2a>-2b$

◀ 負の数で割ると不等号の向きは逆になる

【暗記：不等式の移項の仕組み】

次の式が成立することを『不等式の性質』を使って証明せよ．

(1) $x+y<z \Leftrightarrow x<z-y$

(2) $x-y<z \Leftrightarrow x<z+y$

(3) $y>0$ のとき，$yx<z \Leftrightarrow x<\dfrac{z}{y}$

(4) $y<0$ のとき，$yx<z \Leftrightarrow x>\dfrac{z}{y}$

【解答】

(1) $x+y<z \Leftrightarrow x+y-y<z-y$ ◀『不等式の性質i)』

$\Leftrightarrow x<z-y$

(2) $x-y<z \Leftrightarrow x-y+y<z+y$ ◀『不等式の性質i)』

$\Leftrightarrow x<z+y$

(3) $yx<z \Leftrightarrow yx\times\dfrac{1}{y}<z\times\dfrac{1}{y}$

$\Leftrightarrow x<\dfrac{z}{y}$ ◀『不等式の性質ii)』

(4) $yx<z \Leftrightarrow yx\times\dfrac{1}{y}>z\times\dfrac{1}{y}$

$\Leftrightarrow x>\dfrac{z}{y}$ ◀『不等式の性質iii)』

以上のことから，不等式は等式の場合と同じように**移項(transposition)** できるのがわかる．
ただし，

不等式の場合には「両辺に同じ負の数を掛けたり割ったりすると，
もとの不等式と不等号の向きが逆になる」ことに注意しよう．

2.4.2 1 次不等式の解法

不等式

$2x+3>4$ ････①

を満たす x はどのような値だろうか．
たとえば，$x=2$ や $x=5$ は①を満たすが，$x=0$ や $x=-2$ は①を満たさない．
一般に，不等式を満たす x の値をその不等式の**解(solution)** といい，すべての解を求めることを
不等式を**解く(solve)** という．では，実際にこの不等式①を解いてみよう．

$2x+3>4$
$2x>4-3$ ←移項した
$2x>1$
$x>\dfrac{1}{2}$ ←移項した

これが，不等式①の解である．つまり，x は $\dfrac{1}{2}$ より大きければ，①を満たす．
不等式を移項して整理することにより

(1 次式)>0 ，(1 次式)≤ 0

などの形に変形できる不等式を，一般に**1 次不等式(linear inequality)** という．

【例題:1 次不等式】

次の**1** 次不等式を解け．また，その解を数直線上に表せ．

(1) $x-8<5$ **(2)** $-8x\leq 32$

(3) $4x-8>2x$ **(4)** $5-3x\leq 7-10x$

(5) $2(x-2)>3(4-x)+4$ **(6)** $3-\dfrac{5x-1}{3}>2x+1$

【解答】

(1) $x-8<5 \quad \to \quad x<13$

(2) $-8x\leq 32 \quad \to \quad x=-4$

(3) $4x-8>2x \quad \to \quad 2x>8 \quad \to \quad x>4$

(4) $5-3x\leq 7-10x \quad \to \quad 7x\leq 2 \quad \to \quad x\leq\dfrac{2}{7}$

(5) $2(x-2)>3(4-x)+4 \quad \to \quad 2x-4>12-3x+4 \quad \to \quad 5x>20 \quad \to \quad x>4$

(6) $3-\dfrac{5x-1}{3}>2x+1 \quad \to \quad 9-(5x-1)>6x+3 \quad \to \quad 9-5x+1>6x+3$

$\to \quad -11x>-7 \quad \to \quad x<7$

■連立不等式

x が満たすべき不等式が**2** つ以上あるとき，それらをまとめて**連立不等式(simultaneous inequalities)** という．連立不等式を解くとは，全ての不等式を同時に満たす x の範囲を求めることである．

【例題:連立不等式】

次の連立方程式を解け（次の**2** つの不等式を同時に満たす x の範囲を求めよ．

(1) $\begin{cases} \dfrac{11}{4}x-\dfrac{3}{2}>2x-5 \\ \dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{6}\leq-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} 0.25x-0.18\geq 0.6-0.14x \\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{6}\leq-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

【解答】

(1) まず，$\dfrac{11}{4}x-\dfrac{3}{2}>2x-5$ を解く．

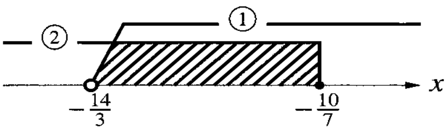
$\dfrac{11}{4}x-\dfrac{3}{2}>2x-5 \quad \to \quad 11x-6>8x-20 \quad \to \quad 3x>-14 \quad \to \quad x>-\dfrac{14}{3}$ ・・・①

次に，$\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{6}\leq-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ を解く．

$\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{6}\leq-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2} \quad \to \quad 4x+1\leq-3x-9 \quad \to \quad 7x\leq-10 \quad \to \quad x\leq-\dfrac{10}{7}$ ・・・②

以上の①．②を共通して満たす x は

$-\dfrac{14}{3}<x\leq-\dfrac{10}{7}$

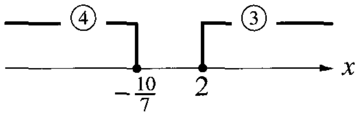


(2) まず，$0.25x-0.18=0.6-0.14x$ を解く．

$0.25x-0.18=0.6-0.14x \quad \to \quad 25x-18\geq 60-14x \quad \to \quad 39x\geq 78 \quad \to \quad x\geq 2$ ・・・③

次に，$\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{6}\leq-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ を解く．

$\to \quad 4x+1\leq-3x-9 \quad \to \quad 7x\leq-10 \quad \to \quad x\leq-\dfrac{10}{7}$ ・・・④



以上の③、④を共通して満たす x は，存在しないので，答えは解なし．

■1 次不等式の応用

【例題:1 次不等式の応用】

(1) **A** 地点から**15 km** 離れた**B** 地点まで歩いた. はじめは急ぎ足で毎時**5 km**, 途中から疲れたので毎時**3 km** の速さで歩いた. 所要時間が**4** 時間以内のとき, 急ぎ足で何**km** 以上歩いたか求めよ.

(2) **5 %** の食塩水と**8 %** の食塩水がある. **5 %** の食塩水**800 g** と**8 %** の食塩水を何**g**か混ぜて, **6 %** 以上の食塩水を作りたい. **8 %** の食塩水を何**g** 以上混ぜればよいか求めよ.

【解答】

(1) 急ぎ足で歩いた距離をx **km** として, x について解けばよい.

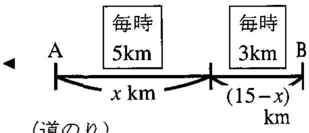
疲れて歩いた距離は $(15-x)$ **km** となり, 歩くのにかかる時間はそれぞれ, $\dfrac{x}{5}$ 時間, $\dfrac{15-x}{3}$ 時間となる. 全体の所要時間は**4** 時間以内であるから

$$\frac{x}{5}+\frac{15-x}{3}\leq 4$$

を満たすx を求めればよい.

$$\frac{x}{5}+\frac{15-x}{3}\leq 4 \quad\Leftrightarrow\quad 3x+5(15-x)\leq 60$$
$$\Leftrightarrow\quad -2x\leq -15$$
$$\Leftrightarrow\quad x\geq\frac{15}{2}=7.5$$

よって, 急ぎ足では**7.5 km** 以上歩いた.



◄ $\dfrac{(\text{道のり})}{(\text{速さ})}=(\text{時間})$

(2) **8%** の食塩水をx **g** 混ぜるとして, x について解けばよい.

5% の食塩水**800 g** の中には $\left(\dfrac{5}{100}\times 800\right)g$ の食塩が溶けている. また, 混ぜる**8%** の食塩水x **g** の中には, $\left(\dfrac{8}{100}\times x\right)$ **g** の食塩が溶けている.

これらを混ぜて, 濃度が**6 %** 以上になるから

$$\left(\frac{5}{100}\times 800+\frac{8}{100}\times x\right)\div(800+x)\geq\frac{6}{100}$$

を満たすx を求めればよい.

$$\left(\frac{5}{100}\times 800+\frac{8}{100}\times x\right)\div(800+x)\geq\frac{6}{100}$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{5}{100}\times 800+\frac{8}{100}\times x\geq\frac{6}{100}\times(800+x)$$
$$\Leftrightarrow\quad 5\times 800+8x\geq 6\times(800+x)$$
$$\Leftrightarrow\quad 4000+8x\geq 4800+6x$$
$$\Leftrightarrow\quad 2x\geq 800 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq 400$$

よって, **8%** の食塩水は**400 g** 以上混ぜればよい.

	食塩水の量 (g)	食塩の量 (g)
5%	800	$\frac{5}{100}\times 800$
8%	x	$\frac{8}{100}x$
	$800+x$	$\frac{5}{100}\times 800+\frac{8}{100}x$

◄ $\dfrac{(\text{食塩の量})}{(\text{食塩水の量})}=\dfrac{(\text{濃度})}{100}$

2.4.3 1 次不等式と1 次関数の関係

■1 次不等式と1 次関数の関係

§2.3 でみたように, **1** 次方程式と**1** 次関数の間には密接な関係があった. それと同じように, **1** 次不等式と**1** 次関数にも密接な関係がある.

たとえば，1 次不等式 $\frac{1}{2}x-1>0$ の解について考える．この1 次不等式の「左辺をyとおいた1 次関数」

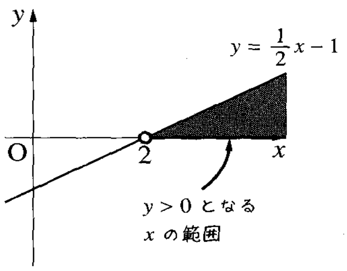
$$y=\frac{1}{2}x-1$$

を考える．すると，不等式 $\frac{1}{2}x-1>0$ を解くためには

$$\left(y=\frac{1}{2}x-1 \text{ のグラフのy座標}\right)>0$$

となる x の範囲を求めればよい．よって，右のグラフから

$x>2$ である．



実際，この1 次不等式を解いてみると

$$\frac{1}{2}x-1>0 \iff \frac{1}{2}x>1 \iff x>2$$

となり，確かに1 次関数のy が0 より大きくなるx の範囲となっている．

【例題：1 次不等式をグラフを使って解く】

次の1 次不等式をグラフを使って解け．

(1) $\frac{x}{3}-\frac{13}{3}<0$　　(2) $-2x-8\leq 0$

(3) $\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}>0$　　(4) $-7x+2\geq 0$

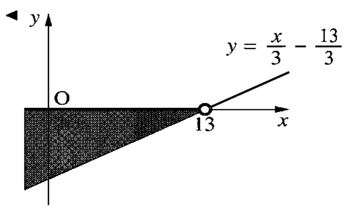
【解答】

(1) 右図より，$\frac{x}{3}-\frac{13}{3}<0$ となるのは $x<13$ のとき．

よって，1 次不等式 $\frac{x}{3}-\frac{13}{3}<0$ の解は

$x<13$

となる．

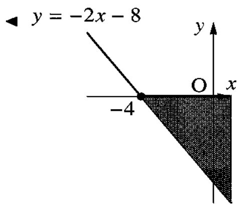


(2) 右図より，$-2x-8\leq 0$ となるのは $x\geq -4$ のとき，

よって1 次不等式 $-2x-8\leq 0$ の解は

$x\geq -4$

となる．

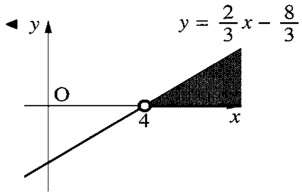


(3) 右図より，$\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}>0$ となるのは $x>4$ のとき，

よって1 次不等式 $\frac{2}{3}-\frac{8}{3}>0$ の解は

$x>4$

となる．

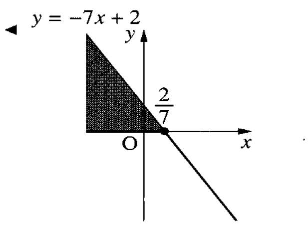


(4) 右図より，$-7x+2\geq 0$ となるのは $x\leq\frac{2}{7}$ のとき，

よって1 次不等式 $-7x+2\geq 0$ の解は

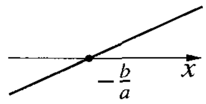
$x\leq\frac{2}{7}$

となる．



1 次不等式の解

$a > 0$ の場合の，1 次不等式と 1 次関数の解の関係はつぎのようにまとめることができる．

$y = ax + b$ のグラフ	
$ax + b = 0$ の解	$x = -\frac{b}{a}$
$ax + b > 0$ の解	$\boldsymbol{x > -\frac{b}{a}}$
$ax + b \geqq 0$ の解	$\boldsymbol{x \geqq -\frac{b}{a}}$
$ax + b < 0$ の解	$\boldsymbol{x < -\frac{b}{a}}$
$ax + b \leqq 0$ の解	$\boldsymbol{x \leqq -\frac{b}{a}}$

上の表を覚える必要はない．**1** 次不等式と**1** 次関数の対応を確認できればよい．

2.4.4 絶対値を含む1 次関数･方程式･不等式

■絶対値と方程式･不等式

『絶対値』でも学んだように，実数$\boldsymbol{x}$ の絶対値$\boldsymbol{x}$ は，数直線上での原点と実数$\boldsymbol{x}$ に対応する点との距離を表すので，次のことがいえる．

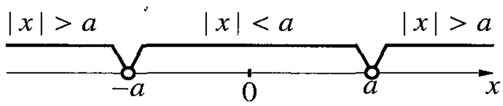
絶対値と方程式・不等式の関係

絶対値を含む x の方程式，不等式に関して

$|x| = a \iff x = \pm a$

$|x| < a \iff -a < x < a$

$|x| > a \iff x < -a$ または $a < x$



ただし，$a > 0$ とする．

【例題:絶対値を含む1 次方程式･1 次不等式】

次の方程式･不等式を解け．

(1) $|x-1|=3$ 　　**(2)** $|3x-2|=6$

(3) $|x+1|>4$ 　　**(4)** $|5x-2|\leq 4$

【解答】

(1) (右辺)$=3$ なので，　$x-1=\pm 3$　より，

$x=-2, 4$　である。

(2) (右辺)$=6$ なので，　$3x-2=\pm 6$　より

$3x-2=\pm 6$

$3x=-4, 8$　　　$\therefore \quad x=-\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}$

(3) (右辺)$=4$ なので，$x+1<-4$　または　$4<x+1$

$\therefore \quad x<-5$　または　$3<x$

(4) (右辺)$=4$ なので，　$-4\leq 5x-2\leq 4$　より

$-2\leq 5x\leq 6$　　$\therefore \quad -\dfrac{2}{5}\leq x\leq \dfrac{6}{5}$

■場合に分けて絶対値を外す

以下のような問題では，場合に分けて絶対値を外す必要がある.

- 絶対値を含む1 次関数の式のグラフを書く
- $|(x\ \text{の式}\ )|=a$ の形でない方程式･不等式を解く

【例題：絶対値を含む1 次関数】

次の式で与えられた関数のグラフを描け.

(1) $y=2x+|x-1|$　　　　(2) $y=|x-4|$

【解答】

(1) i) $x-1=0$ ，つまり $1\leq x$ のとき

$y=2x+(x-1)$

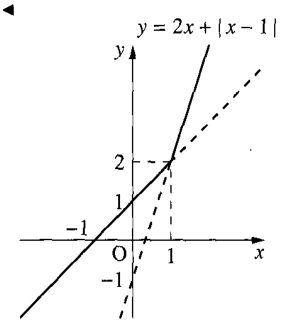
$=3x-1$

ii) $x-1<0$ ，つまり $x<1$ のとき

$y=2x-(x-1)$

$=x+1$

i), ii) より，グラフは右図のようになる.



(2) i) $x-4=0$ ，つまり $4\leq x$ のとき

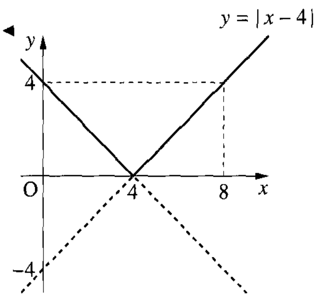
$y=x-4$

ii) $x-4<0$ ，つまり $x<4$ のとき

$y=-(x-4)$

$=-x+4$

i), ii) より，グラフは右図のようになる.



【例題：絶対値を含む1 次方程式】

次の方程式を解け.

(1) $|x+1|=2x$　　　(2) $|3x-4|=x+8$

(3) $|2x-2|=x-4$

【解答】

(1) i) $x+1=0$ ，つまり $-1\leq x$ ･･･① のとき

$x+1=2x$

$x=1$

これは，①に適している.

ii) $x+1<0$ ，つまり $x<-1$ ･･･② のとき

$-x-1=2x$

$3x=-1$　　$\therefore$　$x=-1$

これは，②に適さない.

i) またはii) を満たすものが解となり， $x=1$ である。

(2) i) $3x-4=0$ ，つまり $\dfrac{4}{3}\leq x$ ･･･③ のとき

$3x-4=x+8$

$2x=12$　　$\therefore$　$x=6$

これは，③に適している.

ii) $3x-4<0$, つまり $x<\dfrac{4}{3}$ ・・・④のとき

$-3x+4=x+8$

$4x=-4 \qquad \therefore \quad x=-1$

これは，④に適している．

i) または**ii)** を満たすものが解となり， $x=-1, 6$ である。

(3) **i)** $2x-2=0$, つまり $1\leq x$ ・・・⑤ のとき

$2x-2=x-4$

$x=-2$

これは，⑤に適さない．

ii) $2x-2<0$, つまり $x<1$ ・・・⑥ のとき

$-2x+2=x-4$

$-3x=-6 \qquad \therefore \quad x=2$

これは，⑥に適さない．

i), ii) のどちらにも満たす解がないので，解なしが答えとなる．実際， $y=2x-2$， $y=x-4$ のグラフを両方書いてみると，交点をもたない．

【例題：絶対値を含む1 次不等式】

次の不等式を解け．

(1) $|x+6|>3x$ **(2)** $|2x-1|\leq x+2$

【解答】

(1) **i)** $x+6=0$, つまり $-6\leq x$ ・・・① のとき

$x+6>3x$

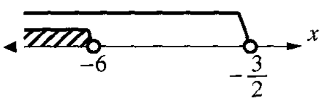
$2x<6 \qquad \therefore \quad x<3$

これと，①を合わせて， $-6\leq x<3$

ii) $x+6<0$, つまり $x<-6$ ・・・② のとき

$-x-6>3x$

$4x<-6 \qquad \therefore \quad x<\dfrac{-3}{2}$



これと，②を合わせて， $x<-6$

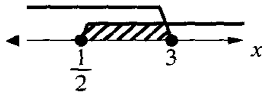
i) または**ii)** を満たすものが解となり， $x<3$ である。

(2) **i)** $2x-1=0$, つまり $\dfrac{1}{2}\leq x$ ・・・③ のとき

$2x-1\leq x+2$

$x\leq 3$

これと，③を合わせて， $\dfrac{1}{2}\leq x\leq 3$

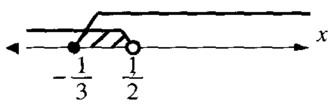


ii) $2x-1<0$, つまり $x<\dfrac{1}{2}$ ・・・④ のとき

$-2x+1\leq x+2$

$\dfrac{-1}{3}\leq x$

これと，④を合わせて， $\dfrac{-1}{3}\leq x<\dfrac{1}{2}$



i) または**ii)** を満たすものが解となり， $-\dfrac{1}{3}\leq x\leq 3$ である。

§ 2.5　2 次関数とそのグラフ

たとえば，2 次関数　$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-1$　について，　$y=f(x)$　のグラフを描くには，x の値をいろいろとり，　$y=\frac{1}{2}x^2+3x-1$　を満たす　x，y　の値を座標上の点　(x, y)　として　xy　平面に打っていけばよい．しかし，そのような点は無数にあり，現実的な描き方とはいえない．2 次関数のグラフには「頂点」という大きな特徴がある．以下では，この頂点をうまくとらえて2 次関数のグラフを描く方法について学んでいこう．

2.5.1　2 次関数のグラフ

■2 次関数の定義

関数　$f(x)$　が

$$f(x)=2x^2 \quad , \quad f(x)=-x^2+12x \quad , \quad f(x)=\frac{1}{3}x^2-6x+4$$

のように　x　の2 次式で表されるとき，　$f(x)$　は　x　の**2 次関数(quadratic function)** であるという．

2 次関数の定義

関数 $f(x)$ が x の 2 次式で表されるとき，つまり，$a\ (\fallingdotseq 0)$，b，c を定数として

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

の形で表されるとき，$f(x)$ は x の **2 次関数** (quadratic function) という．

■　$y=ax^2$　のグラフ

まずは，2 次関数　$y=ax^2+bx+c$　において　$b=c=0$　の場合，つまり

$$y=ax^2$$

のグラフについて考えてみよう．
このグラフについては，中学校で学んだように次のような特徴があった．

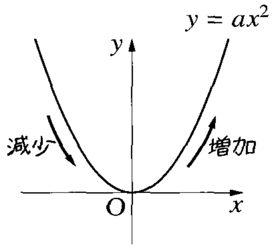
$y = ax^2$ のグラフの特徴

I) 原点を通り，y 軸に関して対称である．

II) グラフの y 座標の増減に着目すると

i) **$a > 0$ のとき**

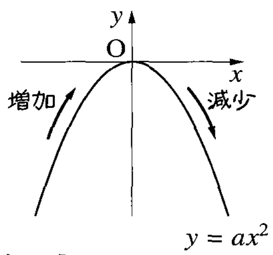
- $y \geqq 0$ の範囲にある．
- x の増加に対し
  $x < 0$ では y は減少する
  $x > 0$ では y は増加する



このグラフのようにいったん下がってから上がるグラフのことを，下に凸 (convex) なグラフという．

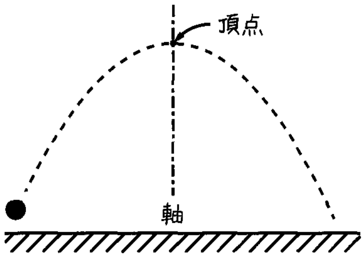
ii) **$a < 0$ のとき**

- $y \leqq 0$ の範囲にある．
- x の増加に対し
  $x < 0$ では y は増加する
  $x > 0$ では y は減少する



このグラフのようにいったん上がってから下がるグラフのことを，上に凸なグラフという．

一般に, **2** 次関数のグラフにあらわれる曲線のこ**放物線(parabola)** という. この名前は, 空中に物を放り投げたときにできる軌跡に由来する. 放物線は必ず対称軸をもち, この対称軸のことを単に**軸(axis)** といい, この軸と放物線の交点のことを**頂点(vertex)** という.



■ $y=ax^2+c$ のグラフ

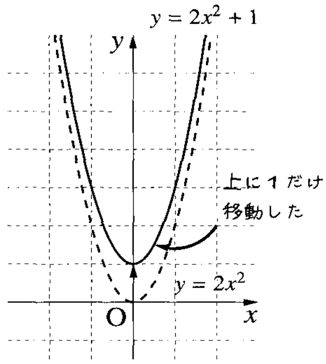
次に, $y=ax^2+c$ のグラフについて考えてみよう. これは**2** 次関数 $y=ax^2+bx+c$ において, $b=0$ の場合である. 例として**2** つの**2** 次関数

$$y=2x^2 \quad , \quad y=2x^2+1$$

の関係を考えてみよう.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	18	8	2	0	2	8	18	$\cdots$
$2x^2+1$	$\cdots$	19	9	3	1	3	9	19	$\cdots$

1 を足す



上の表から, $y=2x^2+1$ のグラフは, $y=2x^2$ のグラフを y 軸方向に**1** だけ平行移動した放物線であるとわかる.

このことは, 式の形からも理解できる. 同じ x の値を代入しても, $y=2x^2+1$ の y の値の方が, $y=2x^2$ の y の値より**1** だけ大きく計算されるからである.

この平行移動によって, 放物線の軸が y 軸から変わることはない. しかし, 頂点は移動し, 原点より y 軸方向に**1** 大きい点**(0, 1)** であることがわかる.

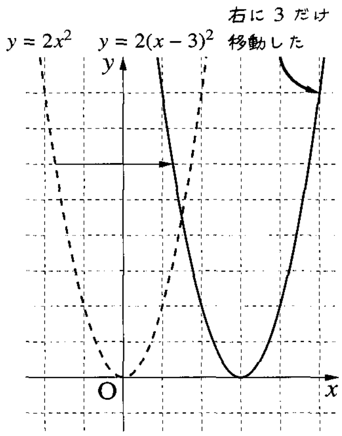
$y=ax^2+c$ のグラフ

> $y=ax^2+c$ のグラフは, $y=ax^2$ のグラフを
>
> 「y 軸方向に c だけ平行移動」
>
> した放物線である. このとき, 軸は y 軸(直線 $x=0$), 頂点は $(0,\ c)$ となる.

■ $y=a(x-p)^2$ のグラフ

例として, **2** つの**2** 次関数 $y=2x^2$, $y=2(x-3)^2$ の関係を考えてみよう.

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	8	2	0	2	8	18	32	50	$\cdots$
$2(x-3)^2$	$\cdots$	50	32	18	8	2	0	2	8	$\cdots$



上の表から, $x-3^2$ $y=2$¿ のグラフは, $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に**3** だけ平行移動した放物線であるとわかる.

このことは, 式の形からも理解できる. $y=2(x-3)^2$ の y の値と $y=2x^2$ の y の値を一致させるには, $y=2(x-3)^2$ の x に, $y=2x^2$ の x より**3** 大きい値を代入しなければならないからである.

この平行移動によって，軸は x 軸方向に3 移動し，直線 $x=3$ に重なる．また，頂点も移動し，原点より x 軸方向に3 大きい点 $(3,0)$ であることがわかる．

$y=a(x-p)^2$ のグラフ

$y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

「x 軸方向に p だけ平行移動」

した放物線である．このとき，軸は直線 $x=p$，頂点は $(p,\ 0)$ となる．

【例題：放物線を描く～その１～】

次の放物線は，[ ] 内のグラフをどのように平行移動してできたグラフか．また，軸の方程式と頂点の座標を求め，座標平面にグラフで表せ．

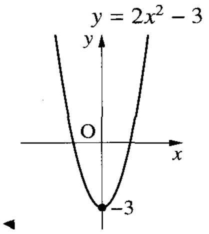
(1) $y=2x^2-3$ [$y=2x^2$]　　**(2)** $y=2(x+2)^2$ [$y=2x^2$]

(3) $y=-3x^2-1$ [$y=-3x^2$]　　**(4)** $y=-3(x-4)^2$ [$y=-3x^2$]

【解答】

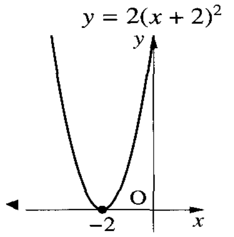
(1) $y=2x^2-3$ は $y=2x^2$ のグラフを y 軸方向に-3 平行移動したグラフであるから軸は y 軸(または直線 $x=0$)，頂点の座標は $(0,-3)$ である．

また，これは下に凸な放物線であるから，グラフは右図のようになる．



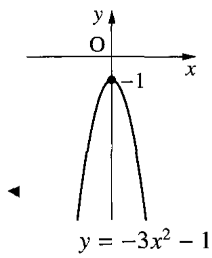
(2) $y=2(x+2)^2$ は $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に-2 平行移動したグラフであるから軸は $x=-2$ ，頂点の座標は $(-2,0)$ である．

また，これは下に凸な放物線であるから，グラフは右図のようになる．



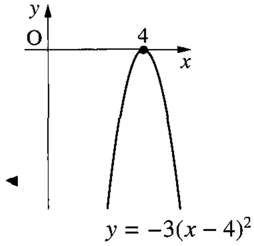
(3) $y=-3x^2-1$ は $y=-3x^2$ のグラフを y 軸方向に -1 平行移動したグラフであるから軸は y 軸(または直線 $x=0$)，頂点の座標は $(0,-1)$ である．

また，これは上に凸な放物線であるから，グラフは右図のようになる．



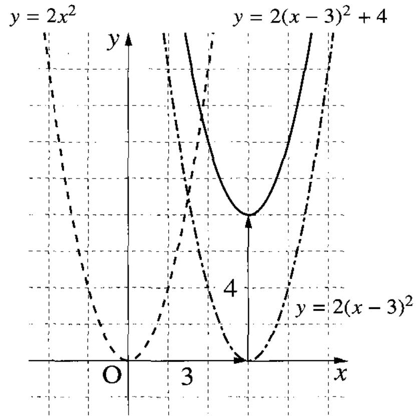
(4) $y=-3(x-4)^2$ は $y=-3x^2$ のグラフを x 軸方向に4 平行移動したグラフであるから軸は $x=4$ ，頂点の座標は $(4,0)$ である．

また，これは上に凸な放物線であるから，グラフは右図のようになる．



■ $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

たとえば $y=2(x-3)^2+4$ のグラフについて、右下図を見ながら考えてみよう.



$$y=2x^2$$

のグラフを x 軸方向に3 平行移動すると

$$y=2(x-3)^2$$

のグラフになる. さらに, y 軸方向に4 平行移動して

$$y=2(x-3)^2+4$$

のグラフとなる.

この平行移動によって, 軸は原点より x 軸方向に3 大きい, 直線 $x=3$ に移動する.

また, 頂点も移動し, 原点より x 軸方向に3 大きく y 軸方向に4 大きい点 $(3,4)$ であることがわかる.

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは, $y=ax^2$ のグラフを

「x 軸方向に p だけ平行移動し, y 軸方向に q だけ平行移動」

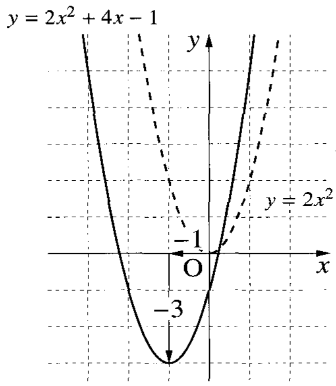
した放物線である. このとき, 軸は直線 $x=p$, 頂点は (p, q) となる.

■ $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

最後に, 一般の2 次関数

$$y=ax^2+bx+c$$

のグラフについて考えてみよう. たとえば



$$y=2x^2+4x-1 \quad \cdots ①$$

のグラフを描くには, 次のように式を変形
(**平方完成(completing square)** という)してから考える.

$y=2x^2+4x-1$
$= 2\{x^2+2x\}-1$ ← x^2 の係数でくくる
$= 2\{(x+1)^2-1\}-1$ ←平方の形にする(平方完成)
$= 2(x+1)^2-2-1$ ←{ }をはずす
$= 2(x+1)^2-3$ ←定数項を整理する

こうすると, 既に学んだ『 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ』に帰着され, ①のグラフは, $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に -1 , y 軸方向に -3 だけ平行移動した放物線になるとわかる.

平方完成は慣れないうちは難しく感じるかもしれない.
平方完成は2次関数問題の解法やその他の応用問題の解法だけでなく、数学的に幅広く応用される数式の変形方法である。

この平方完成がどのように複雑な文字式であっても間違いなく計算できることが、2次関数問題を解く場合に必須となるので、基本的な平方完成は上記の通りだが、間違いの少ない平方完成の方法を紹介しておく。

■間違いの少ない平方完成の方法

$y=ax^2+bx+c$ の平方完成の方法

$y=ax^2 \quad +bx \quad +c$

③ $\rightarrow -b^2$

① $\rightarrow \overline{2a}$

② $\rightarrow \overline{4a}$

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{-b^2}{4a}\right)+c$$

手順① ： x^2 の係数を２倍して bx の下段に記載

手順② ： ①の結果を更に２倍して c の下段に記載

手順③ ： b を２乗してマイナスを付けて c の下に記載

①から③の記入が終了したら、最下段のように、平方完成する。

【平方完成の具体例】

$y=\frac{1}{3}x^2+2x+5$

$\rightarrow -(2)^2$

$\rightarrow \frac{2}{3}$

$\rightarrow \frac{4}{3}$

$$y=\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(\frac{(2)^2}{\frac{4}{3}}\right)+5=\frac{1}{3}(x+3)^2-(4\cdot\frac{3}{4})+5=\frac{1}{3}(x+3)^2+2$$

平方完成は暗記するようなものではなく，毎回計算して導き出すものである.

ここまで見たように，2 次関数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ のグラフは放物線になる.
そこで，「2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ」のことを「放物線 $y=ax^2+bx+c$ 」ということがある.
このときの $y=ax^2+bx+c$ は，**放物線の方程式(equation of parabola)** といわれる.

【例題：放物線を描く～その２～】

次の放物線を，頂点の座標を求めてから描け.

(1) $y=x^2-2x+3$ **(2)** $y=-3x^2+6x$

(3) $y=2x^2+8x+5$ **(4)** $y=-2x^2-6x-\frac{5}{2}$

【解答】

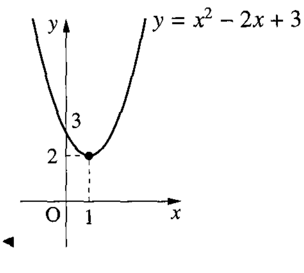
(1) $y=x^2-2x+3$

$\rightarrow -2^2$ $\quad\therefore\quad y=(x-1)^2+2$

$\rightarrow 2$

$\rightarrow 4$

となるから，頂点が**(1, 2)** で，下に凸な放物線であるから，グラフは右図のようになる.



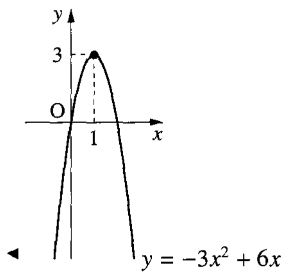
(2) $y=-3x^2+6x$

$\to -(6)^2$

$\to -6$ 　　$\therefore$ 　$y=-3(x-1)^2+\dfrac{36}{12}=-3(x-1)^2+3$

$\to -12$

となるから，頂点が**(1, 3)** で，上に凸な放物線であるから，グラフは右図のようになる．



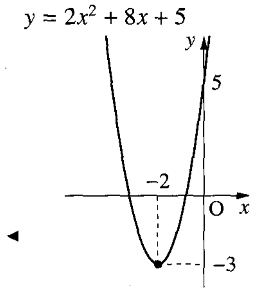
(3) $y=2x^2+8x+5$

$\to -8^2$

$\to 4$ 　　$\therefore$ 　$y=2(x+2)^2-8+5=2(x+2)^2-3$

$\to 8$

となるから，頂点が $(-2,-3)$ で，下に凸な放物線であるから，グラフは右図のようになる．



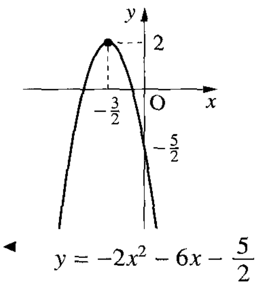
(4) $y=-2x^2-6x-\dfrac{5}{2}$

$\to -6^2$

$\to -4$

$\to -8$ 　$\therefore$ 　$y=-2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{36}{8}-\dfrac{5}{2}=-2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+2$

となるから，頂点が $\left(\dfrac{-3}{2},2\right)$ で，上に凸な放物線であるから，グラフは右図のようになる． **J**



2.5.2　グラフの移動

■2 次関数の平行移動

ここでは，**2** 次関数のグラフの平行移動について考える．

【例題:2 次関数グラフの平行移動～その1～】

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$$

とし，放物線 $y=f(x)$ を C とよぶ．

(1) C を x 軸方向に**2** 平行移動したグラフ $C1$ の式を求めよ．

(2) C を y 軸方向に**1** 平行移動したグラフ $C2$ の式を求めよ．

【解答】

平方完成をすると，$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+1$ となるので，頂点の座標は $(1,1)$ とわかる．

(1) 頂点が $(3,1)$ となればよいので

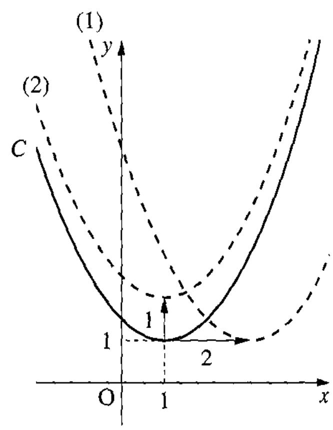
$$y=\frac{1}{2}(x-3)^2+1$$

$$\to\quad y=\frac{1}{2}(x^2-6x+9)+1=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}$$

(2) 頂点が**(1, 2)** となればよいので

$$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$$

$$\to\quad y=\frac{1}{2}(x^2-2x+1)+2=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}$$

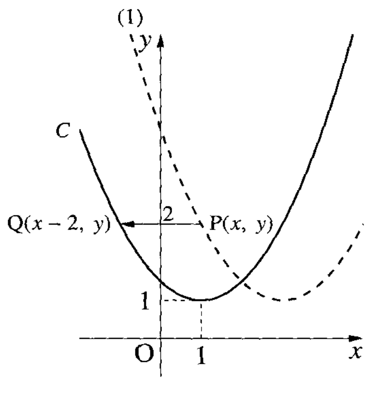


上の例題を別の見方でとらえてみよう.
たとえば, $C1$ 上の各点 $P(x,y)$ において, 問題とは逆向きに x 軸方向に -2 平行移動した点 $Q(x-2,y)$ は C 上の点だから

$$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-(x-2)+\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}$$

として答えを求めることができる.
このようなやり方は, y 軸方向への平行移動でも実行できる. 上の例題の**(2)** で各自それを確かめてみよ.



放物線の平行移動

放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸に p, y 軸に q だけ平行移動した放物線の方程式は, x を $x-p$, y を $y-q$ におきかえた

$$y-q=a(x-p)^2+b(x-p)+c$$

$$\Leftrightarrow \quad y=a(x-p)^2+b(x-p)+c+q$$

となる.

【例題:2 次関数グラフの平行移動～その2～】
放物線 $y=x^2-x+1$ を, x 軸方向に1, y 軸方向に2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ.
【解答】
x を $x-1$, y を $y-2$ におきかえて

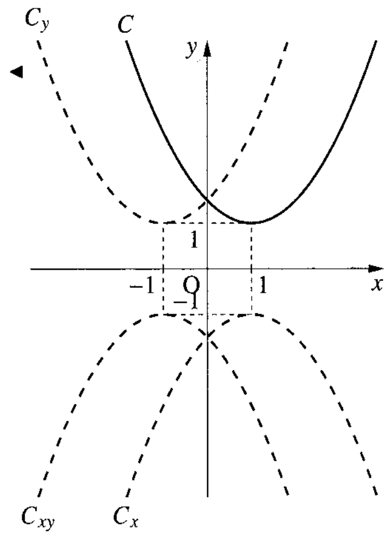
$$y-2=(x-1)^2-(x-1)+1$$

$$\rightarrow \quad y=x^2-3x+5$$

■2 次関数の対称移動
次に, 2 次関数のグラフの対称移動について考える.
【例題:2 次関数グラフの対称移動～その1～】

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$$

とし, 放物線 $y=f(x)$ を C とよぶ.
(1) C を x 軸に関して対称移動したグラフ Cx の式を求めよ.
(2) C を y 軸に関して対称移動したグラフ Cy の式を求めよ.
(3) C を原点に関して対称移動したグラフ Cxy の式を求めよ.



【解答】
平方完成をすると, $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$ となるので, 頂点の座標は $(1,1)$ とわかる.
(1) 頂点が $(1,-1)$ となり, 上に凸なグラフになればよいので

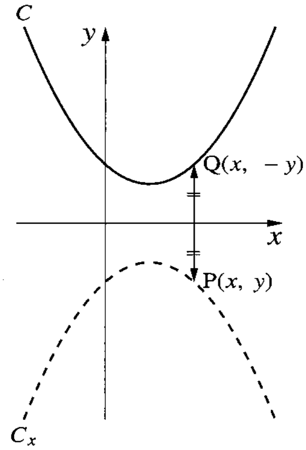
$$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2-1 \quad \rightarrow \quad y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$$

(2) 頂点が $(-1,1)$ となればよいので

$$y=\frac{1}{2}(x+1)^2+1 \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$$

(3) 頂点が $(-1,-1)$ となり，上に凸なグラフになればよいので

$$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1 \quad \rightarrow \quad y=-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$$



上の例題を別の見方でとらえてみよう．
たとえば， Cx 上の各点 $P(x, y)$ において，問題とは逆に x 軸に関して対称移動した点 $Q(x, -y)$ は C 上の点だから

$$-y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$$

として答えを求めることができる．
このようなやり方は， y 軸に関する対称移動でも実行できる．
上の例題の**(2)** と**(3)** で各自それを確かめてみよ．

放物線の対称移動

放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は，y を $-y$ におきかえた

$$-y=ax^2+bx+c \Leftrightarrow y=-ax^2-bx-c$$

また，y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は，x を $-x$ におきかえた

$$y=a(-x)^2+b(-x)+c \Leftrightarrow y=ax^2-bx+c$$

また，原点に関して対称移動した放物線の方程式は，y を $-y$ に，x を $-x$ におきかえた

$$-y=a(-x)^2+b(-x)+c \Leftrightarrow y=-ax^2+bx-c$$

となる．

【例題:2 次関数グラフの対称移動～その2～】
放物線 $y=x^2+4x-5$ を，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

(1) x 軸　　**(2)** y 軸　　**(3)** 原点

【解答】
(1) y を $-y$ におきかえて

$$-y=x^2+4x-5 \quad \rightarrow \quad y=-x^2-4x+5$$

(2) x を $-x$ におきかえて

$$y=(-x)^2+4(-x)-5 \quad \rightarrow \quad y=x^2-4x-5$$

(3) x を $-x$ に， y を $-y$ におきかえて

$$-y=(-x)^2+4(-x)-5 \quad \rightarrow \quad y=-x^2+4x+5$$

2.5.3　2 次関数の決定

ここでは，放物線にいくつかの条件を与え，その方程式を決定する問題を考えよう．

■軸や頂点に関する条件が与えられた場合

この場合には，『 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ』で学んだことを使って問題を解くとよい．

【例題：頂点や軸に関する条件が与えられた場合】

グラフが次の条件を満たす2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が $(1,-3)$ で，点 $(-1,5)$ を通る．

(2) 軸が直線 $x=-2$ で，2 点 $(-3,2)$ ，$(0,-1)$ を通る．

【解答】

(1) グラフの頂点が $(1,-3)$ であるから，求める2 次関数は

$$y=a(x-1)^2-3$$

と表せる．さらに，このグラフは点 $(-1,5)$ を通るから， $x=-1$ のとき $y=5$ となる．したがって

$$5=a(-1-1)^2-3$$

$$5=4a-3 \quad \rightarrow \quad a=2$$

よって，求める2 次関数は $y=2(x-1)^2-3$ ，つまり

$$y=2x^2-4x-1$$

(2) 軸が直線 $x=-2$ であるから，求める2 次関数は

$$y=a(x+2)^2+q$$

と表せる．さらに，このグラフは2 点 $(-3,2)$ ，$(0,-1)$ を通るから

$$\begin{cases} 2=a(-3+2)^2+q \\ -1=a(0+2)^2+q \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2=a+q \\ -1=4a+q \end{cases}$$

この連立方程式を解いて， $a=-1$ ， $q=3$ を得る．

よって，求める2 次関数は $y=-(x+2)^2+3$ ，つまり

$$y=-x^2-4x-1$$

■グラフ上の3 点が与えられた場合

この場合は，求める2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおいて考えるとよい．

【例題：グラフ上の3 点が与えられた場合】

グラフが3 点 $A(1,6)$ ， $B(-2,-9)$ ， $C(4,3)$ を通るような2 次関数を求めよ．

【解答】

求める2 次関数を

$$y=ax^2+bx+c$$

とおく．このグラフは，3 点A，B，C を通るから

$$\begin{cases} 6=a\cdot1^2+b\cdot1+c \\ -9=a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c \\ 3=a\cdot4^2+b\cdot4+c \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 6=a+b+c & \cdots① \\ -9=4a-2b+c & \cdots② \\ 3=16a+4b+c & \cdots③ \end{cases}$$

を得る．以下，3 つの文字を含むこの連立方程式を解く．

まず，②－① より， $3a-3b=-15$ ，よって

$$a-b=-5 \quad \cdots\cdot④$$

さらに，③－② より， $12a+6b=12$ ，よって

$$2a+b=2 \quad \cdots\cdot⑤$$

④、⑤の連立方程式を解いて $a=-1$, $b=4$. さらに, これらを①に代入して $c=3$ を得る.
よって, 求める2 次関数は

$$y=-x^2+4x+3$$

2 次関数の決定にあたっては, 未知の2 次関数を

$$y=a(x-p)^2+q$$
$$y=ax^2+bx+c$$
$$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

のうち, どの形で表現するかが重要である. 2 次関数の $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の形については,
§ 2.6 において学ぶ.

2.5.4 2 次関数の最大・最小

■2 次関数の最大・最小

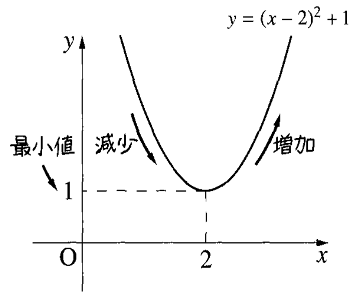
ここでは, グラフを利用して2 次関数の最大値や最小値を求める方法を考えよう.
たとえば, $f(x)=x^2-4x+5$ は

$$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$$

と変形できるので, $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる.
このグラフは, x の増加に対し

「 $x<2$ の範囲では y の値が減少,
$2<x$ の範囲では y の値が増加 」

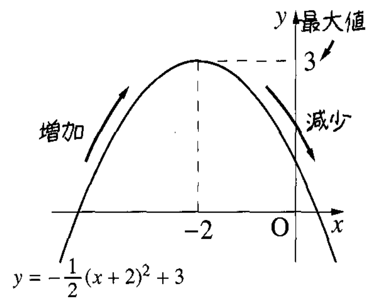
する. そのため, y の値が減少から増加に転じる $x=2$ で,
最小値1 をとる. また, y の値はいくらでも大きくなるので,
最大値は存在しない.



また, $g(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$ は

$$g(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+1=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$$

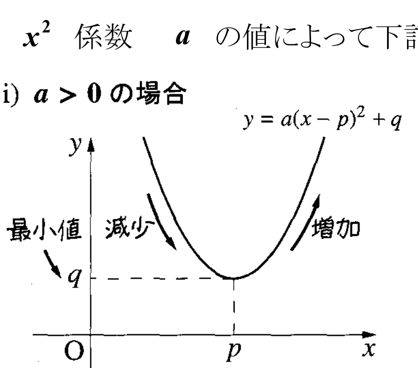
と変形できるので, $y=g(x)$ のグラフは右図のようになる.



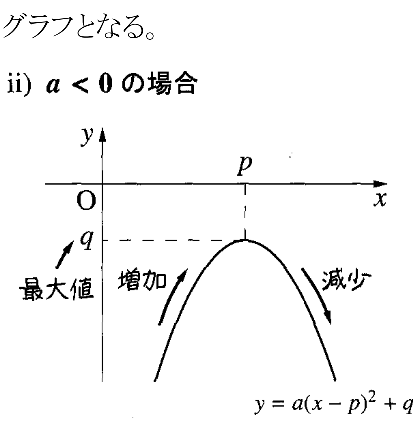
このグラフは, x の増加に対し
「 $x<-2$ の範囲では y の値が増加,
$-2<x$ の範囲では y の値が減少 」
する. そのため, y の値が増加から減少に転じる $x=-2$ で, 最大値3 をとる.
また, y の値はいくらでも小さくなるので, 最小値は存在しない.

x^2 係数 a の値によって下記のようなグラフとなる。

i) $a>0$ の場合



ii) $a<0$ の場合



■定義域が限定された2 次関数の最大・最小

【例題:2 次関数の最大・最小～その1～】

2 次関数　$f(x)=x^2-2x-2$　において，定義域を次の**(1)**～**(5)** としたときの，最大値・最小値をそれぞれ求めよ.

(1)　$-2\leq x\leq 0$　　**(2)**　$-1\leq x\leq 2$　　**(3)**　$0\leq x\leq 2$　　**(4)**　$0\leq x\leq 3$　　**(5) 3 <= x <= 4**

【解答】

平方完成によって　$f(x)=(x-1)^2-3$　と変形できる.

そこで　$y=(x-1)^2-3$　のグラフを，与えられた定義域内で描いて考える.

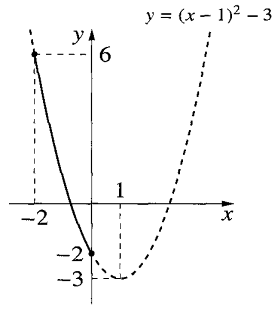
(1) 定義域が　$-2\leq x\leq 0$　の場合，

$y=f(x)$　のグラフは右図の実線部分となるので

最大値　$f(-2)=6$

最小値　$f(0)=-2$

となる.



◀ 放物線は下に凸，頂点は定義域内になく，y の値は定義域内で常に減少している．その結果
y 座標が最も大きいのは定義域の左端であり，
y 座標が最も小さいのは定義域の右端である.

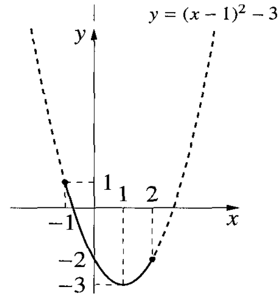
(2) 定義域が　$-1\leq x\leq 2$　の場合，

$y=f(x)$　のグラフは右図の実線部分となるので

最大値　$f(-1)=1$

最小値　$f(1)=-3$

となる.



◀ 頂点は定義域内の右半分にある．その結果
y 座標が最も大きいのは定義域の左端であり，
y 座標が最も小さいのは放物線の頂点である.

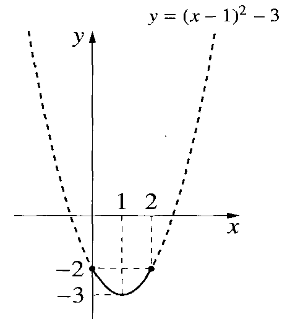
(3) 定義域が　$0\leq x\leq 2$　の場合，

y = f (x) のグラフは右図の実線部分となるので

最大値　$f(2)=f(0)=-2$

最小値　$f(1)=-3$

となる.



◀ 頂点は定義域内のまん中にある．その結果
y 座標が最も大きいのは定義域の両端であり，
y 座標が最も小さいのは放物線の頂点である.

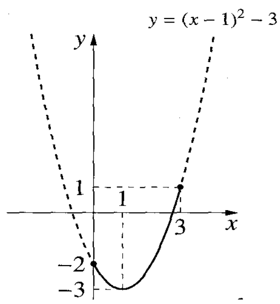
(4) 定義域が　$0\leq x\leq 3$　の場合，

$y=f(x)$　のグラフは右図の実線部分となるので

最大値　$f(3)=1$

最小値　$f(1)=-3$

となる.



◀ 頂点は定義域内の左半分にある．その結果
y 座標が最も大きいのは定義域の右端であり，
y 座標が最も小さいのは放物線の頂点である.

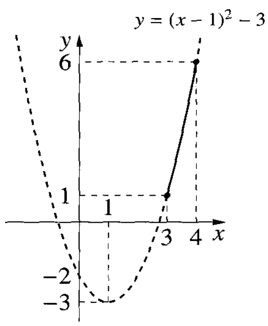
(5) 定義域が　$3\leq x\leq 4$　の場合，

$y=f(x)$　のグラフは右図の実線部分となるので

最大値　$f(4)=6$

最小値　$f(3)=1$

となる.



◀ 頂点は定義域内になく，y の値は定義域内で常に増加している．その結果
y 座標が最も大きいのは定義域の右端であり，
y 座標が最も小さいのは定義域の左端である.

【例題:2 次関数の最大・最小～その2～】

(1)～(4) の全ての**2** 次関数について定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ であるとき，最大値・最小値をそれぞれ求めよ．

(1) $f(x)=x^2+4x-3$ **(2)** $f(x)=-x^2-x-2$

(3) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-3$ **(4)** $f(x)=-3x^2+12x-5$

【解答】

(1) $f(x)$ を平方完成すると

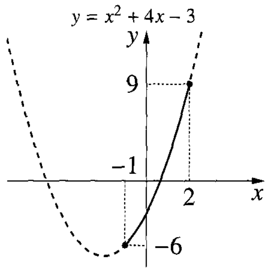
$$f(x)=x^2+4x-3=(x+2)^2-7$$

定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ の場合，

$y=f(x)$ のグラフは右図の実線部分となるので

最大値 $f(2)=9$

最小値 $f(-1)=-6$



◀ 放物線は下に凸，頂点は定義域内になく，y の値は定義域内で常に増加している．その結果
y 座標が最も大きいのは定義域の右端であり，
y 座標が最も小さいのは定義域の左端である．

(2) $f(x)$ を平方完成すると

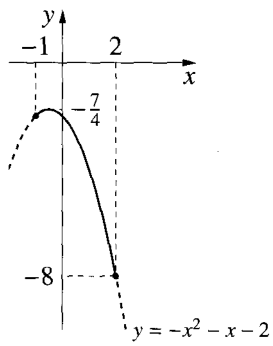
$$f(x)=-x^2-x-2=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$$

定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ の場合，

$y=f(x)$ のグラフは右図の実線部分となるので

最大値 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{4}$

最小値 $f(2)=-8$



◀ 放物線は上に凸，頂点は定義域内の左半分にある．その結果
y 座標が最も大きいのは放物線の頂点であり，
y 座標が最も小さいのは定義域の右端である．

(3) $f(x)$ を平方完成すると

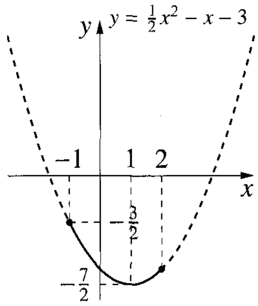
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-3=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{7}{2}$$

定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ の場合，

$y=f(x)$ のグラフは右図の実線部分となるので

最大値 $f(-1)=-\frac{3}{2}$

最小値 $f(1)=-\frac{7}{2}$



◀ 放物線は下に凸，頂点は定義域内の右半分にある．その結果
y 座標が最も大きいのは定義域の左端であり，
y 座標が最も小さいのは放物線の頂点である．

(4) $f(x)$ を平方完成すると

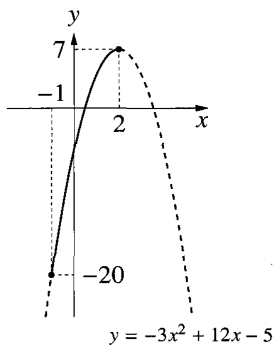
$$f(x)=-3x^2+12x-5=-3(x-2)^2+7$$

定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ の場合，J

$y=f(x)$ のグラフは右図の実線部分となるので

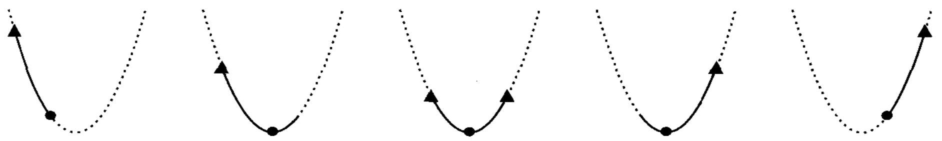
最大値f $(2)=7$

最小値 $f(-1)=-20$



◀ 放物線は上に凸，頂点は定義域の右端にあり，y の値は定義域内で常に増加している．その結果
y 座標が最も大きいのは定義域の右端であり，
y 座標が最も小さいのは定義域の左端である．

定義域が限定された放物線は，最大値・最小値を与えるグラフ上の点に着目すれば，以下の5 種類にまとめられる（ y 座標が最大になる点を，▲最小になる点を●で表している）．



■文字定数を含む2 次関数の最大・最小

【例題:文字定数を含む2 次関数の形の判別】

放物線　$C: y=x^2-4ax+a^2$　（　$-5\leq x\leq 5$　）について以下の問に答えよ.

(1)　C　の軸が定義域より左側にあるための,　a　の範囲を求めよ. また, 定義域内における　C　の最大値, 最小値を求めよ.

(2)　C　の軸が定義域より右側にあるための,　a　の範囲を求めよ. また, 定義域内における　C　の最大値, 最小値を求めよ.

(3)　C　の軸が定義域の中にあるための,　a　の範囲を求めよ. また, この範囲のうち, 定義域の左端で　C　が最大となるような　a　の範囲を求め, このときの　C　の最大値, 最小値を求めよ.

【解答】

$y=x^2-4ax+a^2$　の右辺を平方完成すると

$$y=(x-2a)^2-3a^2$$

となるので, このグラフの軸は　$x=2a$　である.

(1) 放物線の軸　$x=2a$　が定義域の左端　$x=-5$　よりさらに左にあればよい.

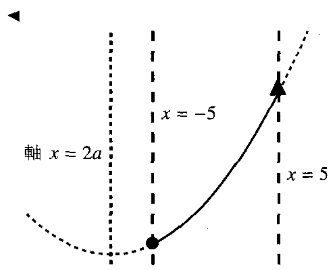
よって,　$2a<-5$　→　$a<-\frac{5}{2}$

y　座標が最大となるのは定義域の右端なので

最大値　$a^2-20a+25$　（　$x=5$　のとき）

y　座標が最小となるのは定義域の左端なので

最小値　$a^2+20a+25$　（　$x=-5$　のとき）



(2) 放物線の軸　$x=2a$　が定義域の右端　$x=5$　よりさらに右にあればよい.

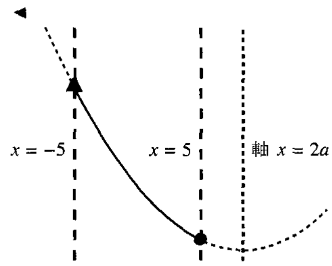
$5<2a$　→　$\frac{5}{2}<a$

y　座標が最大となるのは定義域の左端なので

最大値　$a^2+20a+25$　（　$x=-5$　のとき）

y　座標が最小となるのは定義域の右端なので

最小値　$a^2-20a+25$　（　$x=5$　のとき）



(3) 放物線の軸　$x=2a$　が定義域の中にあるためには

$-5\leq 2a\leq 5$　→　$-\frac{5}{2}\leq a\leq\frac{5}{2}$

さらに, 定義域の左端で　y　座標が最大となるには, 軸が定義域の右半分に存在すればよい. つまり

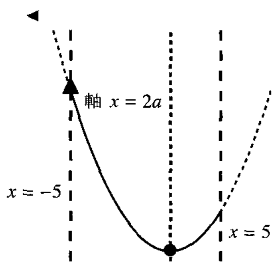
$0\leq 2a\leq 5$　→　$0\leq a\leq\frac{5}{2}$

y　座標が最大となるのは定義域の左端なので

最大値　$a^2+20a+25$　（　$x=-5$　のとき）

y　座標が最小となるのは　C　の頂点なので

最小値　$-3a^2$　（　$x=2a$　のとき）



上の問題において,　$a=0$　のときは定義域の両端で最大値をとる.

【例題:2 次関数の最大・最小(文字定数を含む場合)】

2 次関数 $f(x)=x^2-4x+5$ ($0\leq x\leq a$) について以下の問に答えよ. ただし, $a>0$ とする.

(1) 最小値を求めよ. (2) 最大値を求めよ.

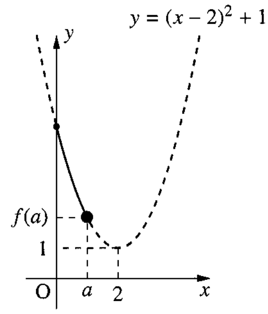
注! a の値を0 から増やしていくとき, グラフの最大値・最小値をとる点がいつ変わるのか
グラフを描いて考えて, 場合分けをしよう.

【解答】

$y=f(x)$ を平方完成して $y=(x-2)^2+1$ となるので, このグラフをもとに問に答える.

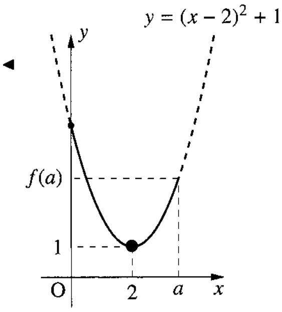
(1) i) $0<a<2$ のとき

$0\leq x\leq a$ におけるこの関数のグラフは, 右欄外の図の放物線の実線部分となる. この定義域内では, 関数の値は減少するから, 最小値は $f(a)=a^2-4a+5$ となる.



ii) $2\leq a$ のとき

$0\leq x\leq a$ におけるこの関数のグラフは, 右欄外の図の放物線の実線部分となる. この場合には, 定義域内に軸 $x=2$ が含まれるから, 最小値は $f(2)=1$ となる.



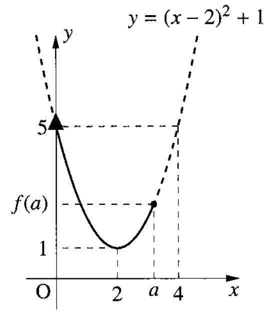
以上i), ii) をまとめると

$0<a<2$ のとき, 最小値 $f(a)=a^2-4a+5$

$2\leq a$ のとき, 最小値 $f(2)=1$

(2) i) $0<a<4$ のとき

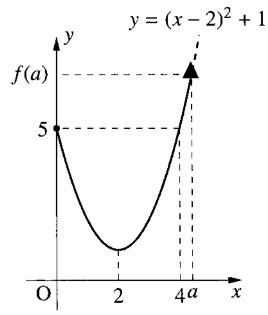
$0\leq x\leq a$ におけるこの関数のグラフは, 右欄外の図の放物線の実線部分となる. この場合には, 定義域の両端のy 座標を比べると, 左端の方が大きい. よって, 最大値は $f(0)=5$ となる.



ii) $4\leq a$ のとき

$0\leq x\leq a$ におけるこの関数のグラフは, 右欄外の図の放物線の実線部分となる. この場合には, 定義域の両端の y 座標を比べると, 右端の方が大きい.

よって, 最大値は $f(a)=a^2-4a+5$ となる.



以上i), ii) をまとめると

$0<a<4$ のとき, 最大値 $f(0)=5$

$4\leq a$ のとき, 最大値 $f(a)=a^2-4a+5$

■2 次関数の最大･最小の応用

2 次関数の知識を利用して, 現実にあるさまざまな問題を解くことができる.

【例題:2 次関数の応用】

(1) 長さ20 cm の針金を2 つに切り, それぞれの針金で正方形を作るとき, それらの面積の和の最小値を求めよ. また, そのとき針金は何cm ずつに切り分けられているか求めよ.

(2) ある品物の売価が1 個120 円のときには, 1 日の売上個数は400 個であるという. 売価を1 個につき 1 円値上げするごとに, 1 日の売上個数は2 個ずつ減るという. 1 日の売上金額を最大にするには, 売価をいくらに設定すればよいか求めよ.

【解答】

(1) 20 cm の針金を, $4x$ cm と $(20-4x)$ cm に切り分けたとする. ただし, $0<x<5$ とする. それぞれの針金から作られる正方形の面積は

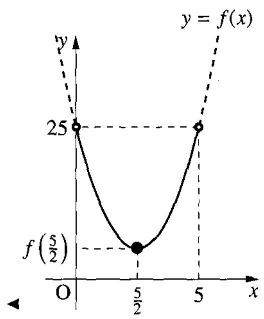
$$\frac{4x}{4}\times\frac{4x}{4}=x\times x$$
$$\frac{20-4x}{4}\times\frac{20-4x}{4}=(5-x)\times(5-x)$$

となるから, これら2 つの正方形の面積の和を $f(x)$ (cm^2)とすると

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+(5-x)^2\\ &=x^2+25-10x+x^2\\ &=2x^2-10x+25 \end{aligned}$$

となる. ここで, $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x)&=2\left\{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right\}+25\\ &=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2} \end{aligned}$$



と変形できるから, $y=f(x)$ のグラフは $0<x<5$ で右図のようになる.

これより最小値は $f\left(\frac{5}{2}\right)$ であるから,

面積の和の最小値は $\frac{25}{2}$ cm^2

であり, $x=\frac{5}{2}$ のとき最小値となるのだから, 針金は $4x=10\,cm$ と $20-4x=20-10=10\,cm$ ずつに切り分けられる.

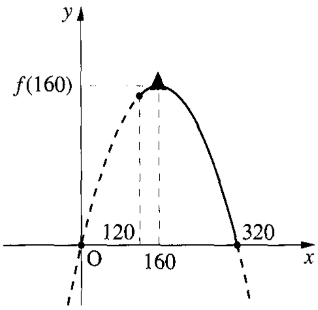
(2) 売価を1 個 x 円($120\leq x\leq 320$)とすると, 120 円より ($x-120$) 円値上げしたことになる. その結果, 1 日の売上個数は, $2(x-120)$ 個減る. よって, 1 日の売上金額 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x)&=x\{400-2(x-120)\}\\ &=x(640-2x)\\ &=-2x^2+640x \end{aligned}$$

となる. ここで, $f(x)$ は

$$f(x)=-2(x^2-320x)$$
$$=-2\{(x-160)^2-25600\}$$
$$=-2(x-160)^2+51200$$

と変形できるから, $y=f(x)$ のグラフは $120\leq x\leq 320$ で右図のようになる. これより, 最大値は $f(160)$ をとるには, $x=160$.つまり, 売価を 160 円にすればよい.



【別解】

売価を x 円値上げしたとすると、売価は $(120+x)$ 円であり、売上げ個数は $(400-2x)$ 個となる。
従って、売上金額 $f(x)$ は、

$$f(x)=(120+x)(400-2x)$$
$$=120\times400+400x-2\times120\times x-2x^2$$
$$=-2x^2-160x+48000$$
$$=-2(x-40)^2+20\times160+480000=-2(x-40)^2+51200$$

$x=40$ 円の値上げのとき、売上げが最大値 51200 円となるから、売価は $120+40=160$ 円とすればよい。

【例題:条件をもつ2 次関数の最大・最小】

$0\leq x$, $0\leq y$, $2x+y=10$ のとき, x^2+y^2-3 の最大値・最小値と, そのときの x, y を求めよ.

【解答】

$2x+y=10$ を y について解けば $y=10-2x$. これを $0\leq y$ に代入すれば

$$0\leq y\ ,\ 0\leq 10-2x \ \rightarrow\ x\leq 5$$

であり, さらに, x^2+y^2-3 に代入すれば

$$x^2+y^2-3=x^2+(10-2x)^2-3$$
$$=5x^2-40x+97$$

である. つまり, $0\leq x\leq 5$ のときに, 2 次関数

$$5x^2-40x+97$$

の最大・最小を求めればよい. この2 次関数を $f(x)$ とおいて平方完成すると

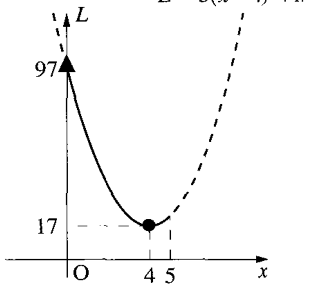
$$f(x)=5(x-4)^2+17$$

そこでグラフ $L=f(x)(0\leq x\leq 5)$ を描けば, 右図のようになり, $f(x)$ の最大値は $f(0)=97$, 最小値は $f(4)=17$ とわかる.

$x=0$ のとき $y=10$, $x=4$ のとき $y=2$ であるから, 答えは次のようになる.

$(x,y)=(0,10)$ のとき最大値 97

$(x,y)=(4,2)$ のとき最小値 17



【例題：式の一部を文字でおく】

関数　$y=(x^2-2x)^2+4x^2-8x+5$　について以下の問に答えよ.

(1)　$t=x^2-2x$　とするとき，t の値のとりうる範囲を求めよ.

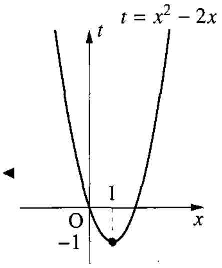
(2)　y の値のとりうる範囲を求めよ.

【解答】

(1) 平方完成によって

$$t=(x-1)^2-1$$

であるので，右図より　$t \geq -1$

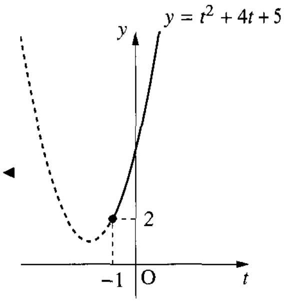


(2)　y を t で表し平方完成すれば

$$\begin{aligned} y&=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)+5 \\ &=t^2+4t+5 \\ &=(t+2)^2+1 \end{aligned}$$

となる. **(1)** より　$-1 \leq t$　であるので，t に対する y のグラフは右図のようになる. つまり，

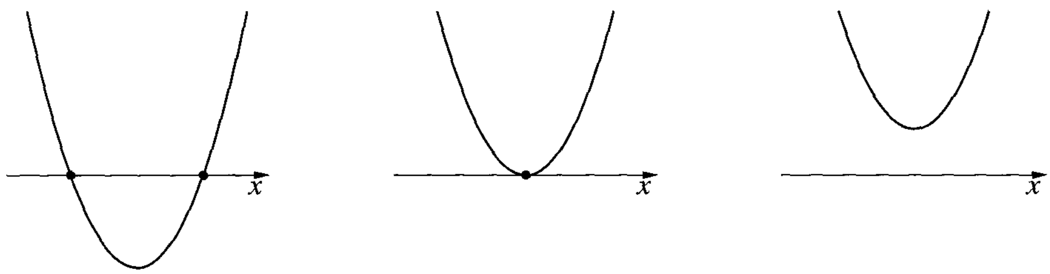
$$y \geq 2$$



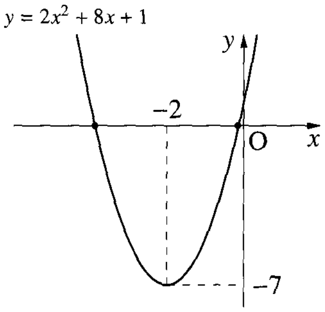
2.5.5　放物線と x 軸の位置関係ー 判別式 D

放物線と x 軸との位置関係については，次の3 つのパターンに分けられる. ただし，グラフは下に凸な場合のものである.

i) x 軸と 2 つの共有点をもつ　ii) x 軸と 1 つの共有点をもつ　iii) x 軸と共有点をもたない



例えば、放物線　$y=2x^2+8x+1$　は平方完成によって、



$$\begin{aligned} y&=2x^2+8x+1 \\ &=2(x^2+4x)+1 \\ &=2\{(x+2)^2-4\}+1 \\ &=2(x+2)^2-7 \end{aligned}$$

となり，頂点の座標は $(-2,-7)$ とわかる. 特に，頂点の　y　座標は負であるから，グラフは右上図のようになり，上のパターン**i)** であることがわかる.

このように，2 次関数が与えられたとき，頂点の y 座標の符号を調べれば，グラフがこの **3** つのパターンのうちどれに属するかを知ることができる.

では，一般の放物線　$y=ax^2+bx+c$　$(a,0)$　について考えてみよう. 平方完成は

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

となる. そして $\boldsymbol{a>0}$ の場合は, この頂点の$\boldsymbol{y}$ 座標の値 $-\dfrac{\boldsymbol{b^2-4ac}}{\boldsymbol{2a}}$ の負$\cdot$**0**$\cdot$正が上の

パターン**i)$\cdot$ii)$\cdot$iii)** と対応している.

$$-\frac{\boldsymbol{b^2-4ac}}{\boldsymbol{2a}}$$

の符号は, 分子の $\boldsymbol{b^2-4ac}$ と分母にある $\boldsymbol{a}$ の符号がわかれば確定する. そこで, 分子に表れる $\boldsymbol{b^2-4ac}$ という式を判別式(**discriminant**) とよび, $\boldsymbol{D}$ であらわす.

判別式 D の定義

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において, $b^2 - 4ac$ を判別式 D とよぶ. つまり

$$D = b^2 - 4ac$$

とする.

いま, この判別式D の符号に着目して放物線と $\boldsymbol{x}$ 軸との位置関係を調べると, 次のようにまとめることができる。

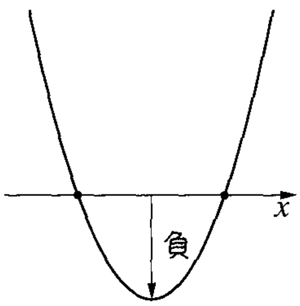
$a > 0$ の場合

i) **$D > 0$ のとき**

頂点の y 座標は

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(正)}{(正)}$$

より, 負となるので, 放物線は下の図のようになる.



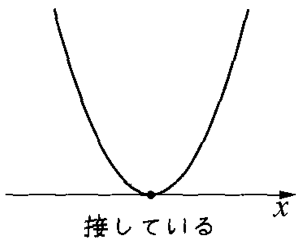
x 軸との共有点は「2 つ」

ii) **$D = 0$ のとき**

頂点の y 座標は

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{0}{(正)}$$

より, 0 となるので, 放物線は下の図のようになる.



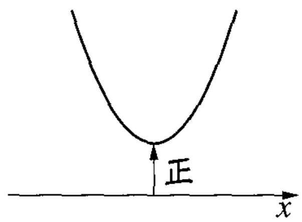
x 軸との共有点は「1 つ」
放物線の頂点が共有点

iii) **$D < 0$ のとき**

頂点の y 座標は

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(負)}{(正)}$$

より, 正となるので, 放物線は下の図のようになる.



x 軸との共有点は「ない」

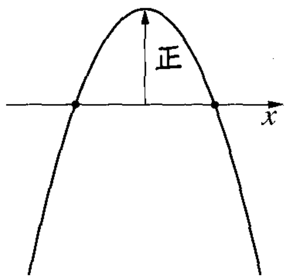
$a < 0$ の場合

i) **$D > 0$ のとき**

頂点の y 座標は

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(\text{正})}{(\text{負})}$$

より，正となるので，放物線は下の図のようになる．



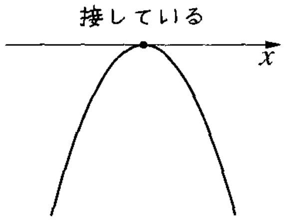
x 軸との共有点は「2 つ」

ii) **$D = 0$ のとき**

頂点の y 座標は

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{0}{(\text{負})}$$

より，0 となるので，放物線は下の図のようになる．



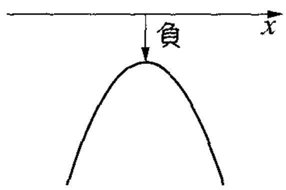
x 軸との共有点は「1 つ」
放物線の頂点が共有点

iii) **$D < 0$ のとき**

頂点の y 座標は

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(\text{負})}{(\text{負})}$$

より，負となるので，放物線は下の図のようになる．



x 軸との共有点は「ない」

以上の結果について， x 軸との共有点の数だけに着目すれば， a の正負によらず次のようにまとめられる．

判別式 D と放物線の関係

2 次関数 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ の判別式を $D = b^2 - 4ac$ とする．

i) **$D > 0$ のとき**
放物線 $y = f(x)$ は x 軸と「2 つの共有点をもつ」

ii) **$D = 0$ のとき**
放物線 $y = f(x)$ は x 軸と「1 つの共有点をもつ」
このとき，この放物線 $y = f(x)$ は x と**接する** (contact) といい，この共有点のことを，特に，**接点** (point of contact) という．
この接点の座標は，放物線の頂点に等しく，$\left(-\dfrac{b}{2a},\ 0\right)$ である．

iii) **$D < 0$ のとき**
放物線 $y = f(x)$ は x 軸と「共有点をもたない」

【例題： x 軸との共有点の個数の判別】

2 次関数 $\boldsymbol{y = x^2 - (k-1)x + \frac{1}{4}k^2 + k + 1}$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか調べよ．

【解答】

2 次関数 $y=x^2-(k-1)x+\frac{1}{4}k^2+k+1$ の判別式を D とすると

$$D=(k-1)^2-4\left(\frac{1}{4}k^2+k+1\right)$$
$$=k^2-2k+1-k^2-4k-4=-6k-3$$

(i) $-6k-3>0$, つまり $k<-\frac{1}{2}$ のとき

$D>0$ となり, グラフは x 軸と異なる2 点で交わる.

(ii) $-6k-3=0$, つまり $k=-\frac{1}{2}$ のとき

$D=0$ となり, グラフは x 軸と接する.

(iii) $-6k-3<0$, つまり $k>-\frac{1}{2}$ のとき

$D<0$ となり, グラフは x 軸と共有点をもたない.

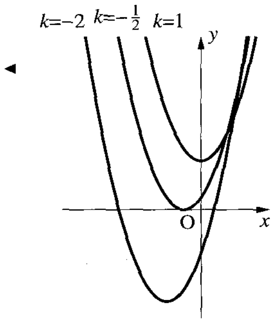
以上 $(i)\sim(iii)$ より, 共有点の個数は次のようになる.

$k<\frac{1}{2}$ のとき 2 個

$k=-\frac{1}{2}$ のとき 1 個

$k>-\frac{1}{2}$ のとき 0 個

k の値によるグラフの変化



§ 2.6　2 次方程式と2 次関数

2 次関数　$y=ax^2+bx+c$　が与えられたとき，このグラフと2 次方程式　$a^2+bx+c=0$　の間には密接な関係がある．ここではまず2 次方程式の解法について復習し，その解が2 次関数とどのような関係にあるか考えていく．

2.6.1　2 次方程式とは

$a\neq 0$　，　b　，　c　を定数として

$$ax^2+bx+c=0$$

という形で表すことのできる方程式を**2 次方程式(quadratic equation)** という．
与えられた2 次方程式を満たす　x　の値を求めることを，その2 次方程式を解くといい，
その　x　の値を，その2 次方程式の解とよぶ．

2.6.2　2 次方程式の解法

■因数分解を利用した解法

2 次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の左辺が因数分解できる場合には，実数　A，B　についての積の性質

$$AB=0 \quad \rightarrow \quad A=0 \text{　または　} B=0$$

をもちいて，次の例のように解くことができる．なお，「または」はカンマ「，」で代用されることがある．
ここでいう「　$A=0$　または　$B=0$　」とは　$A=0$　か　$B=0$　の一方でも成り立てばよい（両方でもよい）という意味である．通常の会話における「または」は，「どちらかが正しく，残りは間違い」の意味であることが多い．しかし，数学における「または」は「少なくともどちらかが正しい（両方とも正しい場合を含む）」の意味で使われる．「または」の扱いについては，数学A において詳しく学ぶ．

【暗記：2 次方程式の解法（因数分解の利用）】

2 次方程式 $3x^2+2x-8=0$ を，因数分解を使って解くことを考えよう．
左辺を因数分解すると，2 次方程式は

$$\left(x+\boxed{\text{ア}}\right)\left(\boxed{\text{イ}}x-\boxed{\text{ウ}}\right)=0$$

と変形できる．
一般に，実数 A，B について

$$AB=0 \iff A=0 \text{ または } B=0$$

が成り立つから，$A=x+\boxed{\text{ア}}$，$B=\boxed{\text{イ}}x-\boxed{\text{ウ}}$ と考えれば

$$x+\boxed{\text{ア}}=0 \text{ または } \boxed{\text{イ}}x-\boxed{\text{ウ}}=0$$

が成り立つ．
この 2 つの式は，1 次方程式であり，それぞれ解くと

$$x=-\boxed{\text{エ}}，\ x=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

となり，これが 2 次方程式の解である．

【解答】

ア= **2**,　イ= **3**,　ウ= **4**,　エ= **2**,　オ= **4**,　カ= **3**

【例題:2次方程式を解く(因数分解の利用)】

次の2 次方程式を解け.

(1) $x^2-2x-15=0$　　**(2)** $x^2-8x+16=0$　　**(3)** $12x^2-17x+6=0$

(4) $3x^2+2x-3=-2x+1$　　**(5)** $\frac{1}{9}x^2+x+2=0$

【解答】

(1) 左辺を因数分解して

$(x+3)(x-5)=0$　→　$x=-3,5$

(2) 左辺を因数分解して

$(x-4)^2=0$　→　$x=4$

(3) 左辺を因数分解して

$(4x-3)(3x-2)=0$　→　$x=\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$

(4) まず, 式を整理すると $3x^2+4x-4=0$ となるので, 左辺を因数分解して

$(x+2)(3x-2)=0$　→　$x=-2$, 2

(5) 両辺を**9** 倍すると $x^2+9x+18=0$ となるので, 左辺を因数分解して

$(x+6)(x+3)=0$　→　$x=-6$, -3

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の左辺が因数分解できる場合はこの解法で解こう.
因数分解の訓練にもなるし, 複雑な計算なしに解くことができる.

■2 次方程式の解の公式による解法

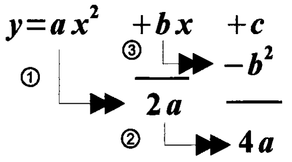
2 次方程式 $(x+2)^2=7$ は以下のように解くことができる.

$(x+2)^2=7$　←　$x+2$ は 2 乗して7 になる
$x+2=\pm\sqrt{7}$　←　つまり, $x+2=\sqrt{7}$ または、 $x+2=-\sqrt{7}$
$x=-2\pm\sqrt{7}$　←　つまり, $x=-2+\sqrt{7}$ または、 $x=-2-\sqrt{7}$

一般に, $(x+p)^2=q$ の形 $(q=0)$ の2 次方程式は, 上のようにして解くことができる.
つまり, 一般の2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ も, $(x+p)^2=q$ の形に変形できれば解ける.
では, どのように変形すれば $(x+p)^2=q$ という形になるのだろうか. それには, すでに学習した方法である『平方完成』を使う.

一般形の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を平方完成する方法は、先に紹介した間違いのない平方完成の方法を利用しよう。

$y=ax^2+bx+c$ の平方完成の方法



$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{-b^2}{4a}\right)+c$$

手順① : x^2 の係数を2倍して bx の下段に記載
手順② : ①の結果を更に2倍して c の下段に記載
手順③ : b を2乗してマイナスを付けて c の下に記載

①から③の記入が終了したら、最下段のように、平方完成する。

このように平方完成すると、2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　は以下のようにして、解が得られる。

$$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\left(-\frac{b^2}{4a}\right)+c$$

$$=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}=\frac{\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ただし、　$D=\sqrt{b^2-4ac}\geq 0$　のとき、

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　を2次方程式の解の公式と呼ぶ。

【例題:2 次方程式を解く(解の公式の利用)】

次の2 次方程式を解け.

(1)　$x^2+7x+2=0$　　**(2)**　$x^2+8x-3=0$

(3)　$x^2-x-3=0$　　**(4)**　$x^2-4x+5=0$

(5)　$4x^2+6x+1=0$　　**(6)**　$\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}=0$

【解答】

(1)　解の公式より

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{-7\pm\sqrt{41}}{2}$$

(2)　解の公式より

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\frac{-8\pm2\sqrt{19}}{2}=-4\pm\sqrt{19}$$

(3)　解の公式より

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

(4)　解の公式より

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$\sqrt{-4}$　は　$D<0$　ゆえ、解なし

(5) 解の公式より

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}=\frac{-6\pm2\sqrt{5}}{8}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$$

(6) 方程式の両辺に**6** を掛けて整理すると

$$x^2+3x-2=0$$

解の公式より

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$

解の公式は暗記して，正確に使いこなせるようにしよう.

■ x の係数が偶数の場合の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において b が偶数の場合を考えてみよう. $b=2b'$ とおいて, $ax^2+2b'x+c=0$ に解の公式を使うと次のようになる.

具体的な2 次方程式

$$x^2+8x+3=0$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot3}}{2}$$

$$=\frac{-8\pm\sqrt{64-12}}{2}$$

$$=\frac{-8\pm2\sqrt{13}}{2}$$

$$=-4\pm\sqrt{13}$$

一般の2 次方程式

$$ax^2+2b'x+c=0$$

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

$$x=\sqrt{2}\pm\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2-1\cdot(-1)}=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$$

このように, x の係数が偶数の場合には，計算の最後で**2** で約分する必要があるので，解の公式を別に用意して，この手間をはじめから回避してしまおう.

x の係数が偶数の場合の解の公式

> $D\geqq0$ のとき，2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は
>
> $$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$
>
> である（ $D<0$ のときは解は存在しない）.

2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式 D は $D=(2b')^2-4ac=4(b'^2-ac)$ となるので, D の符号だけ判断したいときには, $D/4=b'2-ac$ を考えると計算が少し楽になる.

【例題:2 次方程式を解く(解の公式の利用・ x の係数が偶数の場合)】

次の**2** 次方程式を解け.

(1) $x^2-6x+4=0$　　**(2)** $\sqrt{2}x^2-4x-\sqrt{2}=0$

(3) $2(2-\sqrt{3})x^2+2(1-\sqrt{3})x+1=0$

【解答】

(1) x の係数が偶数の場合の解の公式より

$$x^2-6x+4=0 \quad\rightarrow\quad x=3\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot4}=3\pm\sqrt{5}$$

◀ $ax^2+2b'x+c=0$ の解 $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

(2) 方程式の両辺に $\sqrt{2}$ を掛けて整理すると

$$2x^2-4\sqrt{2}x-2=0 \quad \rightarrow \quad x^2-2\sqrt{2}x-1=0$$

x の係数が偶数の場合の解の公式より

$$x=\sqrt{2}\pm\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2-1\cdot(-1)}=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$$

(3) 方程式の両辺に $2+\sqrt{3}$ を掛けて整理すると

$$2(4-3)x^2+2(-1-\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}=0$$

$$\rightarrow \quad 2x^2-2(1+\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}=0$$

x の係数が偶数の場合の解の公式より

$$x=\frac{(1+\sqrt{3})\pm\sqrt{\left\{-(1+\sqrt{3})\right\}^2-2\cdot(2+\sqrt{3})}}{2}$$

$$\rightarrow \quad =\frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{4+2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

■2 次方程式の解の個数

解自体ではなく解の個数だけならば，判別式D を調べればよい．

2 次方程式の判別式と解の個数

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解について

i) $D=b^2-4ac>0$ のとき，解は 2 つ存在する．

ii) $D=b^2-4ac=0$ のとき，解は 1 つ存在する．

　このただ 1 つの解は**重解** (multiple solution) とよばれる．

iii) $D=b^2-4ac<0$ のとき，解は存在しない．

$D=0$ のとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b+\sqrt{0}}{2a}$ ， $x=\dfrac{-b-\sqrt{0}}{2a}$

であり，どちらも $x=\dfrac{-b}{2a}$ に等しい・本来2つあるはずの値が等しくなり，解が重なってしまったので，その解を重解とよぶのである．

【例題:2 次方程式の解の個数の判別】

2 次方程式 $x^2-(k-1)x+\dfrac{1}{4}k^2+k+1=0$ の解の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか調べよ．

【解答】

2 次方程式 $x^2-(k-1)x+\dfrac{1}{4}k^2+k+1=0$ の判別式を D とすると

$$D=\left\{-(k-1)\right\}^2-4\cdot1\cdot\left(\frac{1}{4}k^2+k+1\right)$$

$$=k^2-2k+1-k^2-4k-4=-6k-3$$

i) $-6k-3>0$ ，つまり $k<-\dfrac{1}{2}$ のとき、

$D>0$ となり，方程式の解は2 つ存在する.

ii) $-6k-3=0$ ，つまり $k=-\dfrac{1}{2}$ のとき

$D=0$ となり，方程式の解は1 つ存在する.

iii) $-6k-3<0$ ，つまり $k>-\dfrac{1}{2}$ のとき

$D<0$ となり，方程式の解は存在しない.

以上i)〜iii) より，解の個数は次のようになる.

$k<-\dfrac{1}{2}$ のとき 2 個， $k=-\dfrac{1}{2}$ のとき 1 個， $k>-\dfrac{1}{2}$ のとき0 個

【例題:2 次方程式の解の個数の判別（x の係数が偶数の場合）】

2 次方程式 $3x^2-2(m+1)x+\dfrac{1}{3}m^2+m=0$ の解の個数は，定数 m の値によってどのように変わるか調べよ.

【解答】

2 次方程式 $3x^2-2(m+1)x+\dfrac{1}{3}m^2+m=0$ の判別式をD とすると

$$\frac{D}{4}=\{-(m+1)\}^2-3\cdot\left(\frac{1}{3}m^2+m\right)$$

i) $-m+1>0$ ，つまり $m<1$ のとき

$\dfrac{D}{4}>0$ となり，方程式の解は2 つ存在する.

ii) $-m+1=0$ ，つまり $m=1$ のとき

$\dfrac{D}{4}=0$ となり，方程式の解は1 つ存在する.

iii) $-m+1<0$ ，つまり $m>1$ のとき

$\dfrac{D}{4}<0$ となり，方程式の解は存在しない.

以上i)〜iii) より，解の個数は次のようになる.

$m<1$ のとき2 個， $m=1$ のとき1 個， $m>1$ のとき0 個

■2 次方程式の解と因数分解

ここまで，2 次方程式の解法が2 つあることをみてきたが，その2 つを見比べてみよう.

i) 因数分解を利用した解法

$$x^2-3x-18=0 \quad\rightarrow\quad (x-6)(x+3)=0 \quad\rightarrow\quad x=6,-3$$

ii) 解の公式を用いた解法

$x^2-5x-3=0$ → 方程式の解は $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

i) の因数分解に対応させて， x^2-5x-3 の因数分解

$$x^2-5x-3=\left(x-\frac{5+\sqrt{37}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)\quad\cdots①$$

が予想できる. そこで，①の右辺を展開してみると

$$\left(x-\frac{5+\sqrt{37}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)=x^2-\left(\frac{5+\sqrt{37}}{2}+\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)x+\left(\frac{5+\sqrt{37}}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)$$
$$=x^2-\frac{5+\cancel{\sqrt{37}}+5-\cancel{\sqrt{37}}}{2}x+\frac{(5+\sqrt{37})(5-\sqrt{37})}{2\cdot 2}$$
$$=x^2-5x-3$$

となり，①の式の左辺と一致している．つまり，①の因数分解は正しい．

一般に, 2 解 α ， β をもつ2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の左辺は，$(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できる．
すなわち， $x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ が成立する．
ここで

$$x^2+ax+b=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

の係数を比較すると, 次のようになる．

解と係数の関係

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ に 2 解 α，β が存在するとき

$\alpha+\beta=-a$ ， $\alpha\beta=b$

が成立する．

なお, 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2 解が α ， β の場合には, この方程式全体を a で
割ることによって， $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ としてから考えればよい．
つまり， $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ， $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ となる．

【例題：解と係数の関係】

2 次方程式 $2x^2+ax+b=0$ の2 解が $x=\frac{1}{2}$ ， -1 であったとき， a， b を求めよ．

【解答】

$2x^2+ax+b=0$ の両辺を2 で割って， $x^2+\frac{a}{2}x+\frac{b}{2}=0$ となる．

この2 次方程式の2 解が $x=\frac{1}{2},-1$ になるので

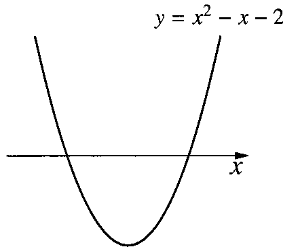
$$\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{a}{2} \quad , \quad \frac{1}{2}\times(-1)=\frac{b}{2}$$

これより， $a=1,b=-1$ である

2.6.3 2 次方程式と2 次関数の関係

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ において, 2 次関数の判別式 $D=b^2-4ac$ が 0 以上であれば，
放物線 $y=f(x)$ が x 軸と共有点をもつ．
このとき,「共有点の x 座標」を求めることを考えてみよう．
たとえば, 2 次関数 $f(x)=x^2-x-2$ について, 放物線 $y=f(x)$ と x 軸の共有点の座標
を求めてみよう．

$y=f(x)=x^2-x-2$ における判別式 D の値は

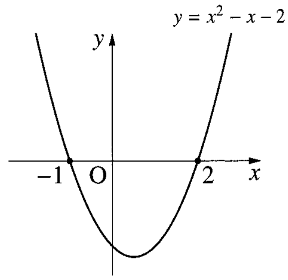


$$D=1^2-4\times1\times(-2)=9>0$$

と計算できるので, $y=f(x)$ のグラフは x 軸と2 つの共有点をもつのがわかる.
このグラフによる x 軸との共有点の y 座標は 0 である.
よって, 共有点の x 座標は

$$x^2-x-2=0$$

という2 次方程式の解である. この方程式の解は, 左辺を因数分解することにより



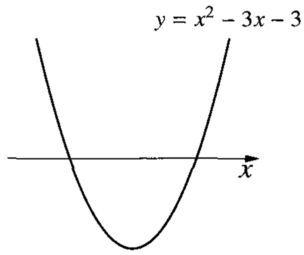
$$(x+1)(x-2)=0$$
$\rightarrow$ $x+1=0$ または $x-2=0$
$\rightarrow$ $x=-1$ または $x=2$

と求めることができる.
つまり, $y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は -1 と 2 である.

【暗記 : 2 次関数から 2 次方程式を考える】

2 次関数 $f(x) = x^2 - 3x - 3$ について，放物線 $y = f(x)$ と x 軸の共有点の座標を求めたい．次の空欄に適当な数字を入れよ．

$y = f(x) = x^2 - 3x - 3$ における判別式 D の値は

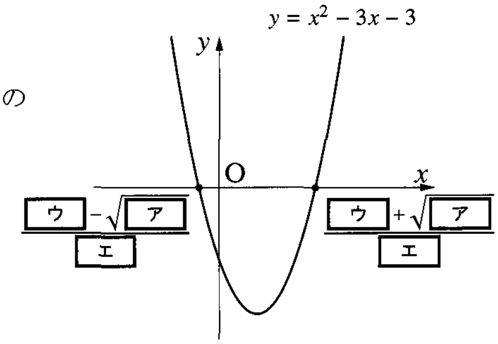


$D =$ (計算省略) $= \boxed{\text{ア}} > 0$

と計算できるので，$y = f(x)$ のグラフは x 軸と 2 つの共有点をもつのがわかる．
このグラフによる x 軸との共有点の y 座標は $\boxed{\text{イ}}$ である．よって，共有点の x 座標は

$x^2 - 3x - 3 = \boxed{\text{イ}}$

という 2 次方程式の解である．
この式は簡単には因数分解できないので，解の公式 (p.102 参照) を用いて解を求める．



$x =$ (計算省略)

$$= \frac{\boxed{\text{ウ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

すなわち，$y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は

$\dfrac{\boxed{\text{ウ}} - \sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

【解答】

ア$=\mathbf{21}$, イ$=\mathbf{0}$, ウ$=\mathbf{3}$, エ$=\mathbf{2}$

放物線と x 軸との共有点

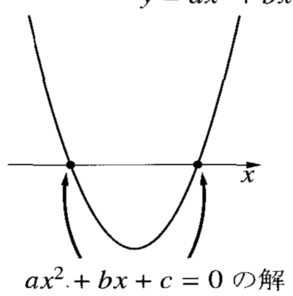
判別式 D が 0 以上である 2 次関数

$y = ax^2 + bx + c$

のグラフと x 軸 ($y = 0$) との共有点の x 座標は 2 次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$

の解である.



【例題:放物線と x 軸との共有点を調べる】

次の放物線の, x 軸との共有点の数を調べよ. また, x 軸との共有点があれば, その共有点の座標を求めよ.

(1) $y=x^2-x-1$　　**(2)** $y=-4x^2+4x-1$　　**(3)** $y=x^2-x+1$

【解答】

(1) 判別式を D とすると

$$D=(-1)^2-4(-1)=5>0$$

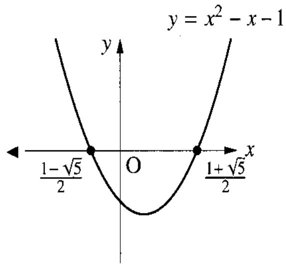
なので, x 軸と**2** つの共有点をもつ. また

$$x^2-x-1=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

だから, このグラフと x 軸の共有点の座標は

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},0\right)$$

となる.



(2) 判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-(-4)(-1)=0$$

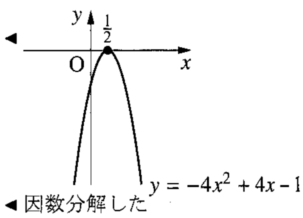
◀または $D = 4^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-1) = 0$

なので, x 軸と**1** つの共有点をもつ(接する). また

$$-4x^2+4x-1=0 \quad \rightarrow \quad 4x^2-4x+1=0$$

$$\rightarrow \quad (2x-1)^2=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

◀因数分解した

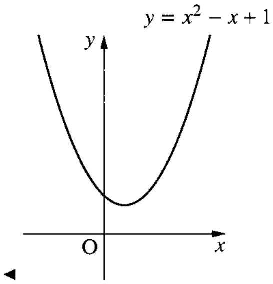


だから, このグラフと x 軸の共有点の座標は $\left(\frac{1}{2},0\right)$ となる.

(3) 判別式を D とすると

$$D=(-1)^2-4=-3<0$$

なので, x 軸と共有点をもたない.



【例題: x 軸と接するための条件】

2 次関数 $y=4x^2+2(k-1)x-k+4$ のグラフが x 軸と接するように, 定数 k の値を定めよ.

【解答】

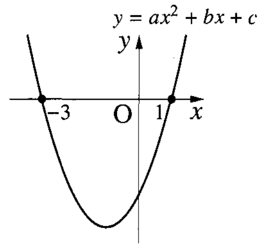
2 次関数 $y=4x^2+2(k-1)x-k+4$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(k-1)^2-4(-k+4)\\&=k^2-2k+1+4k-16\\&=k^2+2k-15\end{aligned}$$

放物線が x 軸と接するのは $D=0$ のときであるから

$$k^2+2k-15=0 \quad \rightarrow \quad (k+5)(k-3)=0 \qquad \therefore \quad k=-5,3$$

『**2 次関数の決定**』において, x 軸との共有点がわかっている場合を考えてみよう.



放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との交点の x 座標が -3, 1

であったとする.
このとき, $ax^2+bx+c=0$ の解も -3, 1 である.

さらに,「方程式 $ax^2+bx+c=0$ 」と「方程式 $(x+3)(x-1)=0$ 」
は一致している. x^2 の係数をあわせて, $ax^2+bx+c=a(x+3)(x-1)$ とわかる.

【例題:2 次関数の決定(x 軸との交点の座標が与えられた場合)】

グラフと x 軸との交点の座標が $(-1,0)$, $(2,0)$ であり, 点 $(1,-2)$ を通る2 次関数の式を求めよ.

【解答】

x 軸との交点の x 座標が -1, 2 なので, 求める2 次関数は
$y=a(x+1)(x-2)$ ・・・①
とおける.
また, この2 次関数は $(1,-2)$ を通るので, ①より
$-2=a(1+1)(1-2)$
を得る. これより, $a=1$ となるので, 求める2 次関数は
$y=(x+1)(x-2)$ つまり $y=x^2-x-2$ となる.

■2 次方程式から2 次関数を考える

次は, 2 次関数から2 次方程式を考えてみよう.「放物線と x 軸との共有点」を逆に考えれば, 次のことがわかる.

2 次方程式の解をグラフに表す

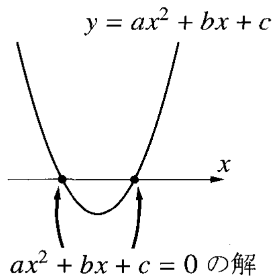
判別式 D が 0 以上である 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

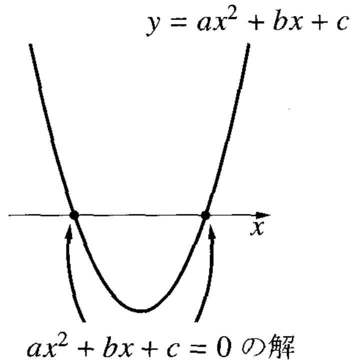
の解は, 2 次関数

$$y=ax^2+bx+c$$

のグラフと x 軸との「共有点の x 座標」に表れる.



「2次方程式の解」と「2次関数のグラフと x 軸との共有点の x 座標」の対応



2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

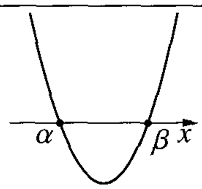
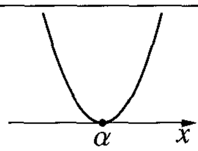
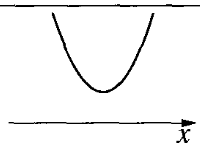
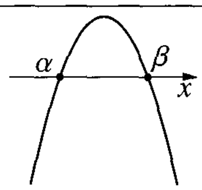
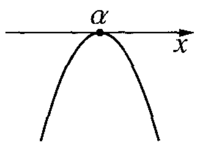
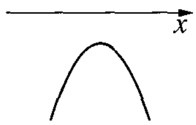
の解は，この式の左辺を y とおいた

2次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

のグラフと x 軸との交点の x 座標と一致する．

判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号と，2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸との位置関係，および2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の個数について，次のようにまとめられる．

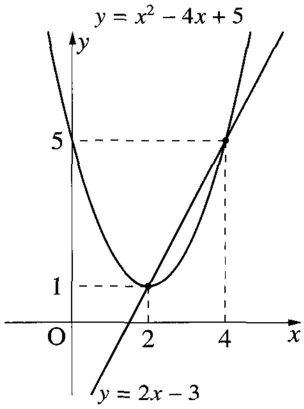
判別式 D の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ（$a > 0$ のとき）			
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ（$a < 0$ のとき）			
$ax^2 + bx + c = 0$ の解	2解 α, β	重解 α	なし

2.6.4　連立方程式と関数

■曲線の交点

放物線　$y=x^2-4x+5$　と直線　$y=2x-3$　の交点の座標　(x,y)　は

$$y=x^2-4x+5 \quad \cdots ①$$
$$y=2x-3 \quad \cdots ②$$



を同時に満たす　(x,y)　であり，連立方程式①　、②を解けば求められる.

①を②の左辺に代入してこれを解くと

$$x^2-4x+5=2x-3 \quad \to \quad x^2-6x+8=0 \qquad \therefore \quad x=2,4$$

となる. そこで　y　を求めれば

$x=2$　のとき②より　$y=1$

$x=4$　のとき②より　$y=5$

であるので，交点の座標は　$(2,1)$，$(4,5)$　とわかる.

【例題:放物線と直線・放物線の交点】

放物線　$C: y=x^2-2x+3$　について

(1) 直線　$L1: y=-x+5$　との交点を求め，　C　と　$L1$　のグラフを描け.

(2) 放物線　$C1: y=-x^2-x+6$　との交点を求め，　C　と　$C1$　のグラフを描け.

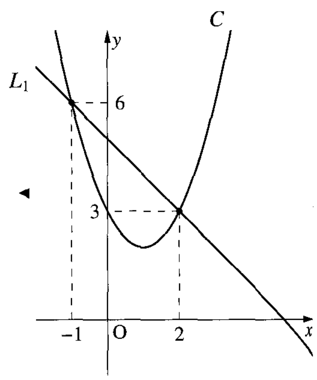
(3) 直線　$L2: y=-2x-k$　との共有点が1 つであるように，　k　の値を定めよ.
　また，そのときの　C　と　$L2$　のグラフを描け.

(4) 放物線　$C2: y=3x^2+2ax+a+4$　との共有点が1 つであるように，　a　の値を定めよ.
　また，そのときの　C　と　$C2$　のグラフを描け.

【解答】

(1)　C　と　$L1$　の交点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2-2x+3 \cdots ① \\ y=-x+5 \quad \cdots ② \end{cases}$$



の解に一致する.　②の左辺に①を代入してこれを解くと

$$x^2-2x+3=-x+5 \quad \to \quad x^2-x-2=0$$

$\therefore \quad x=2,-1$

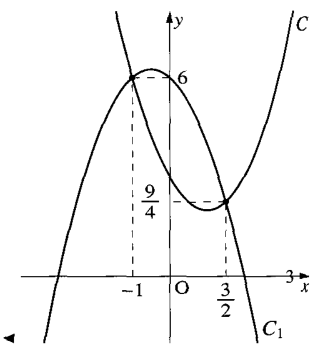
となる.　②に代入して　y　を求めれば　　$x=-1$　のとき

$y=6$，$x=2$　のとき　$y=3$

であるので，交点の座標は　$(-1,6)$，$(2,3)$　である.
グラフは，右図のようになる.

(2)　C　と　$C1$　の交点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2-2x+3 \cdots ③ \\ y=-x^2-x+6 \cdots ④ \end{cases}$$



の解に一致する.　④の左辺に③を代入してこれを解くと

$$x^2-2x+3=-x^2-x+6 \quad \to \quad 2x^2-x-3=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{3}{2}, -1$$

となる. ③によって　y　を求めれば

$x=\dfrac{3}{2}$ のとき $y=\dfrac{9}{4}$, $x=-1$ のとき $y=6$

であるので，交点の座標は $(-1,6)$, $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ である.

グラフは，右図のようになる.

(3) **2** つのグラフの共有点が**1** つであるには，連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2-2x+3 & \cdots⑤ \\ y=-2x-k & \cdots⑥ \end{cases}$$

の解が重解であればよい.
⑥の左辺に⑤を代入して

$$x^2-2x+3=-2x-k \quad \to \quad x^2+3+k=0 \quad \cdots⑦$$

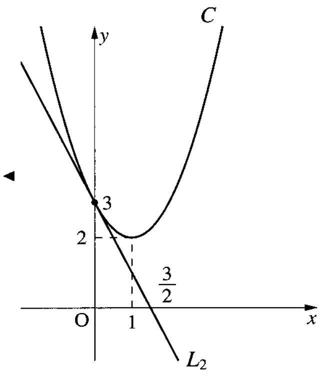
となる. ⑦の判別式 D が 0 となればよいので,

$$\frac{D}{4}=0^2-1\cdot(3+k)=0 \qquad \therefore \quad k=-3$$

このとき，直線 $L2$ を表す式は $y=-2x+3$ となる.
また, C と $L2$ の共有点は，再び連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2-2x+3 \\ y=-2x+3 \end{cases}$$

を解いて $(x,y)=(0,3)$
つまり，グラフは右図のようになる.



(4) **2** つのグラフの共有点が**1** つであるには，連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2-2x+3 & \cdots⑧ \\ y=3x^2+2ax+a+4 & \cdots⑨ \end{cases}$$

の解が重解であればよい.
⑨の左辺へ⑧を代入して

$$x^2-2x+3=3x^2+2ax+a+4$$
$$\to \quad 2x^2+(2a+2)x+a+1=0 \quad \cdots⑩$$

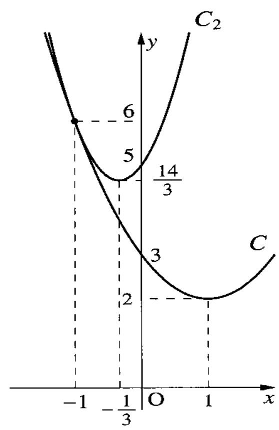
となる. ⑩の判別式 D が 0 となればよいので,

$$\frac{D}{4}=(a+1)^2-2(a+1)=0 \quad \to \quad a^2-1=0 \quad \therefore \ a=1,-1$$

i) $a=1$ のとき
放物線 $C2$ を表す式は $y=3x^2+2x+5$ となる.
C と $C2$ の共有点は，再び連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2-2x+3 \\ y=3x^2+2x+5 \end{cases}$$

を解いて $(x,y)=(-1,6)$
グラフは，右図のようになる.



ii) $a=-1$ のとき

放物線 $C2$ を表す式は $y=3x^2-2x+3$ となる.

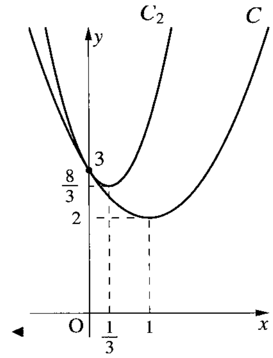
C と $C2$ の共有点は，再び連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2-2x+3 \\ y=3x^2-2x+3 \end{cases}$$

を解いて $(x,y)=(0,3)$

グラフは，右図のようになる.

放物線と直線，放物線と放物線の共有点が**1** 点のとき，その**2** つの
グラフはその点で接するといい，その共有点を接点という.
たとえば上の例題の**(3)** では，直線 $L2$ と放物線 C は接していて，
その接点は $(0,3)$ である.



§ 2.7 2 次不等式と2 次関数

2 次式で表された不等式「**2** 次不等式」について学ぶ. **1** 次不等式がそうであったように，
2 次不等式も**2** 次関数や**2** 次方程式と深い関係がある.
2 次不等式の場合は，むしろ，**2** 次関数と**2** 次方程式を用いて解くことになる.

2.7.1 2 次不等式とは

不等式を移項して整理することにより

$$(2\text{ 次式}) > 0 \quad , \quad (2\text{ 次式}) \leq 0$$

などの形に変形できる不等式を，一般に**2 次不等式(quadratic inequality)** という.
2 次不等式

$$x^2-5x+4<0 \quad \cdots ①$$

を満たす x の値について考えてみると， $x=2$ や $x=3$ は①を満たすが， $x=0$ や $x=5$ は
満たさない.
『**1** 次不等式の解法』と同じように，**2** 次不等式でも，不等式を満たす x の値の範囲をその不等式の
解といい，解を求めることを不等式を解くという.

2.7.2 2 次不等式の解法

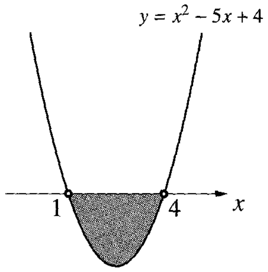
■2 次関数をもちいて2 次不等式を解く

2 次不等式

$$x^2-5x+4<0$$

を解くためには，**2** 次関数

$$y=x^2-5x+4$$



について， $y<0$ となる x の値の範囲を調べればよい.

$$y=x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$$

と因数分解できるので，グラフは右図のようになる. これより， $y<0$ となる x の範囲は $1<x<4$ である.

【暗記：2 次不等式の解法】

以下の空欄に適当な数字を入れよ．

2 次不等式 $x^2-4x+2>0$ ……… ① を解くことを考えよう．

まず $x^2-4x+2>0$ を因数分解するため，2 次方程式 $x^2-4x+2=\boxed{\text{ア}}$ を解こう．

これは，解の公式より

$$x=(\text{計算省略})=\boxed{\text{イ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

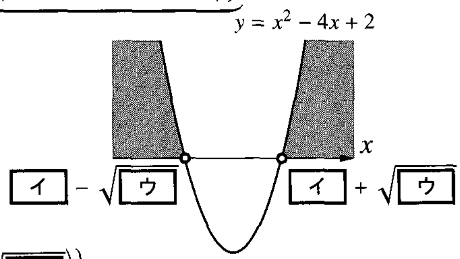
となる．よって

$$x^2-4x+2>0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left\{x-\left(\boxed{\text{イ}}-\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\right)\right\}\left\{x-\left(\boxed{\text{イ}}+\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\right)\right\}}_{y\text{とおく}}>0$$

と因数分解できる．(p.107)

この左辺を y とおいて，$y>0$ となるときの x の範囲を求めればよい．



2 次関数

$$y=\left\{x-\left(\boxed{\text{イ}}-\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\right)\right\}\left\{x-\left(\boxed{\text{イ}}+\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\right)\right\}$$

のグラフを描けば右図のようになるので，①の解は

$$x<\boxed{\text{イ}}-\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\ \text{または}\ \boxed{\text{イ}}+\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}<x$$

【解答】

ア$=0$，イ$=2$，ウ$=2$

【例題：判別式 $D>0$ の場合の2 次不等式】

次の2 次不等式を解け．

(1) $x^2-2x-3>0$ **(2)** $x^2-2x-3\geq 0$

(3) $x^2-2x-3<0$ **(4)** $x^2-2x-3\leq 0$

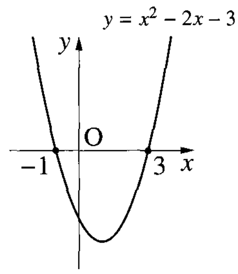
$y=x^2-2x-3$ とおくと，判別式 D は

$$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16>0$$

となるので，この放物線は x 軸と2 つの共有点をもつ．

その共有点の x 座標は

$$x^2-2x-3=0 \quad\rightarrow\quad (x+1)(x-3)=0 \quad\rightarrow\quad x=-1,3$$



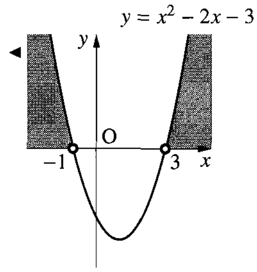
より，x 軸との交点の x 座標は -1，3 とわかる．

これより，$y=x^2-2x-3$ のグラフは右上図のようになる．

以下，このグラフをもとに2 次不等式を解く．

【解答】

(1) 右図より，



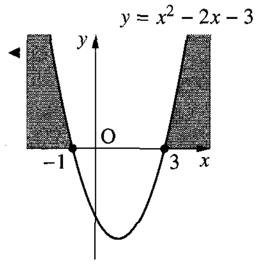
$$x^2-2x-3>0 \quad \text{となるのは} \quad x<-1 \quad \text{または} \quad 3<x$$

のときであるとわかる．
よって，2 次不等式　$x^2-2x-3>0$　の解は

$$x<-1 \quad \text{または} \quad 3<x$$

となる．

(2) 右図より，



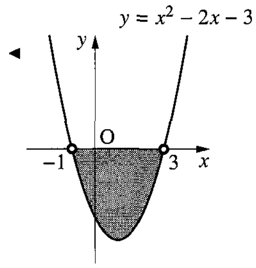
$$x^2-2x-3\geq 0 \quad \text{となるのは} \quad x\leq -1 \quad \text{または} \quad 3\leq x$$

のときとわかる．
よって，2 次不等式　$x^2-2x-3\geq 0$　の解は

$$x\leq -1 \quad \text{または} \quad 3\leq x$$

となる．

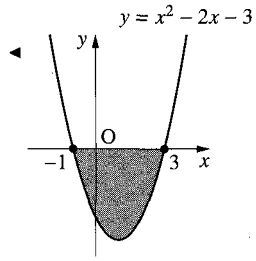
(3) 右図より，



$$x^2-2x-3<0 \quad \text{となるのは} \quad -1<x<3$$

のときとわかる．
よって，2 次不等式　$x^2-2x-3<0$　の解は
$$-1<x<3$$
となる．

(4) 右図より，



$$x^2-2x-3\leq 0 \quad \text{となるのは} \quad -1\leq x\leq 3$$

のときとわかる．
よって，2 次不等式　$x^2-2x-3\leq 0$　の解は
$$-1\leq x\leq 3$$
となる．

【例題：判別式　$D=0$　の場合の2 次不等式】

次の2 次不等式を解け．

(1)　$4x^2-4x+1>0$　　　**(2)**　$4x^2-4x+1=0$

(3)　$4x^2-4x+1<0$　　　**(4)**　$4x^2-4x+1\leq 0$

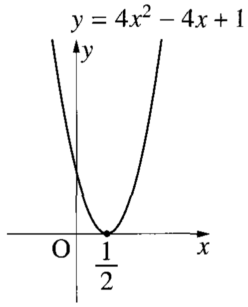
$y=4x^2-4x+1$　とおくと，判別式　D　は
$$D=(-4)^2-4\cdot 4\cdot 1=0$$

となるので，この放物線は　x　軸と接する．
さらに，2 次方程式　$4x^2-4x+1=0$　を解くと

$$4x^2-4x+1=0 \quad \to \quad (2x-1)^2=0 \quad \to \quad x=\frac{1}{2}$$

となるので, x 軸との共有点(接点)の x 座標は $\dfrac{1}{2}$ とわかる.

これより, $y=4x^2-4x+1$ のグラフは右図のようになる.
以下, このグラフをもとに2 次不等式を解く.



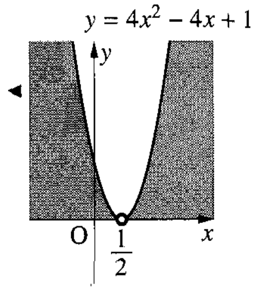
【解答】
(1) 右図より, $4x^2-4x+1>0$ となるのは

$$x<\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \frac{1}{2}<x$$

のときとわかる.
よって, 2 次不等式の解は

$$x<\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \frac{1}{2}<x$$

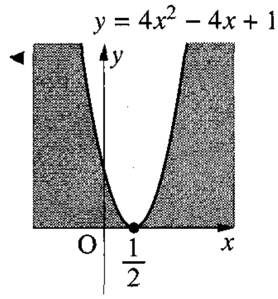
(「 x は $\dfrac{1}{2}$ 以外の全ての実数。」 という答方でもよい)



(2) 右図より, すべての実数 x で $4x^2-4x+1\geqq 0$ となるのがわかる.
よって, 2 次不等式 $4x^2-4x+1\geqq 0$ の解は

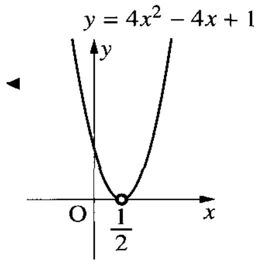
すべての実数

となる.



(3) 右図より, $4x^2-4x+1<0$ となる x は存在しないのがわかる.
よって, 2 次不等式 $4x^2-4x+1<0$ の解は

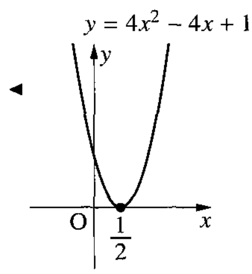
存在しない.



(4) 右図より, $4x^2-4x+1\leqq 0$ となるのは $x=\dfrac{1}{2}$ のときのみとわかる.
よって, 2 次不等式 $4x^2-4x+1\leqq 0$ の解は

$$x=\frac{1}{2}$$

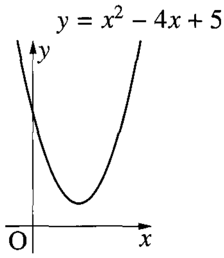
となる.



【例題:判別式 $D<0$ の場合の2 次不等式】
次の2 次不等式を解け.

(1) $x^2-4x+5>0$　　(2) $x^2-4x+5\geqq 0$

(3) $x^2-4x+5<0$　　(4) $x^2-4x+5\leqq 0$

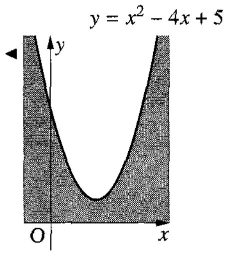


$y = x^2 - 4x + 5$ とおくと，判別式 D は

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$$

となり，この放物線は x 軸と交点をもたないので，
$y = x^2 - 4x + 5$ のグラフは右図のようになる．
以下，このグラフをもとに2 次不等式を解く．

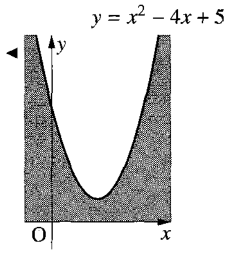
【解答】



(1) 右図より，すべての実数 x で $x^2 - 4x + 5 > 0$ となるのがわかる．
よって，**2** 次不等式 $x^2 - 4x + 5 > 0$ の解は

すべての実数

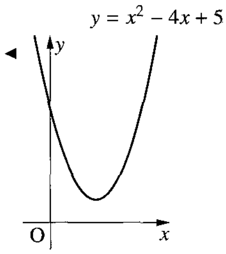
となる．



(2) 右図より，すべての実数 x で $x^2 - 4x + 5 \geq 0$ となるのがわかる．
よって，**2** 次不等式 $x^2 - 4x + 5 \geq 0$ の解は

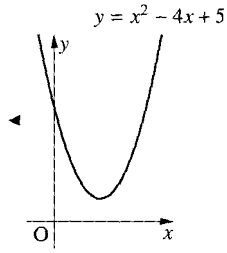
すべての実数

となる．



(3) 右図より， $x^2 - 4x + 5 < 0$ となる x は存在しないのがわかる．
よって，**2** 次不等式 $x^2 - 4x + 5 < 0$ の解は

存在しない．

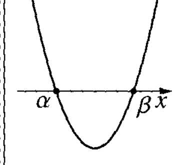
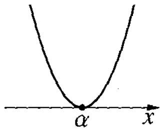
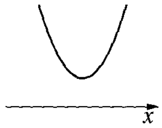


(4) 右図より， $x^2 - 4x + 5 \leq 0$ となる x は存在しないのがわかる．
よって，**2** 次不等式**x^{2}- 4 x + 5 <= 0** の解は

存在しない．

2 次不等式の解

$a > 0$ の場合の，2 次不等式の解はつぎのようにまとめることができる．

判別式 D の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ			
$ax^2 + bx + c = 0$ の解	2 解 α, β	重解 α	なし
$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$x < \alpha,\ \beta < x$	**α 以外の実数**	**すべての実数**
$ax^2 + bx + c \geqq 0$ の解	$x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x$	**すべての実数**	**すべての実数**
$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$\alpha < x < \beta$	**なし**	**なし**
$ax^2 + bx + c \leqq 0$ の解	$\alpha \leqq x \leqq \beta$	$x = \alpha$	**なし**

この結果は暗記するようなものではない．簡単なグラフを必ず描き，結果を導き出せるようにしよう．

【例題：2 次不等式の練習】

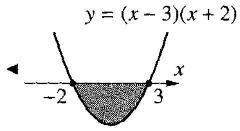
次の**2** 次不等式を解け．

(1) $(x-3)(x+2)\leq 0$　　**(2)** $x^2-6x+8<0$　　**(3)** $-2x^2-x-6\geq 0$

(4) $x^2-x-6\geq 2x-4$　　**(5)** $-x^2-x-9<x-3$　　**(6)** $\frac{1}{2}x^2-x-\frac{5}{3}\geq\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x+1$

【解答】

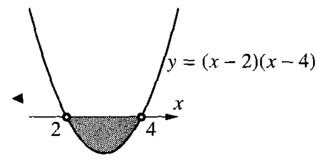
(1) $y=(x-3)(x+2)$ のグラフを描けば右図のようになるので，



−2 <= x <= 3 が解となる．

(2) x^2-6x+8 は整数の範囲で因数分解でき

$$x^2-6x+8<0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(x-4)<0$$



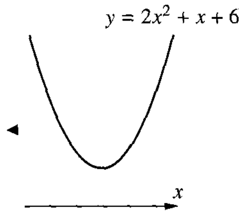
$y=(x-2)(x-4)$ のグラフを描けば右図のようになるので，

$$2<x<4$$

が解となる．

(3) 式全体に -1 を掛けて**J x2** の係数は正にした方がよい

$$-2x^2-x-6\geq 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2+x+6\leq 0$$



$y=2x^2+x+6$ は判別式 $D=1^2-4\cdot 2\cdot 6<0$ であるので，グラフは右図のようになる．つまり，この不等式を満たす実数は存在しないので，**解はない．**

(4) 移項して整理すると

$$x^2-x-6\geq 2x-4 \quad \rightarrow \quad x^2-3x-2\geq 0$$

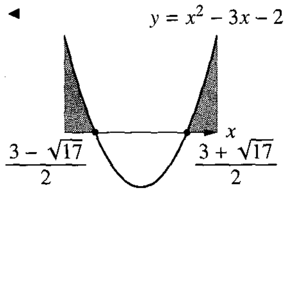
x^2-3x-2 は簡単には因数分解できないので，**2** 次方程式
$x^2-3x-2=0$ の解

$$x\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

を利用して $x^2-3x-2\geq 0$

$$\rightarrow \left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\geq 0$$

$$\rightarrow \quad x\leq\frac{3-\sqrt{17}}{2},\ \frac{3+\sqrt{17}}{2}\leq x$$



が解となる。

(5) 移項して整理すると

$$-x^2-x-9<x-3 \quad\rightarrow\quad -x^2-2x-6<0$$
$$\rightarrow\quad x^2+2x+6>0$$

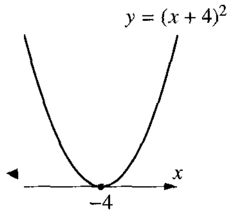
$y = x^{2} + 2x + 6$ の判別式**D** について $\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot 6<0$

であるので，グラフは右図のようになる．つまり，この不等式は常に正しいので，

解はすべての実数.

(6) 両辺を**6** 倍して整理すると

$$\frac{1}{2}x^2-x-\frac{5}{3}\geq\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}+1$$
$$\rightarrow\quad 3x^2-6x-10\geq 4x^2+2x+6$$
$$\rightarrow\quad x^2+8x+16\leq 0 \quad\rightarrow\quad (x+4)^{2}\leq 0$$



$y=(x+4)^2$ のグラフを描くと右図のようになる．よって，この不等式の解は $x=-4$ ．

【例題：連立2 次不等式】

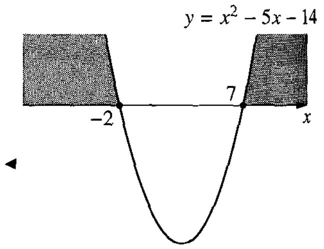
次の不等式を解け．

(1) $\begin{cases} x^2-5x-14\geq 0 & \cdots① \\ 2x^2-11x-40<0 & \cdots② \end{cases}$　　**(2)** $\begin{cases} 25-9x^2>0 & \cdots③ \\ 3x^2+4x-6<0 & \cdots④ \end{cases}$

【解答】

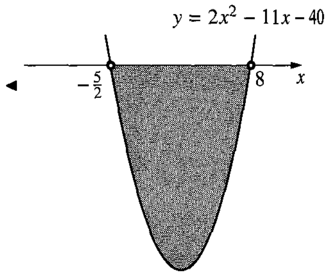
(1) まず，①を解くと

$$x^2-5x-14\geq 0 \quad\rightarrow\quad (x+2)(x-7)\geq 0$$
$$\rightarrow\quad x\leq -2,\ 7\leq x \quad\cdots①'$$



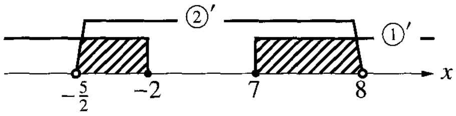
次に，②を解くと

$$2x^2-11x-40<0 \quad\rightarrow\quad (2x+5)(x-8)<0$$
$$\rightarrow\quad -\frac{5}{2}<x<8 \quad\cdots②'$$



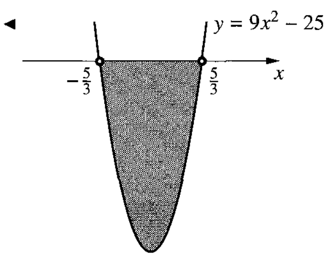
以上①’、②’を共通して満たす x は

$$-\frac{5}{2}<x<-2 \quad,\quad 7\leq x<8$$



(2) まず，③を解くと

$$25-9x^2>0 \quad\rightarrow\quad 9x^2-25<0$$
$$\rightarrow\quad (3x+5)(3x-5)<0$$
$$\rightarrow\quad -\frac{5}{3}<x<\frac{5}{3} \quad\cdots③'$$



次に，④を解くのだが，これは簡単には因数分解できないので，**2** 次方程式 $3x^2+4x-6=0$ の解

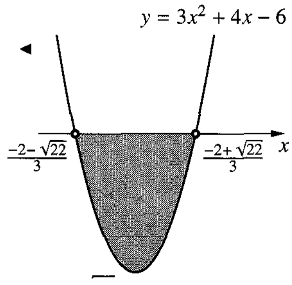
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot(-6)}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{22}}{3}$$

を利用して

$$3x^2+4x-6<0$$

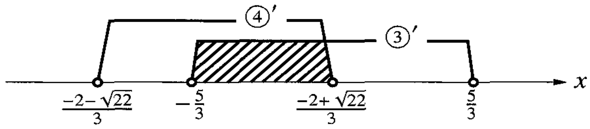
$$\rightarrow\quad \left\{x-\left(\frac{-2-\sqrt{22}}{3}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{-2+\sqrt{22}}{3}\right)\right\}<0$$

$$\rightarrow\quad \frac{-2-\sqrt{22}}{3}<x<\frac{-2+\sqrt{22}}{3}\quad \cdots④'$$



以上③'、④'を共通して満たす x は

$$-\frac{5}{3}<x<\frac{-2+\sqrt{22}}{3}$$



【例題:範囲に注意すべき2 次関数の最大・最小】

$x^2+y^2=1$ のとき, $L=x+y^2-1$ の最大値・最小値, そのときの x, y を求めよ.

【解答】

まず, $x^2+y^2=1$ を変形して

$$y^2=1-x^2\quad \cdots①$$

①を $L=x+y^2-1$ に代入し, 平方完成すると

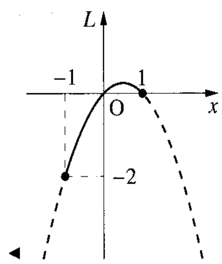
$$L=x+(1-x^2)-1$$
$$=-x^2+x$$
$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

一方, ①において, $y^2\geq 0$ なので

$$1-x^2=0\quad\rightarrow\quad (x-1)(x+1)\leq 0$$
$$\therefore\quad -1\leq x\leq 1$$

である. つまり

$$L=f(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\qquad(-1\leq x\leq 1)\quad\cdots②$$



において, L の最大値・最小値を求めればよい. そこで, ②のグラフを描けば, 右図のようになる.

図から, 最大値は $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ であり, $x=\frac{1}{2}$ を①に代入して

$y=0$ となる.

また, 最小値は $f(-1)=-2$ であり, $x=-1$ を①に代入して $y=0$ となる. まとめると

$$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{のとき最大値}\ \frac{1}{4}\ ,\quad (x,y)=(-1,0)\ \text{のとき最小値}\ -2$$

■絶対値を含む関数・方程式

『絶対値』で学んだことを使って，絶対値を含む2 次関数や2 次方程式・不等式にして考えていこう.

【例題：絶対値を含む2 次関数】

次の式で与えられた関数のグラフを描け.

(1) $y=2x-|x^2-4|$　　　**(2)** $y=|x^2-4x-6|$

【解答】

(1) i) $x^2-4\geq 0$　→　$(x+2)(x-2)\geq 0$

→　$x\leq -2$　,　$2\leq x$

のとき，　$|x^2-4|=x^2-4$　なので

$y=2x-(x^2-4)\quad =-x^2+2x+4$

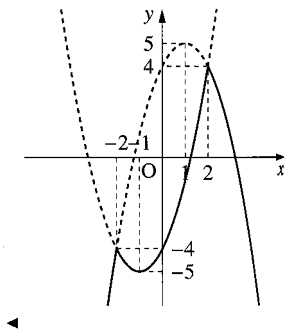
$=-(x-1)^2+5$

ii) $x^2-4<0$ ，つまり　$-2<x<2$　のとき，

$|x^2-4|=-(x^2-4)$　であるので

$y=2x+(x^2-4)=x^2+2x-4$

$=(x+1)^2-5$



以上**i)**, **ii)** より，グラフは右図のようになる.

(2) i) $x^2-4x-6\geq 0$ ，つまり　$x\leq 2-\sqrt{10}$　,　$2+\sqrt{10}\leq x$

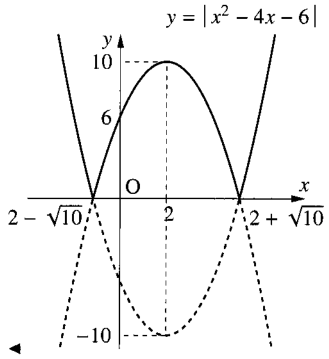
のとき，　$|x^2-4x-6|=x^2-4x-6$　なので

$y=x^2-4x-6=(x-2)^2-10$

ii) $x^2-4x-6<0$ ，つまり　$2-\sqrt{10}<x<2+\sqrt{10}$　のとき，

$|x^2-4x-6|=-(x^2-4x-6)$　なので

$y=-(x^2-4x-6)=-(x-2)^2+10$



以上**i)**, **ii)** より，グラフは右図のようになる.

この問の**(2)** のグラフは，　$y=x^2-4x-6$　のグラフのうち　x　軸より下にある部分を上側へ折り返したものになっている. 一般に，　$y=|f(x)|$　のグラフは，　$y=f(x)$　のグラフを描いておき，**x** 軸より下にある部分を上に折り返すと素早く描くことができる.

【例題：絶対値を含む2 次方程式】

次の方程式を解け.

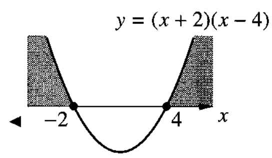
(1) $|x^2-2x-8|=6x+1$　　　**(2)** $|x^2-4x+3|=2-x$

【解答】

(1) i) $x^2-2x-8=0$ ，つまり

$x^2-2x-8\geq 0$　→　$(x+2)(x-4)\geq 0$

→　$x\leq -2$　,　$4\leq x$　・・・①



のとき，与えられた方程式は

$x^2-2x-8=6x+1$　→　$x^2-8x-9=0$

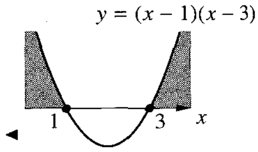
$\therefore$　$x^2-8x-3\geq 0$　①の範囲で考えているので，　$x=9$

ii) $x^2-2x-8<0$ ，つまり $-2<x<4$ $\cdots$② のとき，
与えられた方程式は

$$-(x^2-2x-8)=6x+1 \quad \to \quad -x^2+2x+8=6x+1$$
$$\to \quad x^2+4x-7=0 \qquad \therefore \quad x=-2\pm\sqrt{11}$$

②の範囲で考えているので， $x=-2+\sqrt{11}$
以上**i)**，**ii)** より，求める解は $x=-2+\sqrt{11}\,,9$

(2) i) $x^2-4x+3\geq 0$ ，つまり



$$x^2-4x+3\geq 0 \quad \to \quad (x-1)(x-3)\geq 0$$
$$\to \quad x\leq 1 \quad , \quad 3\leq x \quad \cdots③$$

のとき，与えられた方程式は

$$x^2-4x+3=2-x \quad \to \quad x^2-3x+1=0 \quad \therefore \quad x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

③の範囲で考えているので， $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

ii) $x^2-4x+3<0$ ，つまり $1<x<3$ $\cdots$④ のとき，
与えられた方程式は

$$-(x^2-4x+3)=2-x \quad \to \quad x^2-5x+5=0 \quad \therefore \quad x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

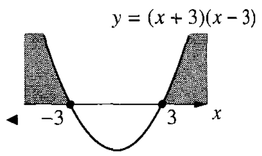
④の範囲で考えているので， $x=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

以上**i)**，**ii)** より，求める解は

$$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

【例題:絶対値を含む2 次不等式】
次の不等式を解け．
(1) $3x^2+|x^2-9|<16x$ **(2)** $|x^2-8x-3|-2x-8>0$

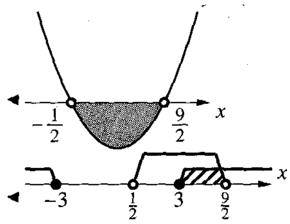
【解答】
(1) i) $x^2-9\geq 0$ ，つまり



$$x^2-9\geq 0 \quad \to \quad (x+3)(x-3)\geq 0$$
$$\to \quad x\leq -3 \quad , \quad 3\leq x \quad \cdots①$$

のとき，与えられた不等式は

$$3x^2+x^2-9<16x \quad \to \quad 4x^2-16x-9<0$$
$$\to \quad (2x+1)(2x-9)<0$$
$$\therefore \quad -\frac{1}{2}<x<\frac{9}{2}$$



これと，①を合わせて， $3\leq x<\dfrac{9}{2}$

ii) $x^2-9<0$ ，つまり $-3<x<3$ $\cdots$② のとき，与えられた不等式は

$$3x^2-(x^2-9)<16x \quad \to \quad 2x^2-16x+9<0$$
$$\to \quad \frac{8-\sqrt{46}}{2}<x<\frac{8+\sqrt{46}}{2}$$

これと，②を合わせて， $\dfrac{8-\sqrt{46}}{2}<x<3$

◀ $6<\sqrt{46}<7$ より
$\dfrac{8-\sqrt{46}}{2}=0.\cdots$
$\dfrac{8+\sqrt{46}}{2}=7.\cdots$

以上i), ii) より求める解は　$\dfrac{8-\sqrt{46}}{2}<x<\dfrac{9}{2}$

(2) i)　$x^2-8x-3\geqq 0$　，つまり

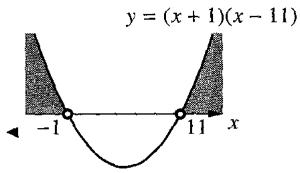
$$x^2-8x-3\geqq 0 \quad\rightarrow\quad x\leqq 4-\sqrt{19}\ ,\ 4+\sqrt{19}\leqq x \quad\cdots③$$

のとき，与えられた不等式は

$$x^2-8x-3-2x-8>0$$

$$\rightarrow\quad x^2-10x-11>0 \quad\rightarrow\quad (x+1)(x-11)>0$$

$$\therefore\quad x<-1\ ,\quad 11<x$$

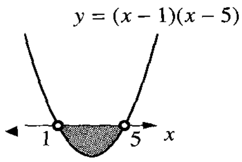


これと，③を合わせて，　$x<-1$　，　$11<x$

ii)　$x^2-8x-3<0$　，つまり　$4-\sqrt{19}<x<4+\sqrt{19}$　$\cdots$④ のとき，
与えられた不等式は

$$-(x^2-8x-3)-2x-8>0 \quad\rightarrow\quad x^2-6x+5<0$$

$$\rightarrow\quad (x-1)(x-5)<0 \qquad \therefore\quad 1<x<5$$



以上i), ii) より求める解は

$$x<-1\ ,\quad 1<x<5\ ,\quad 11<x$$

【例題:絶対値記号を複数含む式】
以下の問いに答えよ.
(1) 関数　$y=|2x-4|+|x-5|$　のグラフを書け.
(2) 方程式　$|x-3|+|x-5|=3$　を解け.
(3) 不等式　$|x^2-4x+3|+|x-2|<x$　を解け.

【解答】
(1) まず，場合分けについて考える.

$2x-4=0$　を解くと，　$x=2$

$x-5=0$　を解くと，　$x=5$

よって，右欄外の表のようになる.

x	～2	2～5	5～
$2x-4$	−	+	+
$x-5$	−	−	+

i)　$x\leqq 2$　のとき

$$y=-(2x-4)-(x-5)=-3x+9$$

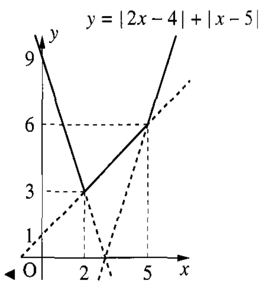
ii)　$2<x<5$　のとき

$$y=(2x-4)-(x-5)=x+1$$

iii)　$5\leqq x$　のとき

$$y=(2x-4)+(x-5)=3x-9$$

以上i), ii), iii) より，グラフは右図のようになる.



(2) まず，場合分けについて考える.

$x-3=0$　を解くと，　$x=3$

$x-5=0$　を解くと，　$x=5$

よって，右欄外の表のようになる.

x	～3	3～5	5～
$x-3$	−	+	+
$x-5$	−	−	+

i)　$x\leqq 3$　$\cdots$① のとき

$$-(x-3)-(x-5)=3 \quad\rightarrow\quad -x+3-x+5=3$$

$$\rightarrow\quad -2x=-5 \qquad \therefore\quad x=\frac{5}{2}$$　これは①に適する.

ii) $3<x<5$ ・・・② のとき

$$(x-3)-(x-5)=3 \quad \rightarrow \quad x-3-x+5=3$$

$$\rightarrow \quad 2=3$$

x がいくつでも，この等式を満たすことはありえない．
よって，この場合には解は無い．

iii) $5\leq x$ ・・・③ のとき

$$(x-3)+(x-5)=3 \quad \rightarrow \quad x-3+x-5=3$$

$$\rightarrow \quad 2x=11 \qquad \therefore \quad x=\frac{11}{2}$$

これは③に適する．
以上**i)**，**ii)**，**iii)** より，求める解は $x=\dfrac{5}{2}$ ，$\dfrac{11}{2}$ である。

(3) まず，場合分けについて考える．

$$x^2-4x+3=0 \quad \text{を解くと，} \quad x=1,3$$

$$x-2=0 \quad \text{を解くと，} \quad x=2$$

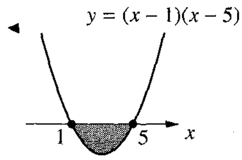
よって，右欄外の表のようになる．

x	～1	1～2	2～3	3～
x^2-4x+3	+	−	−	+
$x-2$	−	−	+	+

i) $x\leq 1$ ・・・④ のとき

$$(x^2-4x+3)-(x-2)<x \quad \rightarrow \quad x^2-6x+5<0$$

$$\rightarrow \quad (x-1)(x-5)<0 \quad \therefore \quad 1<x<5$$

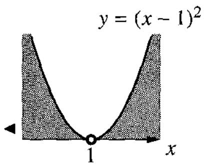


これと，④を合わせて，この場合は解が無い．

ii) $1<x\leq 2$ ・・・⑤ のとき

$$-(x^2-4x+3)-(x-2)<x \quad \rightarrow \quad -x^2+2x-1<0$$

$$\rightarrow \quad (x-1)^2>0 \qquad \therefore \quad x<1 \quad , \quad 1<x$$



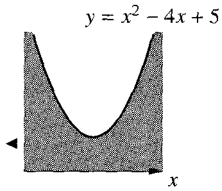
これと，⑤を合わせて，$1<x\leq 2$

iii) $2<x\leq 3$ ・・・⑥ のとき

$$-(x^2-4x+3)+(x-2)<x \quad \rightarrow \quad -x^2+4x-5<0$$

$$\rightarrow \quad x^2-4x+5>0$$

x^2-4x+5 の判別式を D すると，$\dfrac{D}{4}=2^2-5<0$ であり，
グラフを考えると，解はすべての実数．
これと，⑥を合わせて，$2<x\leq 3$



iv) $3<x$ ・・・⑦ のとき

$$(x^2-4x+3)+(x-2)<x \quad \rightarrow \quad x^2-4x+1<0$$

$$\rightarrow \quad 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$$

これと，⑦を合わせて，$3<x<2+\sqrt{3}$

以上**i)**，**ii)**，**iii)**，**iv)** より，求める解は

$$1<x<2+\sqrt{3}$$