第1章
数と式

§ 1.1 いろいろな数

「数とは何か？」

この質問に答えるのは難しい．私達は普段から数を使い，(試験以外では)何不自由無く暮らしている．では，昔から人々が「数」をやすやすと利用してきたかというと，そうではない．「数」は有史以来，発見されつづけ，作られつづけたものなのである．

この節では，中学までに学んださまざまな「数」を簡単に整理し，「数」を図で表す方法(数直線)を確認する．

1.1.1 自然数

■自然数とは何か

私達は，(表現の仕方はいろいろだが)順序をつけてものの数を数える．たとえば

日本語ならば一，二，三，四，

英語ならばone，two，three，four，

順序をつけてものの数を数えるということは，たとえば，リンゴ3 個と鉛筆3 本は全く異なるものなのに，同じ「3」という言葉でひとくくりにする，ということである．これは，ものに備わった「数」という点以外のあらゆる個性を捨て去ることに他ならない．

愛着ある飼い猫のように，その個性が重要な場合には，数を数えることに意味は無い．しかし，100 匹の羊の放牧するときのように，ある程度心理的距離のあるものを管理する場合には，数を数えることには大きな意味がある．

数を数えておかないと，夕刻，羊を小屋にしまうとき，迷子の羊がいてもわからなくなってしまう[*1]．

*1 数を数える代わりに，名前を付けるという方法もある．しかし，それも羊100 匹だとメリー，ドリー，ヤリー，と名付けるだけで大変である．

ものの数を数える行為によって生まれる数， $1,\ 2,\ 3,$ を**自然数**(natural number) という．たとえば，次の数は全て自然数である．

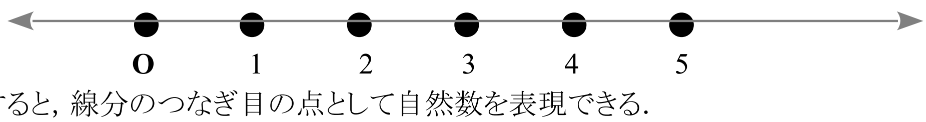
$1, 3, 42, 100, 23789$

私達がすでに使っている $\dfrac{2}{3}$ や -3 などは，「数」ではあるが自然数ではない．

■自然数の図示

自然数の様子を図で見えるようにするため，以下のようなことを考えよう．

まず，向きのある直線(下図では右向き)上に原点O をとり，適当な長さをもった線分( )を，原点O からすきまが無いように直線の向きと同じ側に次々と並べる[*2]．そして，線分のつなぎ目に自然数を対応させていく．

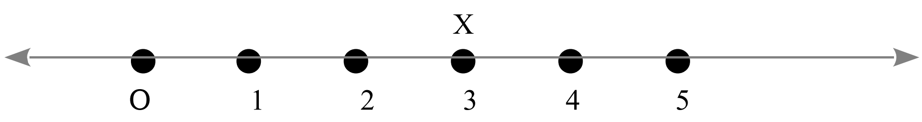


このようにすると，線分のつなぎ目の点として自然数を表現できる．

この自然数の図示によって生まれた，上図のような数を表す直線のことを**数直線**(number line) という．

数直線上のある点 X について「点 X に対応する数が a であること」を， $X(a)$ と書く．

たとえば，下図では点 X に対応する数が 3 であるので， $X(3)$ である．



1.1.2　整数

■整数とは何か

自然数をものの個数と見ている限り，自然数どうしの差のうち，たとえば，　**3－5**　には意味が無い．なぜなら，　**3**　個のものから　**5**　個のものを差し引くことはできないからである．
しかし，　**1000**　円の貸しがある人から　**600**　円借りた場合には，差し引きが

1000－600＝400　(円)

の貸しになるように、　**1000**　円の貸しがある人から　**1400**　円借りた場合には，自然数に符号(−)のついた数を考え

1000－1400＝－400　(円)

として　**400**　円の借りがあると考えると計算が便利である．
このような，自然数にマイナス(−)のついた数と，　**0**　，自然数をあわせて**整数**(integer number) という．

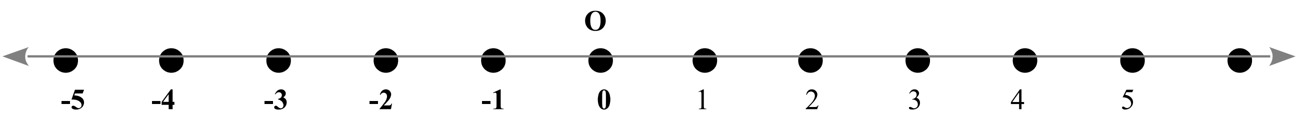
*2　コンパスで順にたどるような感じである．

たとえば，次の数は全て整数である．

－2568，－23，－3，0，4，57

■整数の図示

整数の様子を図でみるためには，自然数のときと同じような操作を，原点**O** の左側にもほどこ施せばよい．



1.1.3　有理数

■有理数とは何か

6 個のものを**3** 個**1** 組にすると，　**6÷3＝2**　組ができる．この**2** という数は，**6** の**3** に対する**比**(ratio) の値を表している．比の値は整数になることもあるが，**6** の**5** に対する比の値，つまり，　**6÷5**　は整数では表せない．そこで新しい数　$\dfrac{6}{5}$　をつくる．

一般に，整数　a　と，　**0**　でない整数　b　によって　$\dfrac{a}{b}$　の形で表せる数を，**有理数**(rational　number) [*3] という[*4]．整数は(整数)／**1**　と表すことができるので有理数である．

有理数のうち，　$\dfrac{4}{3}$　と　$\dfrac{8}{6}$　などは，**約分**(reduction)　$\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$　という作業を通じて，どちらも　$\dfrac{4}{3}$　として同一視できる．

この　$\dfrac{4}{3}$　のように，もうこれ以上約分できない有理数のことを**既約約数**(きやく)(irreducible fraction) という．

たとえば，次の数は全て有理数である．

$$\frac{-8}{3},\ -2,\ 0,\ \frac{11}{19},\ \frac{18}{9},\ 26$$

有理数

> 整数 a と 0 でない整数 b によって $\dfrac{a}{b}$ の形で表せる数を，**有理数**という．

***3**　**rational** には「合理的な」や「理性的な」という意味があるが，ratio には「比」という意味もある．その点で，明治時代に日本に輸入されたとき，**rational number** は“有比数”とでも訳されるべきだったのかもしれない．

***4**　有理数の四則演算(加法・乗法・減法・除法)の結果は有理数になる．このように，演算によって得られる数の集まりが，演算に使う数の集まりと同じになるとき，その数の集まりは四則演算について閉じている**(closed)** という．
自然数の減法・除法、整数の除法は閉じていないからこれらの演算を行うと各々自然数、整数ではなくなる。
有理数の四則演算は閉じているから、有理数同士の四則演算の結果は有理数となる。ただし、0での除法は考えない。

■有理数どうしの比の値ー 複分数

たとえば，有理数 $\dfrac{2}{3}$ と有理数 $\dfrac{10}{7}$ の比の値 $\dfrac{2}{3}\div\dfrac{10}{7}$ は，$\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{7}}$ のように表すこともできる.

このように，$\dfrac{a}{b}$ の分子または分母が，さらに分数で表されているとき，この分数のことを特に**複分数**(ふく)(complex fraction) という.

複分数は，「内側にある**3**と**10**を掛けて分母」と「外側にある**2**と**7**を掛けて分子」とすることで $\dfrac{14}{30}$ が得られ、この約分によって、既約分数 $\dfrac{7}{15}$ が得られる. こうして，複分数も有理数であることがわかる.

【例題：複分数】

次の(1)**〜**(3) の複分数を，普通の分数の形になおしなさい.

(1) $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{7}}$　　**(2)** $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{25}{9}}$　　**(3)** $\dfrac{\frac{11}{6}}{0.3}$

【解答】

(1) $\dfrac{7}{4}$　　**(2)** $\dfrac{9}{40}$　　**(3)** $\dfrac{53}{9}$

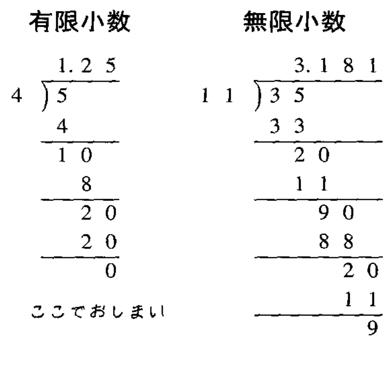
■有理数と小数

有理数は筆算により**小数**(decimal number) になおすことができる.
たとえば，右下図のような筆算を行うと

$\dfrac{5}{4}=\mathbf{1.25}$ のように，割りきれて**有限小数**(finite decimal) になるもの，$\dfrac{7}{22}=\mathbf{0.3181818}\cdots$ のように，割り切れず**無限小数**(infinite decimal) になるものがある. 無限小数の中でも，上の $\dfrac{7}{22}=\mathbf{0.3181818}\cdots$ のように，同じ数の並びが繰り返し現れるものを，特に**循環小数**(circulating decimal) という.

循環小数は，循環する部分がわかるように，記号「˙」を使う.

たとえば，$\dfrac{7}{22}=\mathbf{0.3181818}\cdots=\mathbf{0.3\dot{1}\dot{8}}$ と表す.



一方，どんな循環小数も，次の例題の**(4)** のようにすれば，
分数に直すことができる.
つまり，循環小数は有理数である.

【例題：有理数と循環小数】

次の(1)**〜**(4) において，分数は小数で，小数は分数で表せ.

(1) $\dfrac{9}{16}$　　**(2)** $\dfrac{5}{37}$　　**(3)** **0.625**　　**(4)** $\mathbf{0.\dot{4}2\dot{9}}$

【解答】

(1)（割り算を実行すればよい） **0.5625**

(2)（割り算を実行すればよい） $\mathbf{0.\dot{1}3\dot{5}}$

(3) 0.625 を分数で表すと $\dfrac{625}{1000}$ 約分して $\dfrac{5}{8}$ となる.

(4) まず

$x=0.429429429\cdots$ ・・・① とおく.

循環の周期をそろえるために，これを 1000 倍すると

$1000x=429.429429$ ・・・② となる.

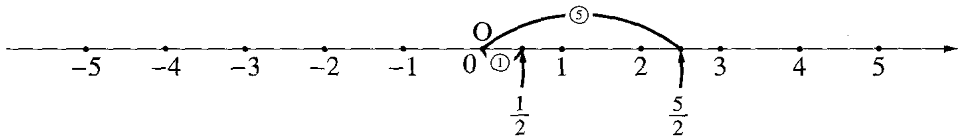
②-①より

$$\begin{array}{rl} 1000x= & 429.429429\cdots \\ -)\quad x= & 0.429429429\cdots \\ \hline 999x= & 429 \end{array}$$

よって，$x=\dfrac{429}{999}=\dfrac{143}{333}$ となる.

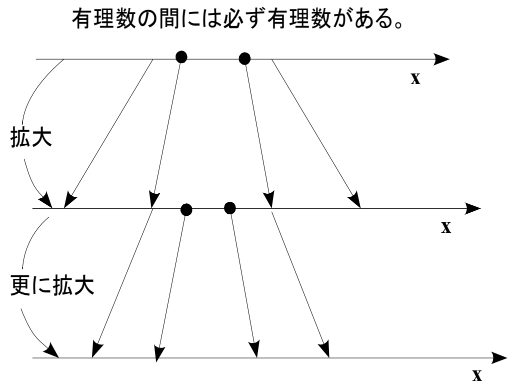
■有理数の図示

たとえば，$\dfrac{1}{2}$ を数直線上で表すには，下図のように0と1をつなぐ線分の2等分点をとり，その点に $\dfrac{1}{2}$ を対応させればよい。また，$\dfrac{5}{2}$ ならば $\dfrac{1}{2}\times 5$ と考えて，0と $\dfrac{1}{2}$ をつなぐ線分を5つつないで得られる線分の右端の点を対応させればよい.



一般に，$\dfrac{a}{b}$ を数直線上で表すには，まず0と1をつなぐ線分の b 等分点をとり，そのうち原点に一番近い点に $\dfrac{1}{b}$ を対応させる.そして，0と $\dfrac{1}{b}$ つなぐ線分を a 個つないで得られる線分の端の点を，$\dfrac{1}{b}\times a$ に対応させればよい.

■有理数の間には必ず有理数がある



たとえば，$\dfrac{1}{3}$ と $\dfrac{2}{3}$ の間には

$$\frac{1}{3}=\frac{10}{30}<\underset{}{\overset{10と20の平均値}{\frac{15}{30}}}<\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

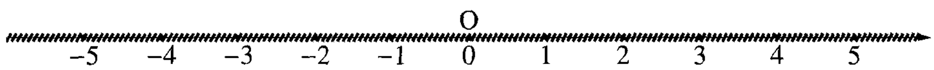
として，$\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$ という有理数が存在する.

一般に，2つの有理数号，$\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$ （$\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$） において

$$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}<\overset{ad とbcの平均値}{\frac{\frac{ad+bc}{2}}{bd}}<\frac{bc}{bd}=\frac{c}{d}$$

とすれば，2つの有理数の間に新しい有理数を考えることができる.

こうして，2つの異なる有理数をどのように選んでも，その間に必ず有理数が存在することがわかる.
よって，数直線上には有理数に対応する点がびっしり詰まっているとわかる.



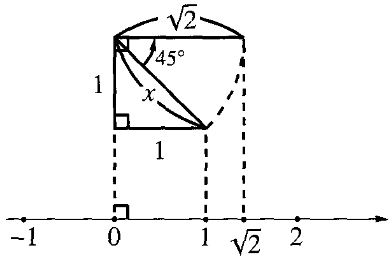
びっしり詰まった有理数のイメージ

1.1.4 実数

■無理数とは何か

前節の有理数の話から，数直線上にはびっしりと有理数が詰まっていることがわかった．
では，今度は逆に，数直線上の点で表される値のすべてが，有理数として表せるのかについて考えてみよう．
たとえば，**2** 辺の長さがそれぞれ**1** である直角二等辺三角形の斜辺の長さ x は，三平方の定理より

$$1^2+1^2=x^2 \iff x^2=2$$



すなわち， $x=\sqrt{2}$ で表される値であるが，
これは右の図のように数直線上の点として表すこと
もできる．では，この点に対応する有理数はあるのか，

つまり， $\sqrt{2}$ は有理数なのだろうか．
それを次の例題で確認しよう．

【記憶例題： $\sqrt{2}$ は有理数でない事の証明】

$\sqrt{2}$ が有理数でないことを証明せよ。

ある事柄を証明するとき，仮にその事柄が間違っているものとして話をすすめると矛盾が導かれることを示し，
そのことによってもとの事柄が成り立つと結論する論法がよく用いられる．
この論法のことを**背理法**(reduction to absurdity) という．

【解答】

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する．つまり

◀ 証明したい事柄を間違っていると仮定する．

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$$

と表される「既約分数である」と仮定する．ただし， a は整数，
b は0 でない整数である．

◀ 既約分数についてはp.2を参照

この両辺を2 乗すると

$$2=\frac{a^2}{b^2} \qquad \therefore\ 2b^2=a^2 \ \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，左辺は2の倍数なので，右辺 a^2 も2の倍数である．
したがって，a も2 の倍数である．

◀もし， a が2 の倍数でない（奇数）とすると，
a^2 が2 の倍数（偶数）であることに反し
てしまう．（この説明も背理法を用いている）．

そこで， $a=2a'$ （ a' は整数 ）とおくと，①は

$$2b^2=(2a')^2 \iff 2b^2=4a'^2$$
$$\therefore\ b^2=2a'^2$$

ここで，右辺は2 の倍数なので，左辺 b^2 も2 の倍数となり，b も
2 の倍数となる．しかし，そうすると， a，b がともに 2 の倍数
ということになり，最初の「既約分数である」という仮定に矛盾する．
したがって， $\sqrt{2}$ は有理数ではない．

◀ 矛盾が生じてしまった，つまり，
証明したい事 柄を間違いとしたのが誤り．

この例題からわかるように，数直線上の点として表されるような値でも，有理数ではない数が存在する．
そして，その数を**無理数**(irrational number) という[*5]．

*5　ir-rational のir は否定を表す接頭語であり，irrational とはrational でない，つまり，比で表せないという意味である.

■循環しない無限小数

　　$\sqrt{2}$　は，2 乗して2 になる正の数である.　$1^2=1$，　$2^2=4$　であるから，$\sqrt{2}$　は1 と2 の間にある. ここで，　$1.4^2=1.96<2$　，　$1.5^2=2.25>2$　であるから

$$1.4<\sqrt{2}<1.5$$

がいえる. さらに，　$1.41^2=1.9881<2$　，　$1.42^2=2.0164>2$　であるから

$$1.41<\sqrt{2}<1.42$$

がいえる. 同じようにして、　$1.41421<\sqrt{2}<1.41422$

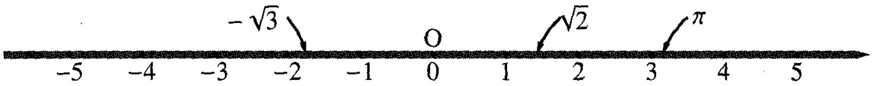
などがいえ，　$\sqrt{2}$　にいくらでも近い有限小数を次々に求めることができる. これを限りなく繰り返すとき，

両辺に現れる無限小数　$1.4142135623\cdots$

は　$\sqrt{2}$　を表すと考えられ，この小数は循環することがない.
もし，循環してしまうと　$\sqrt{2}$　が有理数になってしまう.

■実数

　　数直線上の点として表される数，すなわち有理数と無理数をあわせた数を**実数**(real number) という.
有理数と無理数を考えることにより，数直線上の点はすきま無くみっちり埋まる*6.



みっちり詰まった実数のイメージ

たとえば、　$-\sqrt{23}$，$-2\sqrt{3}$，$5\sqrt{2}$，$\sqrt{987}$　などは，どれも無理数である. また

　　円周率　$\pi=3.1415926$
　　ネイピア数　$e=2.7182818\cdots$

も無理数であることが知られている.
今後，　a，b，x　など，文字で数を表すとき，特にことわりが無ければ，その数は実数であるとする.
以上見てきたいろいろな数について，まとめると次のようになる.

数の分類

- **実数**
  - **有理数**
    - **整数**
      - 正の整数（**自然数**）
      - 0
      - 負の整数
    - 整数でない有理数
      - 有限小数
      - 循環小数（無限小数）
  - **無理数** ………… 循環しない無限小数（無限小数）

*6　このことを，実数の連続性(continuity) といい，有理数の稠密性と区別される.

【例題：数の分類】

次の実数について，以下の問に答えよ.

$$3,\ -2,\ 0,\ \frac{2}{5},\ -\frac{2}{5},\ \sqrt{3},\ 1.\dot{5}\dot{2},\ \frac{36}{6},\ -\sqrt{16},\ (\sqrt{5})^2,\ 2\pi$$

(1) 自然数を全て選べ. **(2)** 整数を全て選べ. **(3)** 有理数を全て選べ. **(4)** 無理数を全て選べ.

【解答】

(1) $3,\ \frac{36}{6},\ (\sqrt{5})^2$ ◀ $\frac{36}{6}=6$, $(\sqrt{5})^2=5$

(2) $3,\ -2,\ 0,\ \frac{36}{6},\ -\sqrt{16},\ (\sqrt{5})^2$ ◀ $-\sqrt{16}=-4$

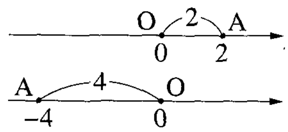
(3) $3,\ -2,\ 0,\ \frac{2}{5},\ -\frac{2}{5},\ 1.\dot{5}\dot{2},\ \frac{36}{6},\ -\sqrt{16},\ (\sqrt{5})^2$ ◀ $1.\dot{5}\dot{2}=\frac{151}{99}$ (p.3 循環小数参照)

(4) $\sqrt{3},\ 2\pi$

1.1.5 絶対値

■絶対値とは何か

数直線上で，原点 O と点 $A(a)$ の距離のことを a の**絶対値(absolute value)** といい， $|a|$ と書く. たとえば



$$|2|=2 \quad , \qquad |-4|=4$$

である. この例からわかるように

正の数はその値がそのまま絶対値となり、
負の数は符号を変えた数が絶対値となる.

符号を変えるには， -1 倍すればよい.

絶対値

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$ ← a が負の値なので $-a$ は正の値である

と表すことができる. 絶対値について

$|a| \geqq 0$ ， $|a| = |-a|$

が成り立つ.

直線上の**2**点 $A(a)$ と $B(b)$ の距離 AB は，
$a \leq b$ のときでも， $b < a$ のときでも，ともに

$$AB=|b-a|$$

で表すことができる.

【暗記：絶対値の性質】

a，b に関して次の等式が成り立つことを証明せよ．ただし，(3) では $b \neq 0$ とする.

(1) $|a|^2 = a^2$　　(2) $|ab| = |a||b|$　　(3) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

絶対値の中身が「0 以上か」「負か」で，絶対値の外れ方が違ってくるので，場合に分けて証明する。

【解答】

(1) **a)** $a \geq 0$ のとき，$|a| = a$ であるから

（左辺）$= |a|^2 = a^2 =$（右辺）

b) $a < 0$ のとき，$|a| = -a$ であるから

（左辺）$= |a|^2 = (-a)^2 = a^2 =$（右辺）

以上 **a)**, **b)** より，$|a^2| = a^2$ が成り立つ．

(2) 右欄外の表のように，**4** つの場合に分けて考える．

	$a \geqq 0$ のとき	$a < 0$ のとき
$b \geqq 0$ のとき	i)	iii)
$b < 0$ のとき	ii)	iv)

1) $a \geq 0$，$b \geq 0$ のとき

$ab \geq 0$，$|a| = a$，$|b| = b$ であるから

(左辺)$= |ab| = ab$

(右辺)$= |a||b| = ab$

となり成立．

2) $a \geq 0$，$b < 0$ のとき

$ab \geq 0$，$|a| = a$，$|b| = -b$ であるから

(左辺)$= |ab| = -ab$

(右辺)$= |a||b| = a(-b) = -ab$

となり成立．

◀ **b**は負の値なので，**-b** は正の値である．

3) **ii)** の証明において，a と b を入れ替えれば**iii)** の証明になっているので，成立する．

4) $a < 0$，$b < 0$ のとき

$ab > 0$，$|a| = -a$，$|b| = -b$ であるから

(左辺)$= |ab| = ab$

(右辺)$= |ab| = (-a)(-b) = ab$

以上より，いずれの場合も $|ab| = |a||b|$ が成り立つ．

(3) まず，$\left| \dfrac{1}{b} \right| = \dfrac{1}{|b|}$ ・・・①を示す。

a) $b > 0$ のとき

$\dfrac{1}{b} > 0$，$|b| = b$ であるから、

(①の左辺)$= \left| \dfrac{1}{b} \right| = \dfrac{1}{b}$

(①の右辺)$= \dfrac{1}{|b|} = \dfrac{1}{b}$

となり成立．

b) **b < 0** のとき

$\dfrac{1}{b} < 0$，$|b| = -b$ であるから

(①の左辺)$= \left| \dfrac{1}{b} \right| = -\dfrac{1}{b}$

(①の右辺)$= \dfrac{1}{|b|} = \dfrac{1}{-b} = -\dfrac{1}{b}$

となり成立．

以上 **a), b)** より①が成立．これより

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\left|a\cdot\frac{1}{b}\right|=|a|\left|\frac{1}{b}\right|=|a|\frac{1}{|b|}=\frac{|a|}{|b|}$$

となり， $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ が成り立つ．

絶対値の性質

a，b に関して次の等式が成り立つ．ただし，3) では $b \neq 0$ とする．

1) $|a|^2=a^2$ 2) $|ab|=|a||b|$ 3) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$

絶対値に関する以上の等式はこれからよく用いられる．

1) **2** 乗すると絶対値は外れる（付く）

2) 掛け算のところで絶対値は切れる（つながる）

3) 割り算のところで絶対値は切れる（つながる）

のように記憶するとよい．

§ 1.2　式の計算

この章で学ぶ式の計算は，大きく分けて**2** つある．

1 つは，式をつぎつぎに掛けていって細かい式の和で表すこと(展開)であり(**1.2.2**～**1.2.5**)，もう**1** つは，細かい式の和を大きな式の積で表すこと(因数分解)である(**1.2.6**～**1.2.8**)．

ただし，高校で扱われる式は，中学と比べてずっと複雑である．そこでまずは，複雑化した式を見通しよく扱うための方法を学ぶ．

1.2.1　多項式

■単項式とは何か

$3abx^2$ のように，いくつかの文字や数を掛け合わせてできる式を**単項式(monomial)** という．

単項式において，数の部分を**係数(coefficient)** といい，掛け合わせる文字の個数を**次数(degree)** という．たとえば，$3abx^2$ の係数は**3** で，次数は**4** である(右図参照)．

特に，1 や -3 などの数は，文字を含まない単項式とみなし，次数は 0 とする．ただし，単項式 0 については次数を考えないものとする．

係数

$$3\,abx^2$$

文字が 4 個掛けてあるので次数は 4

また，**0** でない**2** つの単項式について，次数が m の式と次数が n の式の積は，次数 $m+n$ の式になる．

$$\underbrace{3ab}_{\text{次数は }2} \times \underbrace{2xyz}_{\text{次数は }3} = \underbrace{6abxyz}_{\text{次数は }5\ (=2+3)}$$

単項式において，特定の文字に着目することがある．このとき，その他の文字を数と同様に扱う．

たとえば，単項式 $3abx^2$ では以下のようになる．

文字 x の単項式と考えた場合 $3abx^2=(3ab)x^2$ ，次数は**2**，係数は $3ab$

文字 a の単項式と考えた場合 $3abx^2=(3bx^2)a$ ，次数は**1**，係数は $3bx^2$

【例題:単項式の次数】

次の多項式について，**[ ]** 内の文字に着目したときの次数と係数を答えよ．

(1)　$3x^4y^5$　　[x], [y], [x と y]

(2)　$2abxy^2$　　[x], [y], [x と y]

【解答】

(1) **i)** x に着目すると，次数は**4**，係数は $3y^5$ である．　◀ $3x^4y^5=(3y^5)x^4$

ii) y に着目すると，次数は**5**，係数は $3x^4$ である．　◀ $3x^4y^5=(3x^4)y^5$

iii) x と y に着目すると次数は、**9**，係数は**3** である．

(2) **i)** x に着目すると，次数は**1**，係数は $2aby^2$ である．　◀ $2abxy^2=(2aby^2)x$

ii) y に着目すると，次数は**2**，係数は $2abx$ である．　◀ $2abxy^2=(2abx)y^2$

iii) x と y に着目すると 次数は**3**，係数は $2ab$ である．　◀ $2abxy^2=(2ab)xy^2$

■多項式とは何か

$2a-3b^2+ab$ のように，いくつかの単項式の和や差として表される式を**多項式(polynomial)**という（**整式(integral expression)** ともいう）．また，単項式は多項式の特別なものと考えられる．

多項式を構成する単項式を，単に**項(term)** という．たとえば，多項式 $2a-3b^2+ab$ において，$2a,-3b^2,ab$ （または $+ab$ ）はいずれも項である．このとき，負の符号も含めて項ということに注意しよう．

多項式の次数は，各項の次数のうち最大のもので定義される。
次数が n の多項式を，単に n **次式(expression ofdegree n)** という．
たとえば， $4a^2b+5ab$ は（ a と b について）3 次式である（右図参照）．

$$\underbrace{\underset{\text{次数は }3}{4a^2b} + \underset{\text{次数は }2}{5ab}}$$

多項式の次数は
（大きい方の） 3
つまり 3 次式

多項式の次数の大小は，「高い」「低い」で表されることが多い．
たとえば，多項式 $ab+2c$ は，多項式 $x+4$ よりも次数が「高い」．

多項式の項のうち，文字の部分が同じであるものを**同類項(similar term)** という．多項式は，同類項を**1** つにまとめて簡単にすることができる．
たとえば，多項式 $5a^2b+3ab-a^2b+2ab$ は，次のようにまとめることができる．

同類項

$$5a^2b+3ab-a^2b+2ab$$

同類項

$$=(5-1)a^2b+(3+2)ab$$
$$=4a^2b+5ab$$

← 同類項同士は係数を合わせて一つにまとめることが出来る。

多項式においても，特定の文字以外を，数とみなすことがある．
多項式 $ax^3y+bx+c$ について考えてみよう．
文字 x の多項式と考えたとき

文字 x の多項式と考えたとき

係数		係数		定数項
$ay\,x^3$	$+$	$b\ x$	$+$	c
3 次		1 次		0 次

- 次数は 3
- x^3 の係数は ay，x の係数は b
- 項 c の次数は 0 次

文字 y の多項式と考えたとき

係数		定数項
$ax^3\ y$	$+$	$(bx+c)$
1 次		0 次

- 次数は 1
- y の係数は ax^3
- $bx+c$ の部分は次数が 0 次

0 次の項のことを，**定数項(constant term)** という．
上の例では， x の多項式と考えると c が定数項であり， y の多項式と考えると $bx+c$ が定数項である．このように定数項が，2 つ以上の項からなる場合もある．

【例題：多項式の次数】

次の多項式を同類項でまとめよ．また，[ ] 内の文字に着目したとき何次式か．

(1) $x^3+xy^2-3xy^2$ 　　[x], [y]

(2) $x^4+(a^2-a)x^3y+2bxy^2+ax^3y-4bxy^2$ 　　[x], [y]

【解答】

(1) 同類項でまとめると

$$x^3+xy^2-3xy^2=x^3-2xy^2$$

i) x に着目すると
項 x^3 の次数は**3**，項 $2xy^2$ の次数は**1** であるから，
3 次式である．

◀ 各項の次数の中で最大のものを選ぶ

ii) y に着目すると
x^3 の次数は 0 (定数項), 項 $-2xy^2$ の次数は2であるから, 2 次式である.

◀ 各項の次数の中で最大のものを選ぶ

(2) 同類項でまとめると

$$x^4+(a^2-a)x^3y+2bxy^2+ax^3y-4bxy^2$$
$$= x^4+(a^2-a+a)x^3y+(2-4)bxy^2$$
$$= x^4+a^2x^3y-2bxy^2$$

i) x に着目すると
項 x^4 の次数は4, 項 a^2x^3y の次数は3, 項 $-2bxy^2$ の次数は1 であるから, 4 次式である.

◀ 各項の次数の中で最大のもの を選ぶ

ii) y に着目すると
項 x^4 の次数は0, 項 a^2x^3y の次数は1, 項 $-2bxy^2$ の次数は2 であるから, 2 次式である.

◀各項の次数の中で最大のものを選ぶ

■降べき・昇べきの順

多項式は, ある文字に着目した次数についてまとめると, 式が扱いやすい.
たとえば, 多項式 $-3x^2-7+4x^3+x$ を
(x について) 次数が低くなる順に整理すると $4x^3-3x^2+x-7$
(x について) 次数が高くなる順に整理すると $-7+x-3x^2+4x^3$
となる. 一般には, 次のようにいわれる.
次数が低くなる順に多項式を整理することを**降べきの順(descending order of power)** に整理するといい
次数が高くなる順に多項式を整理することを**昇べきの順(ascending order of power)** に整理するという,
今後は基本的に, 降べきの順に整理する習慣をつけよう.
ほとんどの場合, それによって式の見通しがよくなる.

【例題:降べきの順】

次の多項式を x について降べきの順に整理し, 各項の係数をいえ.

(1) $3x^2-12xy+4+3x^2-2x+5$

(2) $2x^2+2y^2-3xy+4y^2+2xy-x^2$

【解答】

(1) まず同類項でまとめてから, 降べきの順に整理する.

$$3x^2-12xy+4+3x^2-2x+5$$
$$= (3+3)x^2+(-12y-2)x+(4+5)$$
$$= 6x^2+(-12y-2)x+9$$

◀ $6x^2-(12y+2)x+9$ としてもよい.

これより, x^2 の係数は6, x の係数は $-12y-2$, 定数項は9 である.

(2) まず同類項でまとめてから, 降べきの順に整理する.

$$2x^2+2y^2-3xy+4y^2+2xy-x^2$$
$$= (2-1)x^2+(2-3)xy+(2+4)y^2$$
$$= x^2-xy+6y^2$$

これより, x^2 の係数は1, x の係数は $-y$, 定数項は $6y^2$ である.

◀ $x^2+(-y)x+6y^2$ とみなせるため

1.2.2　多項式の加法・減法

■多項式の加法・減法

　多項式の加法と減法は，同類項をまとめることによって行われる．

たとえば，　$A=3x^2-2x+1$　，　$B=2x^2+7x-3$　のとき

多項式の加法　$A+B=(3x^2-2x+1)+(2x^2+7x-3)$

$=3x^2-2x+1+2x^2+7x-3$　← かっこをはずした

$=(3+2)x^2+(-2+7)x+(1-3)$　← 同類項をまとめた

$=5x^2+5x-2$

多項式の減法　$A-B=(3x^2-2x+1)-(2x^2+7x-3)$

$=3x^2-2x+1-2x^2-7x+3$　←かっこをはずした

$=(3-2)x^2+(-2-7)x+(1+3)$　←同類項をまとめた

$=x^2-9x+4$

【例題：多項式の加法と減法】

$A=3x^2-2x+1$　，　$B=2x^2+7x-3$　のとき，次の式の計算をしなさい．

(1)　$A+B$

(2)　$A-B$

【解答】

(1)　$A+B=(3x^2-2x+1)+(2x^2+7x-3)$

$=3x^2-2x+1+2x^2+7x-3$　◀ かっこをはずした

$=(3+2)x^2+(2+7)x+(1-3)$　◀ 同類項をまとめた

$=5x^2+5x-2$

(2)　$A-B=(3x^2-2x+1)-(2x^2+7x-3)$

$=3x^2-2x+1-2x^2-7x+3$　◀ かっこをはずした

$=(3-2)x^2+(-2-7)x+(1+3)$　◀ 同類項をまとめた

$=x^2-9x+4$

上の計算は，同類項を縦にそろえて並べ，次のようにもできる．

i)

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 3x^2 & - & 2x & + & 1 \\ +) & 2x^2 & + & 7x & - & 3 \\ \hline & 5x^2 & + & 5x & - & 2 \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 3x^2 & - & 2x & + & 1 \\ -) & 2x^2 & + & 7x & - & 3 \\ \hline & x^2 & - & 9x & + & 4 \end{array}$$

1.2.3　多項式の乗法

■指数と指数法則

　実数**a** の**n** 個の積 $\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{n\text{ 個}}$ を　a^n　と書き，「　a　の　n　乗」と読む（右図参照）．このとき，　a　の右上に書かれた数　n　のことを**指数(exponent)** という．

指数が**1** のときは指数を書かない．実際，　$a^1=a$　である．

$$\underbrace{6\times6\times6\times6}_{4\text{ 個}}=6^4 \quad \leftarrow 指数は 4$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{3\text{ 個}}=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \leftarrow 指数は 3$$

a^2　のことを　a　の**平方(square)**，　a^3　のことを　a　の**立方(cube)** という．

また，　$a, a^2, a^3,$　を総称して　a　の**累乗(power)** という．

累乗に関して，一般に次のような**指数法則(power law)** が成り立つ．

指数法則

m, n が自然数のとき一般に次のような性質が成り立つ.

i) $a^m a^n = a^{m+n}$　　　　ii) $(a^m)^n = a^{mn}$　　　　iii) $(ab)^n = a^n b^n$

例 **i)**　$a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a) = a^6 (= a^{2+4})$

例 **ii)**　$(a^2)^4 = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) = a^8 (= a^{2 \times 4})$

例 **iii)**　$(a \times b)^4 = (a \times b)(a \times b)(a \times b)(a \times b) = a^4 \times b^4$

【例題：指数法則の練習】

次の式を計算して簡単にせよ.

(1) $x^2 x^3$　　**(2)** $(x^2)^3$　　**(3)** $(x^3)^5$　　**(4)** $(x y^2)^3$

【解答】

(1) $x^2 x^3 = x^{2+3} = x^5$　◀『指数法則**i)**』を使った

(2) $(x^2)^3 = x^{2 \times 3} = x^6$　◀『指数法則**ii)**』を使った

(3) $(x^3)^5 = x^{3 \times 5} = x^{15}$　◀『指数法則**ii)**』を使った

(4) $(x y^2)^3 = x^3 (y^{2 \times 3}) = x^3 y^6$　◀『指数法則**iii)**』を使った

■多項式の乗法

分配法則　$A(B+C) = AB + AC$　や　$(A+B)C = AC + BC$　は多項式においても成立する.
これを使って, たとえば　$(x^2+3)(x^2-4x+5)$　は次のように計算できる.

$(x^2+3)(x^2-4x+5)$

$= (x^2+3)A$　　← x^2-4x+5 を A とおいた

$= x^2 A + 3A$　　← 分配法則 $(A+B)C = AC + BC$ を使った

$= x^2(x^2-4x+5) + 3(x^2-4x+5)$　　← A を x^2-4x+5 に戻した

$= x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 12x + 15$　　← 分配法則 $A(B+C) = AC + BC$ を使った

$= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 15$　　← 同類項でまとめ降べきの順に並べた

ここでは,　x^2-4x+5　を　A　とおいて計算したが, それを省略して次のように計算することもできる.

$$(x^2+3)(x^2-4x+5) = (x^2+3)(x^2-4x+5)$$

$$= \overset{①}{x^4} - \overset{②}{4x^3} + \overset{③}{5x^2} + \overset{④}{3x^2} - \overset{⑤}{12x} + \overset{⑥}{15}$$

$$= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 15$$

	x^2	$-4x$	5
x^2	x^4 ①	$-4x^3$ ②	$5x^2$ ③
3	$3x^2$ ④	$-12x$ ⑤	15 ⑥

表の①, ②, ⋯ は, 左の式の①, ②, ⋯ に対応している.

このように, 多項式どうしの積を計算して単項式だけの和にすることを**展開(expansion)**するという

【例題：多項式の展開】

次の式を展開せよ.

(1) $(x+3)(2x+1)$　　**(2)** $(4x-1)(2x+3)$

(3) $(x+4)(2x^2-8x+5)$　　**(4)** $(3x-x^2)(5x^2-2x+1)$

【解答】

(1) $(x+3)(2x+1)=2x^2+x+6x+3$
$= 2x^2+7x+3$

(2) $(4x-1)(2x+3)=8x^2+12x-2x-3$
$= 8x^2+10x-3$

(3) $(x+4)(2x^2-8x+5)$
$= 2x^3-8x^2+5x+8x^2-32x+20$
$= 2x^3-27x+20$

(4) $(3x-x^2)(5x^2-2x+1)$
$= 15x^3-6x^2+3x-5x^4+2x^3-x^2$
$= -5x^4+17x^3-7x^2+3x$

1.2.4 多項式の乗法の公式

これから出てくる公式は，掛け算の九九のようなものだと思って繰り返し練習しよう．
はじめのうちは，記憶するのに苦労するかもしれないが，上手に使えるようになると多項式の計算が格段に早くなる．

■中学の復習

以下の公式はすでに中学で学習している．左の「**i)** うまい計算のやり方（○）」で，計算できるよう繰り返し練習しよう．

平方の公式

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$　　$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

i) うまい計算のやり方（○）

$$(3x+2)^2 = \underbrace{9x^2 + 2\cdot(3x)\cdot 2 + 4}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 9x^2 + 12x + 4$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(3x+2)^2 = (3x+2)(3x+2)$$
$$= 9x^2 + 6x + 6x + 4$$
$$= 9x^2 + 12x + 4$$

和と差の積の公式

2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

i) うまい計算のやり方（○）

$$(5x+2y)(5x-2y)$$
$$= \underbrace{(5x)^2 - (2y)^2}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 25x^2 - 4y^2$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(5x+2y)(5x-2y)$$
$$= 25x^2 - 10xy + 10yx - 4y^2$$
$$= 25x^2 - 4y^2$$

1 次式の積

3) $(x+b)(x+d) = x^2 + (b+d)x + bd$

i) うまい計算のやり方（○）

$$(x+3y)(x-4y)$$
$$= \underbrace{x^2 + (3y-4y)x + (3y)\cdot(-4y)}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= x^2 - xy - 12y^2$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(x+3y)(x-4y)$$
$$= x^2 - 4xy + 3yx - 12y^2$$
$$= x^2 - xy - 12y^2$$

■1 次式の積

$(ax+b)(cx+d)$ を展開すると

$$(ax+b)(cx+d) = (ax+b)\ (cx+d)$$
$$= \overset{①}{acx^2} + \overset{②}{adx} + \overset{③}{bcx} + \overset{④}{bd}$$
$$= acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

	cx	d
ax	acx^2	adx
b	bcx	bd

であるから，$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ が成り立つ.
これを使い，たとえば $(2x+3y)(5x-4y)$ は次のように計算する.

i) うまい計算のやり方（○）

$$(2x+3y)(5x-4y)$$
$$= \underbrace{10x^2 + (-8y+15y)x + (3y)\cdot(-4y)}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 10x^2 + 7xy - 12y^2$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(2x+3y)(5x-4y)$$
$$= 10x^2 - 8xy + 15yx - 12y^2$$
$$= 10x^2 + 7xy - 12y^2$$

1 次式の積の公式

4) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

【例題：多項式の展開～1 次式の積の公式～】

次の多項式を展開し整理せよ.

(1) $(x+2)(2x+1)$　　**(2)** $(2x+3)(3x-2)$

(3) $(5x-3y)(2x-y)$　　**(4)** $\left(\dfrac{1}{3}x-2y\right)\left(2x-\dfrac{1}{2}y\right)$

【解答】

(1) $(x+2)(2x+1)=2x^2+5x+2$

(2) $(2x+3)(3x-2)=6x^2+5x-6$

(3) $(5x-3y)(2x-y)=10x^2-11xy+3y^2$

(4) $\left(\dfrac{1}{3}x-2y\right)\left(2x-\dfrac{1}{2}y\right)=\dfrac{2}{3}x^2+\left(-\dfrac{1}{6}-4\right)xy+y^2=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{25}{6}xy+y^2$

◄ $(x+2)\ (2x+1)$

◄ $(2x+3)\ (3x-2)$

◄ $(5x-3y)\ (2x-y)$

■立方の公式1

$(a+b)^3$ を展開すると

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$$
$$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$= (a+b)\ (a^2+2ab+b^2)$$
$$= \overset{\textcircled{1}}{a^3} + \overset{\textcircled{2}}{2a^2b} + \overset{\textcircled{3}}{ab^2} + \overset{\textcircled{4}}{ba^2} + \overset{\textcircled{5}}{2ab^2} + \overset{\textcircled{6}}{b^3}$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

	a^2	$2ab$	b^2
a	a^3	$2a^2b$	ab^2
b	ba^2	$2ab^2$	b^3

であるから，$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ が成り立つ．
これを使い，たとえば $(2x+y)^3$ は次のように計算する．

i) うまい計算のやり方（○）

$$(2x+y)^3$$
$$= \underbrace{(2x)^3 + 3\cdot(2x)^2y + 3\cdot(2x)y^2 + y^3}_{\text{慣れると省略できる}}$$
$$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$(2x+y)^3$$
$$= (2x+y)(2x+y)^2$$
$$= (2x+y)(4x^2+4xy+y^2)$$
$$= 8x^3 + 8x^2y + 2xy^2 + 4x^2y + 4xy^2 + y^3$$
$$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

同様に計算すれば $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ も成り立つ．

立方の公式 1

5) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$　　$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

参考として

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$(a+b)^n$ の展開については、二項定理の節で学ぶ。

■立方の公式2

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を展開すると

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = (a+b)\ (a^2-ab+b^2)$$
$$= \overset{\textcircled{1}}{a^3} - \overset{\textcircled{2}}{a^2b} + \overset{\textcircled{3}}{ab^2} + \overset{\textcircled{4}}{ba^2} - \overset{\textcircled{5}}{ab^2} + \overset{\textcircled{6}}{b^3}$$
$$= a^3 + b^3$$

	a^2	$-ab$	b^2
a	a^3	$-a^2b$	ab^2
b	ba^2	$-ab^2$	b^3

であるから，$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ が成り立つ．

これを使い, たとえば $(3x+1)(9x^2-3x+1)$ は次のように計算する.

i) うまい計算のやり方（○）

$$
\begin{aligned}
&(3x+1)(9x^2-3x+1)\\
&=\underbrace{(3x+1)\left\{(3x)^2-(3x)\cdot 1+1^2\right\}}_{\text{慣れると省略できる}}\\
&=27x^3+1
\end{aligned}
$$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$$
\begin{aligned}
&(3x+1)(9x^2-3x+1)\\
&=27x^3-9x^2+3x+9x^2-3x+1\\
&=27x^3+1
\end{aligned}
$$

また, 同様に $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ も成り立つ.

立方の公式 2

6) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

左辺の $a\pm b$ と右辺の $a^3\pm b^3$ は符号が一致する, と覚えておこう.
ただし, この公式を展開のために使う機会はほとんどなく,「因数分解」でよく利用される.

【例題: 多項式の展開〜立法の公式〜】

次の多項式を展開せよ.

(1) $(2x+1)^3$ **(2)** $(3a-2)^3$

(3) $(x+2)(x^2-2x+4)$ **(4)** $(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)$

【解答】

(1) $(2x+1)^3=(2x)^3+3(2x)^2\cdot 1+3\cdot(2x)\cdot 1^2+1^3$
$= 8x^3+12x^2+6x+1$ ◀『立方の公式1』(p.17)

(2) $(3a-2)^3=(3a)^3+3\cdot(3a)^2\cdot(-2)+3\cdot(3a)\cdot(-2)^2+(-2)^3$
$= 27a^3-54a^2+36a-8$ ◀『立方の公式1』(p.17)

(3) $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+2^3=x^3+8$ ◀『立方の公式2』(p.18)

(4) $(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)=(ab)^3-3^3=a^3b^3-27$ ◀『立方の公式2』(p.18)

【例題: 多項式の展開の練習〜その1〜】

次の多項式を展開せよ.

(1) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)^2$ **(2)** $\left(3a-\frac{1}{2}b\right)^2$ **(3)** $(2x-5y)(2x+5y)$

(4) $(-2ab+3c)(2ab+3c)$ **(5)** $(x+5)(x-8)$ **(6)** $(a^2-3)(a^2+7)$

(7) $(2x+1)(x-3)$ **(8)** $(3a-2)(4a+1)$ **(9)** $(x-3)^3$

(10) $(2x+4y)^3$ **(11)** $(2x-5)(4x^2+10x+25)$ **(12)** $(p+q)(3p^2-3pq+3q^2)$

【解答】

(1) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)^2=\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}$ ◀『平方の公式』(p.15)

(2) $\left(3a-\frac{1}{2}b\right)^2=9a^2-3ab+\frac{1}{4}b^2$ ◀『平方の公式』(p.15)

(3) $(2x-5y)(2x+5y)=4x^2-25y^2$ ◀『和と差の積の公式』(p.15)

(4) $(-2ab+3c)(2ab+3c)=(3c-2ab)(3c+2ab)=9c^2-4a^2b^2$ ◀『和と差の積の公式』(p.15)

(5) $(x+5)(x-8)=x^2-3x-40$ ◀『1 次式の積の公式～特殊形』(p.16)

(6) $(a^2-3)(a^2+7)=a^4+4a^2-21$ ◀『1 次式の積の公式～特殊形』(p.16)

(7) $(2x+1)(x-3)=2x^2-5x-3$ ◀『1 次式の積の公式～一般形』(p.16)

(8) $(3a-2)(4a+1)=12a^2-5a-2$ ◀『1 次式の積の公式～一般形』(p.16)

(9) $(x-3)^3=x^3-9x^2+27x-27$ ◀『立方の公式1』(p.17)

(10) $(2x+4y)^3=8x^3+48x^2y+96xy^2+64y^3$ ◀『指数法則iii)』(p.14)

(11) $(2x-5)(4x^2+10x+25)=(2x)^3-(5y)^3=8x^3-125y^3$ ◀『立方の公式2』(p.18)

(12) $(p+q)(3p^2-3pq+3q^2)=3(p^3-q^3)=3p^3-3q^3$ ◀『立方の公式2』(p.18)

1.2.5　展開の工夫

1.2.4『**多項式の乗法の公式**』で学んだ公式を工夫して用いると，複雑な式の計算がかなり容易にできるようになる．ここでは，展開の工夫として代表的な2 つの方法を取り上げる．

■式の一部をまとめる

多項式の一部を1 つの文字とみなすと，今までの公式がより広く使える．
まず，$(a+b+c)^2$ の展開を考えてみよう．$A=a+b$ とおくと

$(a+b+c)^2$
$=(A+c)^2$ ← $A=a+b$ とおき，式の一部を一つの文字とみなす
$=A^2+2Ac+c^2$ ←『平方の公式』(p.15)
$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$ ← A を $a+b$ に戻す
$=a^2+2ab+b^2+2ca+2bc+c^2$ ←『平方の公式』(p.15)
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ ← この順番にすると式が見やすい

であるから，$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ が成り立つ．

これを使い，たとえば $(2x+y-3)^2$ は次のように計算する．

i) うまい計算のやり方（○）

$(2x+y-3)^2$
$=\underbrace{(2x)^2+y^2+(-3)^2+2\cdot 2xy+2\cdot y(-3)+2\cdot(-3)2x}_{\text{慣れると省略できる}}$
$=4x^2+y^2+9+4xy-6y-12x$

ii) 普通の計算のやり方（×）

$(2x+y-3)^2$
$=(2x+y-3)(2x+y-3)$
$=4x^2+2xy-6x+2yx+y^2-3y-6x-3y+9$
$=4x^2+y^2+9+4xy-6y-12x$

3 項の平方の公式

7) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

次に、 $(x+y-z)(x-y+z)$ の展開を考えてみよう。
$-y+z=-(y-z)$ に注意し、2か所にある $y-z$ を A とおくとよい

$$
\begin{aligned}
&(x+y-z)(x-y+z) \\
&=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\} && \leftarrow -y+z=-(y-z) \\
&=(x+A)(x-A) && \leftarrow A=y-z \text{ とおき，式の一部を１つの文字とみなす} \\
&=x^2-A^2 && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』 (p.20)} \\
&=x^2-(y-z)^2 && \leftarrow A \text{ を } y-z \text{ に戻す} \\
&=x^2-(y^2-2yz+z^2) && \leftarrow \text{『平方の公式』 (p.20)} \\
&=x^2-y^2+2yz-z^2 && \leftarrow \text{符号に注意して（ ）を外す}
\end{aligned}
$$

はじめのうちは、共通部分をAやX等に置き換えるが、慣れてきたら置き換えずに計算できるように練習しよう。

【例題：多項式の展開の練習～その２～】
次の多項式を展開せよ。

(1) $(3a-b+3c)^2$　　**(2)** $(a^2+a-1)^2$

(3) $(x+y+z)(x+y-z)$　　**(4)** $(2a-b+c)(2a+b+c)$

【解答】

(1) $(3a-b+3c)^2=9a^2+b^2+9c^2-6ab-6bc+18ca$　◀『3 項の平方の公式』(p.19)

(2) $(a^2+a-1)^2=(a^2)^2+a^2+(-1)^2+2a^2a+2a(-1)+2(-1)a^2$　◀『3 項の平方の公式』(p.19)
$\quad = a^4+2a^3-a^2-2a+1$

(3) $(x+y)$ が共通していることに注意して
$(x+y+z)(x+y-z)=(x+y)^2-z^2$　◀『和と差の積の公式』(p.15)
$\quad = x^2+2xy+y^2-z^2$　◀『平方の公式』(p.15)

(4) $(2a+c)$ が共通していることに注意して
$(2a-b+c)(2a+b+c)=(2a+c)^2-b^2$　◀『和と差の積の公式』(p.15)
$\quad = 4a^2+4ac+c^2-b^2$　◀『平方の公式』(p.15)

■掛け算の順序の工夫

35×6 の計算は，**35×2×3＝70×3＝210** とすると楽である．多項式の展開においても，掛け算の順序を考えると計算が楽にできることがある．

$$
\begin{aligned}
&(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2) && \leftarrow \text{前から順に計算するととても大変} \\
&=(a-b)(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2) && \leftarrow (a-b) \text{ は } (a+b) \text{ と相性がいいし} \\
&=\{(a-b)(a+b)\}\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\} && \leftarrow (a-b) \text{ は } (a^2+ab+b^2) \text{ とも相性がいい} \\
&=(a^2-b^2)(a^3-b^3) && \leftarrow \text{『和と差の積の公式』 (p.20) と『立方の公式１』 (p.22)} \\
&=a^5-a^3b^2-a^2b^3+b^5
\end{aligned}
$$

【例題：多項式の展開の練習～その３～】
次の多項式を展開せよ.

(1) $(x+1)(x-1)(x^2+1)$　　**(2)** $(a-2)(a+2)(a^2+4)(a^4+16)$

(3) $(x-1)(x-3)(x+3)(x+1)$　　**(4)** $(a-1)(a-2)(a^2-3a)$

【解答】

(1) まず $(x+1)(x-1)$ から計算する.

$$(x+1)(x-1)(x^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)$$ ◀『和と差の積の公式』(p.15)
$$= x^4-1$$ ◀『和と差の積の公式』(p.15)

(2) まず, $(a-2)(a+2)$ から計算をはじめる.

$$(a-2)(a+2)(a^2+4)(a^4+16) = (a^2-4)(a^2+4)(a^4+16)$$ ◀『和と差の積の公式』(p.15)
$$= (a^4-16)(a^4+16)$$ ◀『和と差の積の公式』(p.15)
$$= a^8-256$$ ◀『和と差の積の公式』(p.15)

(3) $(x-1)$ と $(x+1)$ の積を計算し, $(x-3)$ と $(x+3)$ の積を計算し, 最後にこの両者の積を計算する.

$$(x-1)(x-3)(x+3)(x+1)=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$$
$$= (x-2-1)(x^2-9)$$ ◀『和と差の積の公式』(p.15)
$$= x^4-10x^2+9$$ ◀『1 次式の積の公式～ 特殊形』(p.20)

(4) $(a-1)(a-2)(a^2-3a)$

$= (a^2-3a+2)(a^2-3a)$ ← a^2-3a が共通している

$= (a^2-3a)^2+2(a^2-3a)$ ← a^2-3a を A とおくと, $(A+2)A=A^2+2A$ となるため

$= a^4-6a^3+9a^2+2a^2-6a$

$= a^4-6a^3+11a^2-6a$

1.2.6 基本的な因数分解

■因数と因数分解

多項式の展開とは逆に, **1** つの多項式**A** を**2** つ以上の多項式**B**, **C**, の積で表すことを, **A** の**因数分解(factorization)** といい, **B** や**C** などを, **A** の**因数(factor)** という.

■共通因数

多項式において, 各項に共通する因数を**共通因数(common factor)** という.
多項式の各項に共通因数があれば, それをかっこの外にくくり出し因数分解できる.

【例題:共通因数による因数分解】

次の式を因数分解せよ.

(1) a^4-2a　　**(2)** $6a^2b+4ab^2-2ab$

(3) $p(2x-y)+q(y-2x)$　　**(4)** $3a(x-y)+6b(x-y)+9c(y-x)$

【解答】

(1) a^4 と $-2a$ の共通因数は a であるから ◀ 共通因数 a をくくり出す

$$a^4-2a=a(a^3-2)$$

(2) $6a^2b$ と $4ab^2$ と $-2ab$ の共通因数は $2ab$ であるから ◀ 共通因数 $2ab$ をくくり出す

$$6a^2b+4ab^2-2ab=2ab(3a+2b-1)$$

(3) $y-2x=-(2x-y)$ であるから $2x-y$ が共通因数となる. ◀ 共通因数である $2x-y$ でくくる

$$p(2x-y)+q(y-2x)=p(2x-y)-q(2x-y)$$
$$=(p-q)(2x-y)$$

(4) $y-x=-(x-y)$ であるから $x-y$ が共通因数となる. ◀ 共通因数である $3(x-y)$ でくくる

$$3a(x-y)+6b(x-y)+9c(y-x)$$
$$=3a(x-y)+6b(x-y)-9c(x-y)$$
$$=3(x-y)(a+2b-3c)$$

1.2.7 多項式の因数分解の公式

多項式の各項に共通因数がなく，因数分解できそうになくても，多項式の乗法の公式**(p.15〜)**を逆に使えば因数分解できることがある．

■『平方の公式』を逆に利用した因数分解

平方の公式 (p.15) の逆利用

1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$　　　　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

【例題：平方の公式を逆に利用した因数分解】

次の式を因数分解せよ．

(1) x^2+6x+9　　**(2)** $4x^2-12xy+9y^2$　　**(3)** a^4+4a^2+4

【解答】

(1) $x^2+6x+9=x^2+2\cdot 3x+3^2=(x+3)^2$

(2) $4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2(2x)(3y)+(3y)^2=(2x-3y)^2$

(3) $a^2=A$ とおくと，$a^4=A^2$ であるので，

$a^4+4a^2+4=A^2+4A+4 = (A+2)^2=(a^2+2)^2$

◀ 慣れればおきかえずにできる

因数分解後の式は，「展開」してみると因数分解前の式と同じになので，自分の実行した因数分解が正しいかどうかは，展開することによって確認できる．少し面倒だが，因数分解した後には，かならず展開して確認するようにしよう．

まちがった因数分解をしても何にもならないのだから….

■2 重根号(double radical sign) について

$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ とは「**2** 乗して $8+2\sqrt{15}$ になる正の数」を表す．このような，根号の中に根号が含まれる式を**2** 重根号という．一見複雑な形をしているが，実は $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ である．
実際，$\sqrt{5}+\sqrt{3}$ を**2** 乗すると，$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=5+3+2\sqrt{15}=8+2\sqrt{15}$ となる．

2 重根号を外す仕組みは，以下のようにして考えられる．

$a>0, b>0$ のとき，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$ であり，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ であるから

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\quad\cdots\cdots①$$

また，$a>b>0$ のとき，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{ab}$ であり，$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ であるから

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}\quad\cdots\cdots②$$

これら①、②を用いると，根号を**2** 重に含む式を簡単にできる場合がある．
たとえば，$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ は ①を用いて

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot 3}}=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

として，**2** 重根号をはずすことができる．

【例題:2 重根号をはずす】

次の2 重根号をはずせ.

(1) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$ **(2)** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ **(3)** $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

【解答】

(1) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$

◀ 足して 9, 掛けて 14 になる数を探す. $(\bigcirc-\triangle)^2$ を作るときは, $\bigcirc > \triangle$ を満たすように作るとよい.

(2) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$

◀ まず $\sqrt{\bigcirc\pm2\sqrt{\triangle}}$ の形になおし, 変形ができるようにする.

◀ 平方の形にした（足して 7, 掛けて 12 になる数を探す）

◀ 2 重根号をはずした

(3) $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{3-\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{1})^2}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

◀ 内側の $\sqrt{\ }$ の前に 2 が無くても, 分母・分子に $\sqrt{2}$ を掛けて $2\sqrt{\ }$ の形を作る

◀ 足して 6, 掛けて 5 になる数を探す. $(\bigcirc-\triangle)^2$ を作るときは, $\bigcirc > \triangle$ を満たすように作ると

◀ 最後は分母を有理化しておく

■『和と差の積の公式』を逆に利用した因数分解

和と差の積の公式 (p.15) の逆利用

2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

【例題:和と差の積の公式を逆に利用した因数分解】

次の式を因数分解せよ.

(1) a^2-9 **(2)** $4x^2-25y^2$

(3) a^4-1 **(4)** $(a-b)^2-c^2$

【解答】

(1) $a^2-9=a^2-3^2 = (a+3)(a-3)$

(2) $4x^2-25y^2=(2x)^2-(5y)^2=(2x+5y)(2x-5y)$

(3) $a^2=A$ とおくと, $a^4=A^2$ であるので,

$a^4-1=A^2-1^2=(A+1)(A-1)=(a^2+1)(a^2-1)$

$= (a^2+1)(a+1)(a-1)$

◀ 慣れればAを使わずにできる

◀ a^2-1 はまだ分解できる

(4) $a-b=X$ とおけば,

$(a-b)^2-c^2 = X^2-c^2=(X+c)(X-c)$

$= (a-b+c)(a-b-c)$

◀ 慣れればXを使わずにできる

$\circ^2-\triangle^2$ の形を見たら因数分解, とすぐに気付けるようになろう.

■『1 次式の積の公式』を逆に利用した因数分解

1 次式の積の公式 (p.15) の逆利用

3) $x^2 + (b+d)x + bd = (x+b)(x+d)$

4) $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

まず，簡単な例として $x^2 + 5x + 6$ の因数分解の手順を考えてみよう．

STEP1

展開して $x^2 + 5x + 6$ になる 1 次式の積を考えるため，まず右図のように表を書く．表のます目の中には，x^2 の項と定数項を斜めに書いておく．

	x^2	
		6

STEP2

x^2 を分解すると $x \times x$ になり，6 を分解すると 1×6 または 2×3 になることから，右の 2 つの表を作る (6 の分解には，$(-1) \times (-6)$ や $(-2) \times (-3)$ なども考えられる．しかし，x の係数が正の数 5 なので，この因数分解ではその可能性はない)．

	x	6
x	x^2	
1		6

	x	3
x	x^2	
2		6

STEP3

表の残りの部分を埋めることにより，新しくできた右の太字の式を加えて，x の係数が 5 になっているほうを選び，それを利用して因数分解すれば完成である．

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

×	x	6
x	x^2	$\mathbf{6x}$
1	$\mathbf{x}$	6

○	x	3
x	x^2	$\mathbf{3x}$
2	$\mathbf{2x}$	6

【例題:1 次式の積の公式を逆に利用した因数分解～その1～】

次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2+10x+21$　　**(2)** x^2-6x+8

(3) $a^2+3ab-18b^2$　　**(4)** a^2-4a-3^2

【解答】

◀ 下の注には，因数分解するときに作られるであろう表の例(一部)を載せてある.

(1) $x^2+10x+21$

$= x^2+(3+7)x+3\cdot 7$

$= (x+3)(x+7)$

◀

×	x	21
x	x^2	$21x$
1	x	21

○	x	7
x	x^2	$7x$
3	$3x$	21

(2) x^2-6x+8

$= x^2+(-2-4)x+(-2)(-4)$

$= (x-2)(x-4)$

◀

×	x	-8
x	x^2	$-8x$
-1	$-x$	8

○	x	-4
x	x^2	$-4x$
-2	$-2x$	8

(3) $a^2+3ab-18b^2$

$= a^2+(-3b+6b)a+(-3b)(6b)$

$= (a-3b)(a+6b)$

◀

×	a	$-18b$
a	a^2	$-18ab$
$-b$	$-ab$	$-18b^2$

×	a	$9b$
a	a^2	$9ab$
$-2b$	$-2ab$	$-18b^2$

○	a	$6b$
a	a^2	$6ab$
$-3b$	$-3ab$	$-18b^2$

(4) a^2-4a-3^2

$= a^2+(4-8)a+4(-8)$

$= (a+4)(a-8)$

◀

○	a	-8
a	a^2	$-8a$
4	$4a$	-32

次に，少し難しい例として　$3x^2+11x+6$　の因数分解を考えてみよう．

STEP1

展開して $3x^2+11x+6$ になる 1 次式の積を考えるため，まず右のように表を書く．さきほどと同じように，表のます目の中には，x^2 の項と定数項を斜めに書いておく．

	$3x^2$	
		6

STEP2

$3x^2$ を分解すると $x\times 3x$ になり，6 を分解すると 1×6 または 2×3 になることから，右の 4 つの表を作る（6 の分解には，$(-1)\times(-6)$ や $(-2)\times(-3)$ なども考えられる．しかし，やはりさきほどと同じように，x の係数が正の数 11 なので，この因数分解ではその可能性はない）．

	$3x$	6
x	$3x^2$	
1		6

	$3x$	3
x	$3x^2$	
2		6

	$3x$	2
x	$3x^2$	
3		6

	$3x$	1
x	$3x^2$	
6		6

STEP3

表の残りの部分を埋めることにより，新しくできた右の太字の式を加えて，x の係数が 11 になっているものを選び，それを利用して因数分解すれば完成である．

$$3x^2+11x+6=(x+3)(3x+2)$$

×	$3x$	6
x	$3x^2$	$6x$
1	$3x$	6

×	$3x$	3
x	$3x^2$	$3x$
2	$6x$	6

○	$3x$	2
x	$3x^2$	$2x$
3	$9x$	6

×	$3x$	1
x	$3x^2$	x
6	$18x$	6

上では説明の都合上，少々多めに表を作ったが，慣れてくると正解の表を一発でかけるようになる．初めのうちは試行錯誤して，コツをつかむことが大切である．

【例題：1 次式の積の公式を逆に利用した因数分解～その2～】

次の式を因数分解せよ．

(1)　$2x^2+3x+1$　　　**(2)**　$5a^2+7ab+2b^2$

(3)　$8x^2-10xy+3y^2$　　　**(4)**　$12a^2+7a-12$

【解答】

(1)　$2x^2+3x+1$

$$=2x^2+(2+1)x+1$$
$$=(x+1)(2x+1)$$

(2)　$5a^2+7ab+2b^2$

$$=5a^2+(5+2)ab+2b^2$$
$$=(a+b)(5a+2b)$$

(3)　$8x^2-10xy+3y^2$

$$=8x^2+(-6-4)xy+3y^2$$
$$=(2x-y)(4x-3y)$$

◀ 因数分解するときに作られるであろう，たすき がけの例（の一部）を載せておく

○	$2x$	1
x	x^2	x
1	$2x$	1

○	$5a$	$2b$
a	$5a^2$	$2ab$
b	$5ab$	$2b^2$

×	$5a$	b
a	$5a^2$	ab
$2b$	$10ab$	$2b^2$

×	$8x$	$-3y$
x	$8x^2$	$-3xy$
$-y$	$-8xy$	$3y^2$

×	$8x$	$-y$
x	$8x^2$	$-xy$
$-3y$	$-24xy$	$3y^2$

○	$4x$	$-3y$
$2x$	$8x^2$	$-6xy$
$-y$	$-4xy$	$3y^2$

×	$4x$	$-y$
$2x$	$8x^2$	$-2xy$
$-3y$	$-12xy$	$3y^2$

(4) $12a^2+7a-12$
$= 12a^2+(16-9)a-12$
$= (3a+4)(4a-3)$

×	$4a$	3
$3a$	$12a^2$	$9a$
-4	$-16a$	-12

○	$4a$	-3
$3a$	$12a^2$	$-9a$
4	$16a$	-12

■『3 項の平方の公式』を逆に利用した因数分解

3 項の平方の公式の逆利用

5) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

【例題:3 項の平方の公式を逆に利用した因数分解】
次の式を因数分解せよ.
(1) $a^2+4b^2+c^2+4ab+4bc+2ca$　　(2) $4x^2+y^2+1+4xy+2y+4x$
(3) $4a^2+b^2+1+4ab-2b-4a$　　(4) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6zx$

【解答】
(1) $a^2+4b^2+c^2+4ab+4bc+2ca$
$= a^2+(2b)^2+c^2+2a(2b)+2(2b)c+2ca$
$= (a+2b+c)^2$

	a	$2b$	c
a	a^2	$2ab$	ac
$2b$	$2ab$	$4b^2$	$2bc$
c	ac	$2bc$	c^2

(2) $4x^2+y^2+1+4xy+2y+4x$
$= (2x)^2+y^2+1^2+2\cdot(2x)\cdot y+2\cdot y\cdot 1+2\cdot 1\cdot(2x)$
$= (2x+y+1)^2$

	$2x$	y	1
$2x$	$4x^2$	$2xy$	$2x$
y	$2xy$	y^2	y
1	$2x$	y	1

(3) $4a^2+b^2+1+4ab-2b-4a$
$= (2a)^2+b^2+(-1)^2+2(2a)b+2b(-1)+2(-1)(2a)$
$= (2a+b-1)^2$

	$2a$	b	-1
$2a$	$4a^2$	$2ab$	$-2a$
b	$2ab$	b^2	$-b$
-1	$-2a$	$-b$	1

(4) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6zx$
$= x^2+(2y)^2+(3z)^2+2x(-2y)+2(-2y)(-3z)+2(-3z)x$
$= (x-2y-3z)^2$

■『立方の公式1』を逆に利用した因数分解

立方の公式 1 (p.18) の逆利用

6) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$　　$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

【例題:立方の公式1 を逆に利用した因数分解】
次の式を因数分解せよ.
(1) $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$　　(2) $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$
(3) $x^3-6x^2+12x-8$　　(4) $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

【解答】
(1) $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$
$= x^3+3x^2(3y)+3x(3y)2+(3y^3) = (x+3y)^3$

(2) $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$
$= (2a)^3+3(2a)2b+3(2a)b^2+b^3=(2a+b)^3$

(3) $x^3-6x^2+12x-8$
$= x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3 = (x-2)^3$

(4) $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$
$= (3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot(2y)+3\cdot(3x)(2y)^2-(2y)^3 = (3x-2y)^3$

このタイプの因数分解では, $a^3+\circ+\triangle+b^3$ をみて, とりあえず $(a+b)^3$ としておいてから, それを展開して確かめるという手順を踏むとよい.

■『立方の公式2』を逆に利用した因数分解

立方の公式 2 (p.18) の逆利用

7) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　　　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

【例題:立方の公式2 を逆に利用した因数分解】
次の式を因数分解せよ.

(1) x^3+27　　(2) $8a^3+1$
(3) $8x^3-27y^3$　　(4) $64a^3-125b^3$

【解答】

(1) $x^3+27=x^3+3^3$
$= (x+3)(x^2-3x+9)$

	x^2	$-3x$	9
x	x^3	$-3x^2$	$9x$
3	$3x^2$	$-9x$	27

(2) $8a^3+1=(2a)^3+1^3$
$= (2a+1)(4a^2-2a+1)$

	$4a^2$	$-2a$	1
$2a$	$8a^3$	$-4a^2$	$2a$
1	$4a^2$	$-2a$	1

(3) $8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3$
$= (2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

	$4x^2$	$6xy$	$9y^2$
$2x$	$8x^3$	$12x^2y$	$18xy^2$
$-3y$	$-12x^2y$	$-18xy^2$	$-27y^3$

(4) $64a^3-125b^3$
$= (4a)^3-(5b)^3$
$= (4a-5b)(16a^2+20ab+25b^2)$

	$16a^2$	$20ab$	$25b^2$
$4a$	$64a^3$	$80a^2b$	$100ab^2$
$-5b$	$-80a^2b$	$-100ab^2$	$-125b^3$

$\circ^3+\triangle^3$ の形の因数分解は忘れやすいので気をつけよう. また,

$2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$

などは, 整数の3 乗(立方数という)であることに気づけるようにしておこう.

■因数分解の公式のまとめ

最も大事なことは,「いつ, どの因数分解を使うのか」見極めることである.

【例題:因数分解の練習～その1～】
次の式を因数分解せよ.

(1) $a^2-14ab+49b^2$　　(2) $2x^2-x-3$　　(3) $343a^3-8b^3$
(4) $4x^2+23x-6$　　(5) $3b^2-27c^2$　　(6) $3x^3+81y^3$
(7) $2a^4-32$　　(8) x^8-1　　(9) a^6-b^6
(10) $5(x+y)^2-8(x+y)-4$　　(11) $(a+b)^2+10c(a+b)+25c^2$

【解答】

(1) $a^2-14ab+49b^2=(a-7b)^2$ ◀『平方の公式の逆利用』

(2) $2x^2-x-3=(2x-3)(x+1)$ ◀『1 次式の積の公式の逆利用』

(3) $343a^3-8b^3=(7a-2b)(49a^2+14ab+4b^2)$ ◀『立方の公式2 の逆利用』

(4) $4x^2+23x-6=(4x-1)(x+6)$ ◀『1 次式の積の公式の逆利用』

(5) $3b^2-27c^2=3(b^2-9c^2)=3(b+3c)(b-3c)$ ◀『立方の公式2 の逆利用』

(6) $3x^3+81y^3=3(x^3+27y^3)$

$= 3(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$ ◀『立方の公式2 の逆利用』

(7) $2a^4-32=2(a^4-16)$

$= 2(a^2+4)(a^2-4)$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』

$= 2(a^2+4)(a+2)(a-2)$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』

(8) $(x^8-1)=(x^4+1)(x^4-1)$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』

$= (x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』

$= (x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』

(9) $a^6-b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$ ◀『和と差の積の公式の逆利用』

$= \{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\}$ ◀『立方の公式2 の逆利用』

$= (a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

(10) $x+y=X$ とおくと

$5X^2-8X-4=(5X+2)(X-2)$ ◀『1 次式の積の公式の逆利用』

$= (5x+5y+2)(x+y-2)$

(11) $a+b=X$ とおくと

$X^2+10cX+25c^2=(X+5c)^2$ ◀『平方の公式の逆利用』

$= (a+b+5c)^2$

1.2.8 難度の高い因数分解

■次数の低い文字に着目する因数分解

2 つ以上の文字を含む多項式では，最も次数の低い文字に着目して整理すると，因数分解がしやすくなることが多い.

$a^2+ab-3a+b-4$ という式には，共通因数も無く，どの公式にも当てはまらないが

$a^2+ab-3a+b-4$ ← a については2次式， b については1次式

$= (a+1)b+a^2-3a-4$ ← 次数の低い b について，降べきの順に整頓

$= (a+1)b+(a-4)(a+1)$ ← 定数項を因数分解したら $a+1$ が共通因数になった

$= (a+1)(a+b-4)$ ← $b+a-4$ は順番を入れ替えておこう

【例題：次数の低い文字に着目する因数分解】

次の式を因数分解せよ.

(1) $a^2+ab+bc+ca$　(2) $x^2-2xy+2y-1$

(3) $x^2+2xy+3x+4y+2$　(4) $a^3+ab^2+b^2+1$

【解答】

(1) b について降べきの順に整理すると

$a^2+ab+bc+ca=(a+c)b+(a^2+ca)$ ◀ c で整理してもよい

$= (a+c)b+(a+c)a=(a+b)(a+c)$ ◀ 共通因数を見抜いて因数分解してもよい. また，a の2 次式と見て，次に学ぶ『2 文字2 次式の因数分解』で考えてもよい.

(2) y について降べきの順に整理すると ◀ x の次数は2, y の次数は1

$x^2+2xy-2y-1=(x-1)2y+(x^2-1)$

$= (x-1)2y+(x-1)(x+1)$

$= (x-1)(x+2y+1)$

(3) y についての降べきの順に整理すると

$$x^2+2xy+3x+4y+2=(2x+4)y+(x^2+3x+2)$$
$$=(x+2)2y+(x+1)(x+2)$$
$$=(x+2)(x+2y+1)$$

◀ x の次数は2, y の次数は1

(4) b についての降べきの順に整理すると

$$a^3+ab^2+b^2+1=(a+1)b^2+(a^3+1)$$
$$=(a+1)b^2+(a+1)(a^2-a+1)$$
$$=(a+1)(a^2+b^2-a+1)$$

◀ a の次数は3, b の次数は2

■2 文字2 次式の因数分解

ここでは, x についてもy についても次数が同じ $x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$ という式の因数分解について考えてみよう.

【方法1:『1 次式の積の公式の逆利用』を使う】

まず, $x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$ をx の式とみて, 降べきの順に整理する.

$$x^2+(4y+1)x+3y^2+5y-2$$

次に, x を含まない項について因数分解する.

$$x^2+(4y+1)x+(3y-1)(y+2)$$

『1 次式の積の公式の逆利用』のときと同じように, 下のような表を描き, 隙間を埋めていく.

	x	$y+2$
x	x^2	
$3y-1$		$(3y-1)(y+2)$

より

○	x	$y+2$
x	x^2	$(y+2)x$
$3y-1$	$(3y-1)x$	$(3y-1)(y+2)$

と表を作れるから

$$(x+y+2)(x+3y-1)$$

と因数分解できる.

【方法2:3 マス 3 マスの表を書く】

STEP 1

因数分解する式

$$x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$$

の, x^2 の項 (x^2) , y^2 の項($3y^2$), 定数項(-2)を右図のように, 3×3の表に書き込む.

	x^2		
		$3y^2$	
			-2

STEP 2

左上から順にます目を埋めていく.

まずは x^2 の分解を考えたものが右図である.

	x		
x	x^2		
		$3y^2$	
			-2

STEP 3

$3y^2=3y\times y$ と分解できるから, ます目を埋めると右図のようになる. このとき, 新しくできた xy と $3xy$ を足したものが, 因数分解する式の $4xy$

$$x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$$

と等しくなるような分解を考える($3y^2=(-3y)(-y)$ の分解では, $-4xy$ となるので考えなくてよい).

	x	y	
x	x^2	xy	
$3y$	$3xy$	$3y^2$	
			-2

STEP 4

最後に，定数項($(a+b)^3+c^3$)の分解を考える．
右の2 つは，x と $-2x$ を足しても

$$x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$$

にならないのでその時点で失敗．
最後の空欄を埋め，その和が

$$x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$$

となるものが正解の表となる．以上から

$$(x+3y-1)(x+y+2)$$

と因数分解できることがわかる．

×	x	y	1
x	x^2	xy	$\boldsymbol{x}$
$3y$	$3xy$	$3y^2$	
-2	$\boldsymbol{-2x}$		-2

×	x	y	-2
x	x^2	xy	$\boldsymbol{-2x}$
$3y$	$3xy$	$3y^2$	
1	$\boldsymbol{x}$		-2

×	x	y	-1
x	x^2	xy	$-x$
$3y$	$3xy$	$3y^2$	$\boldsymbol{-3y}$
2	$2x$	$\boldsymbol{2y}$	-2

○	x	y	2
x	x^2	xy	$2x$
$3y$	$3xy$	$3y^2$	$\boldsymbol{6y}$
-1	$-x$	$\boldsymbol{-y}$	-2

【例題:2 文字2 次式の因数分解】

次の式を因数分解せよ．

(1) $2x^2+5xy+3y^2+2x+4y-4$　　**(2)** $6x^2-5xy-6y^2+4x+7y-2$

【解答】

(1)【方法1】

与式をx について降べきの順に整理すると

$$2x^2+5xy+3y^2+2x+4y-4=2x^2+(5y+2)x+3y^2+4y-4$$
$$=2x^2+(5y+2)x+(3y-2)(y+2)$$

となり，表は

	x	
$2x$	$2x^2$	
		$(3y-2)(y+2)$

→

	x	$y+2$
$2x$	$2x^2$	$(2y+4)x$
$3y-2$	$(3y-2)x$	$(3y-2)(y+2)$

と作れるので，$2x^2+5xy+3y^2+2x+4y-4=(2x+3y-2)(x+y+2)$ となる．

【方法2】

3 マス 3 マスの表は

	x		
$2x$	$2x^2$		
		$3y^2$	
			-4

→

	x	y	
$2x$	$2x^2$	$2xy$	
$3y$	$3xy$	$3y^2$	
			-4

→

	x	y	2
$2x$	$2x^2$	$2xy$	$4x$
$3y$	$3xy$	$3y^2$	$6y$
-2	$-2x$	$-2y$	-4

と作れるので，$2x^2+5xy+3y^2+2x+4y-4=(2x+3y-2)(x+y+2)$ となる．

(2)【方法1】

与式をx について降べきの順に整理すると

$$6x^2-5xy-6y^2+4x+7y-2=6x^2+(-5y+4)x-(6y^2-7y+2)$$
$$=6x^2+(-5y+4)x-(3y-2)(2y-1)$$

となり，表は

	$3x$	
$2x$	$6x^2$	
		$-(3y-2)(2y-1)$

→

	$3x$	$2y-1$
$2x$	$6x^2$	$(4y-2)x$
$-(3y-2)$	$(-9y+6)x$	$-(3y-2)(2y-1)$

と作れるので，$6x^2-5xy-6y^2+4x+7y-2=(2x-3y+2)(3x+2y-1)$ となる．

【方法2】
3 3 の表は

	$3x$		
$2x$	$6x^2$		
		$-6y^2$	
			-2

→

	$3x$	$2y$	
$2x$	$6x^2$	$4xy$	
$-3y$	$-9xy$	$-6y^2$	
			-2

→

	$3x$	$2y$	-1
$2x$	$6x^2$	$4xy$	$-2x$
$-3y$	$-9xy$	$-6y^2$	$3y$
2	$6x$	$4y$	-2

と作れるので, $\boldsymbol{6x^2-5xy-6y^2+4x+7y-2=(2x-3y+2)(3x+2y-1)}$ となる.

■複2 次式の因数分解

ここでは, $\boldsymbol{x^2}$ を**1** つのかたまりとして表される多項式のなかでも, 特に複**2** 次式とよばれる多項式についての因数分解について考えよう.

複 2 次式の定義

a, b, c を実数の定数とするとき

ax^4+bx^2+c

という形の多項式を**複 2 次式** (compound quadratic expression) という. ただし, $a \fallingdotseq 0$ とする.

例として, 次の**2** つの複**2** 次式の因数分解についてみてみよう.

1) $\boldsymbol{x^4-13x^2+36}$　　　**2)** $\boldsymbol{x^4+2x^2+9}$

1) $\boldsymbol{x^4-13x^2+36}$ の因数分解

この複**2** 次式は, $\boldsymbol{x^2=X}$ とおくと, $\boldsymbol{X^2-13X+36=(X-4)(X-9)}$ であるから

$$\begin{aligned} x^4-13x^2+36 &= (x^2-4)(x^2-9) \\ &= (x+2)(x-2)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

と因数分解できる.

2) $\boldsymbol{x^4+2x^2+9}$ の因数分解

この複**2** 次式は, $\boldsymbol{x^2=X}$ とおいても, $\boldsymbol{X^2+2X+9}$ となるだけで因数分解が進まない.
そこで, $\boldsymbol{x^4}$ と **9** に着目すると

$$\begin{aligned} & x^4+2x^2+9 \\ =\ & x^4+6x^2+9-4x^2 && \leftarrow\ 2x^2 \text{ に } 4x^2 \text{ を加え平方の形が作れるようする} \\ =\ & (x^2+3)^2-(2x)^2 && \leftarrow\ \bigcirc^2-\triangle^2 \text{ の形} \\ =\ & \{(x^2+3)+2x\}\{(x^2+3)-2x\} \\ =\ & (x^2+2x+3)(x^2-2x+3) \end{aligned}$$

となり因数分解ができる.

複 2 次式の因数分解

複 2 次式 ax^4+bx^2+c の因数分解には

1) $x^2=X$ とおくことにより因数分解できる場合
2) ax^4 と c に着目し, x^2 の項を付け加えて因数分解できる場合

の 2 つの場合がある.

【例題:複2 次式の因数分解】
次の式を因数分解せよ.

(1) x^4-7x^2-8　　(2) x^4+x^2+1

【解答】

(1) $x^2=X$ とおくと

(与式)= X^2-7X-8 = $(X+1)(X-8)=(x^2+1)(x^2-8)$

(2) x^4 と 1 に着目して

(与式)= $x^4+2x^2+1-x^2$

= $(x^2+1)2-x^2=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$

= $(x2+x+1)(x2-x+1)$

■3 文字3 次式の因数分解

『立方の公式1』でも触れたが, $(a+b)^3$ を展開すると

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

であるから

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2$$
$$\Leftrightarrow\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ. これを用いることにより, $a^3+b^3+c^3-3abc$ は, 次の例題でみるように因数分解できる.

【暗記:3 文字 3 次式の因数分解】

$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ.

$a^3+b^3+c^3-3abc$　◀ a^3+b^3 に着目して

$=\{a^3+b^3\}+c^3-3abc$　◀ ①を使った

$=\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$　◀今度は $(a+b)^3+c^3$ に着目する

$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab\{(a+b)+c\}$

$=(a+b+c)\{a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$　◀ 共通因数$(a+b+c)$ でくくった

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

3 変数 3 次式の因数分解

・$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

この因数分解は忘れやすいので, 上のように結果を導出できるように練習しておくとよい.

【例題:3 文字3 次式の因数分解】
次の式を因数分解せよ.

(1) $27a^3+8b^3+c^3-18abc$　　(2) $x^3+y^2-1+3xy$

【解答】

(1) $(3a)^2+(2b)^3+c^2-3(3a)(2b)c$ = $(3a+2b+c)(9a^2+4b^2+c^2-6ab-2bc-3ca)$

(2) $x^3+y^3+(-1)^3-3xy(-1)$ = $(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+y+x)$

■いろいろな因数分解

　　どの因数分解の手段を用いるかどうかは，だいたい次の優先順位で考えるとよい．方針がわからないときは，ひとまずこの順序で考えてみよう．

1. 共通因数を見つける
2. 次数の小さい文字に注目し，降べきの順に並べる．
3. 公式を使えないか考える

【例題：因数分解の練習～その2～】

　次の式を因数分解せよ．

(1) $xy-x-y+1$　　**(2)** $a^2+b^2+ac-bc-2ab$
(3) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$　　**(4)** $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$
(5) x^4+x^2+1　　**(6)** a^4+64
(7) $x^2-xy-12y^2+5x+y+6$　　**(8)** $2x^2-y^2-xy+3x+3y-2$

【解答】

(1) $xy-x-y+1$
$= (y-1)x-(y-1)$
$= (x-1)(y-1)$

◀ x とy はともに**1** 次式なので，とりあえずx で整理する

(2) c について降べきの順に整理すると
$(a-b)c+a^2+b^2-2ab$
$= (a-b)c+(a-b)^2$
$= (a-b)c+(a-b)(a-b)$
$= (a-b)(a-b+c)$

◀ a とb は**2** 次でありc は**1** 次であるから c で整理する

(3) x について降べきの順に整理すると
$(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2$
$= (y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$
$= (y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$
$= (y-z)(x-y)(x-z)$

◀ すべての文字は**2** 次で等しいので，とりあえずx で整理する

(4) a について降べきの順に整理すると
$(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$
$= (b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$
$= (b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$= (b-c)(a-b)(a-c)$

◀ すべての文字は**2** 次で等しいので，とりあえずa で整理する

(5) x^4 と **1** に着目して
x^4+1+x^2
$= (x^2+1)^2-2x^2+x^2$
$= (x^2+1)^2-x^2$
$= (x^2+1+x)(x^2+1-x)$
$= (x^2+x+1)(x^2-x+1)$

◀『複**2** 次式の因数分解』

(6) a^4 と**64** に着目して
$(a^2+8)^2-16a^2$
$= (a^2+8+4a)(a^2+8-4a)$
$= (a^2+4a+8)(a^2-4a+8)$

◀『複**2** 次式の因数分解』

(7) x について降べきの順にし，定数項を因数分解すると

$$\begin{aligned} & x^2 - xy - 12y^2 + 5x + y + 6 \\ =\ & x^2 + (-y+5)x - (12y^2 - y - 6) \\ =\ & x^2 + (-y+5)x - (3y+2)(4y-3) \end{aligned}$$

となる．これを元に表を書けば

	x	$3y+2$
x	x^2	$(3y+2)x$
$-(4y-3)$	$(-4y+3)x$	$-(3y+2)(4y-3)$

◀『2 文字2 次式の因数分解』

	x	$-3y$	2
x	x^2	$3xy$	$2x$
$-4y$	$-4xy$	$-12y^2$	$-8y$
3	$3x$	$9y$	6

という表を作ってもよい．

となるので，$(x-4y+3)(x+3y+2)$ と因数分解できる．

(8) x について降べきの順にし，定数項を因数分解すると

$$\begin{aligned} & 2x^2 - y^2 - xy + 3x + 3 - 2 \\ =\ & 2x^2 + (-y+3)x - (y^2 - 3y + 2) \\ =\ & 2x^2 + (-y+3)x - (y-1)(y-2) \end{aligned}$$

となる．これを元に表を書けば

	x	$-(y-2)$
$2x$	$2x^2$	$(-2y+4)x$
$(y-1)$	$(y-1)x$	$-(y-1)(y-2)$

◀『2 文字2 次式の因数分解』

	x	$-y$	2
$2x$	$2x^2$	$-2xy$	$4x$
y	xy	$-y^2$	$2y$
-1	$-x$	y	-2

という表を作ってもよい．

となるので，$(x-y+2)(2x+y-1)$ と因数分解できる．

■因数分解と式の値

因数分解には，式の因数を見えるようにする働きがある．この点を生かせば，値を整数や自然数に限った次のような問題を解くことができる．

【例題：因数分解と式の値】

(1) 多項式 $F = ab - 3a + 2b - 6$ について，次の問いに答えなさい．

a) F を因数分解しなさい．

b) F = 6 を満たす自然数(a, b) の組をすべて求めなさい．

(2) $mn + 2m - n = 3$ を満たす整数(m, n) の組をすべて求めなさい．

【解答】

(1)

a)
$$\begin{aligned} F &= a(b-3) + 2(b-3) \\ &= (a+2)(b-3) \end{aligned}$$

◀ a について整理した

b) **a)** の結果から

$$(a+2)(b-3) = 6$$

となる自然数 a, b を求めればよい．

6 を自然数の範囲で約数の積に分解すると，$6 = 6\times1, 3\times2, 2\times3, 1\times6$ である．$a+2$ は3 以上でないといけないことに注意すれば

◀ 自然数は，1 以上の値である．

$$\begin{cases} a+2=6 \\ b-3=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a+2=3 \\ b-3=2 \end{cases}$$

のいずれかが必要である．それぞれの式から

$(a, b) = (4, 4), (1, 5)$ と求められる．

(2) 文字m, nを含む項を因数分解する.

$$mn+2m-n=3$$
$$\Leftrightarrow\quad m(n+2)-n=3$$
$$\Leftrightarrow\quad m(n+2)-(n+2)=3-2$$
$$\Leftrightarrow\quad (m-1)(n+2)=1$$

◀ m で整理した

◀ 両辺から2を引いた

$1=1\times1$　または　x^2+6x+9　であるので

$$\begin{cases} m-1=1 \\ n+2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} m-1=-1 \\ n+2=-1 \end{cases}$$

のいずれかが必要である. それぞれの式から

$(m, n)=(2, -1), (0, -3)$　と求められる.