

## 実数解の個数 (Dの利用)

例題 29

2次方程式  $x^2+ax+a+3=0$  …… ① の実数解の個数を調べよ。ただし、 $a$  は実数の定数とする。

**指針** 実数解 判別式  $D=b^2-4ac$  を利用する。

$D>0 \Rightarrow$  異なる 2 つの実数解,  $D=0 \Rightarrow$  重解,  $D<0 \Rightarrow$  実数解なし

**解答** 方程式 ① の判別式を  $D$  とすると  $D=a^2-4(a+3)=(a-6)(a+2)$

$D>0$  のとき, ① は、異なる 2 つの実数解をもつ。

すなわち  $(a-6)(a+2)>0$  から  $a<-2, 6<a$  のとき 2 個

$D=0$  のとき, ① は、重解をもつ。

すなわち  $(a-6)(a+2)=0$  から  $a=-2, 6$  のとき 1 個

$D<0$  のとき, ① は、実数解をもたない。

すなわち  $(a-6)(a+2)<0$  から  $-2<a<6$  のとき 0 個



248 次の条件を満たすような、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

- \*(1) 2次方程式  $x^2+mx+m=0$  が異なる 2 つの実数解をもつ。
- \*(2) 2次関数  $y=-x^2+4mx-6m+2$  のグラフが  $x$  軸より下方にある。
- \*(3)  $x$  のすべての値に対して  $x^2+mx+3>0$  が成り立つ。
- (4) 2次方程式  $x^2+(m+1)x+3(m+1)=0$  が実数解をもたない。

\*249  $k$  を実数の定数とする。次の方程式の実数解の個数を調べよ。

- (1)  $x^2+kx-k+8=0$       (2)  $x^2+kx+k-1=0$

250 2つの2次関数  $y=x^2+2x+m, y=x^2+mx+m+3$  のグラフが、いずれも  $x$  軸と共有点をもつとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

\*251  $x$  に関する 2 つの方程式  $x^2-2x+a=0, x^2+3x-2a=0$  の一方が異なる 2 つの実数解をもち、他方が実数解をもたないように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。



\*252  $x$  の方程式  $kx^2+2x-3=0$  の実数解の個数を求めよ。

253  $x$  のすべての実数の値に対して  $(k^2-1)x^2+2(k+1)x+3>0$  が成り立つように、 $k$  の値の範囲を定めよ。

**ヒント** 253  $ax^2+bx+c>0$  が常に成り立つ条件は  
「 $a>0$ かつ  $D<0$ 」または「 $a=b=0, c>0$ 」

## 区間で解をもつ条件 (グラフ利用)

例題 30

2次方程式  $x^2-ax+4=0$  の 2 つの解がともに 1 と 8 の間にあるように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

**指針** 区間で解をもつ条件  $ax^2+bx+c=0 (a>0)$  が  $p < x < q$  で 2 解をもつ

$$\Leftrightarrow D : b^2-4ac \geq 0, \text{ 軸} : p < -\frac{b}{2a} < q, \text{ 端} : f(p) > 0, f(q) > 0$$

**解答**  $f(x)=x^2-ax+4$  とおく。 $f(x)=0$  について  $D=a^2-16$

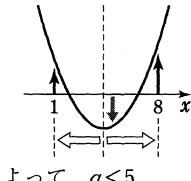
$$[1] D \geq 0 \text{ から } a^2-16 \geq 0 \text{ よって } a \leq -4, 4 \leq a$$

[2]  $y=f(x)$  のグラフの軸が  $1 < x < 8$  にあるから

$$1 < \frac{a}{2} < 8 \text{ よって } 2 < a < 16$$

$$[3] f(1) > 0, f(8) > 0 \text{ から } 5-a > 0, 68-8a > 0 \text{ よって } a < 5$$

$$[1] \sim [3] \text{ から } 4 \leq a < 5 \quad \boxed{\text{A}}$$



\*254 方程式  $x^2+mx+3=0$  が次の条件を満たすように、定数  $m$  の値の範囲を定めよ。

- (1) 2つの解がともに正      (2) 2つの解がともに  $-1$  より小

\*255 2次方程式  $x^2+kx+2k-1=0$  の 2 つの解がともに  $-2$  と  $5$  の間にあるように、定数  $k$  の値の範囲を定めよ。

256 次の2次不等式が、与えられた範囲内において常に成り立つように、定数  $m$  の値の範囲をそれぞれ定めよ。

- (1)  $x^2-2x+m \geq 0$       (ア)  $-2 \leq x \leq 0$       (イ)  $0 \leq x \leq 3$   
 (2)  $-2x^2+4x+m \geq 0$       (ウ)  $-3 \leq x \leq 1$       (エ)  $1 \leq x \leq 4$

\*257 2次不等式  $x^2+2mx+1 \geq 0$  が  $0 \leq x \leq 2$  において常に成り立つように、定数  $m$  の値の範囲を定めよ。



\*258 次の条件を満たすような、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

- (1)  $x$  のすべての値に対して  $x^2+mx+2 \geq -x^2+2x$   
 (2)  $x_1, x_2$  のすべての値に対して  $x_1^2+mx_1+2 \geq -x_2^2+2x_2$

**ヒント** 256 与えられた範囲を定義域とする関数について (最小値)  $\geq 0$

258 (1) 問題 248(3) 参照。 (2)  $(x^2+mx+2)$  の最小値  $\geq (-x^2+2x)$  の最大値

## 24 2次関数の種々の問題

### 解の範囲と係数(方程式)

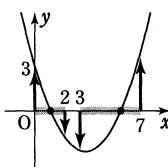
**例題 31** 次の  $x$  の 2 次方程式の 1 つの解が 0 と 2 の間にあり、他の解が 3 と 7 の間にあるように、定数  $k$  の値の範囲を定めよ。

$$(1) x^2 + kx + 3 = 0$$

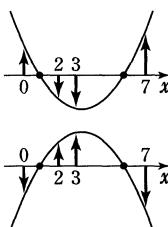
$$(2) kx^2 + 2x + 3k + 1 = 0$$

**指針** 解の存在 2 次関数  $y=f(x)$  について、 $f(s)$  と  $f(t)$  の符号が異なると、 $s$  と  $t$  の間に  $f(x)=0$  となる  $x$  の値  $\alpha$  が存在する。つまり  $s < t$ ,  $f(s)f(t) < 0 \Rightarrow$  解  $x=\alpha$  ( $s < \alpha < t$ ) が存在。

**解答** (1)  $f(x)=x^2+kx+3$  とおくと、この放物線は下に凸で、  
 $f(0)=3>0$  であるから  
 2 次方程式  $f(x)=0$  の 1 つの解が 0 と 2 の間にあり、他の解が 3 と 7 の間にあるための条件は  
 $f(2)<0$ かつ  $f(3)<0$ かつ  $f(7)>0$   
 よって  $7+2k<0$ ,  $12+3k<0$ ,  $52+7k>0$   
 これを解いて  $-\frac{52}{7} < k < -4$  番



(2)  $g(x)=kx^2+2x+3k+1$  とおくと、 $g(0)$  と  $g(2)$  が異符号でかつ  $g(3)$  と  $g(7)$  が異符号であればよいから  
 $g(0)g(2)<0$ かつ  $g(3)g(7)<0$   
 $(3k+1)(7k+5)<0$ かつ  $(12k+7)(52k+15)<0$   
 これを解くと  $-\frac{7}{12} < k < -\frac{1}{3}$  番



### 発展

**259** 方程式  $x^2+kx+k-2=0$  が次の条件を満たすような定数  $k$  の値の範囲を求めよ。

- (1) 1 つの解が  $-3$  と  $-1$  の間にあり、他の解が  $2$  と  $4$  の間にある。
- (2) 1 つの解は  $1$  より大きく、もう 1 つの解は  $1$  より小さい。

**\*260** 2 次方程式  $2kx^2-(k+2)x-5=0$  の 1 つの解が  $-1$  と  $0$  の間にあり、他の解が  $2$  と  $3$  の間にあるような定数  $k$  の値の範囲を求める。

**\*261** 2 次関数  $y=x(x-1)+(x-1)(x-2)+(x-2)x$  のグラフと  $x$  軸が、 $0 < x < 1$  と  $1 < x < 2$  の範囲で 1 点ずつ共有点をもつことを示せ。

**ヒント** 261  $y=f(x)$  において  $f(0)\cdot f(1) < 0$ ,  $f(1)\cdot f(2) < 0$  を示す。

### 解の範囲と係数(不等式)

#### 例題 32

不等式  $x^2-5x+4 \leq 0$  を満たすすべての  $x$  に対して、次の不等式を満たすように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

$$(1) x^2+2ax+3 \leq 0 \quad (2) x^2+2ax+3 \geq 0$$

**指針** 解の包含関係 不等式 ① を満たすすべての  $x$  が不等式 ② を満たす。  
 → ① の解が ② の解に含まれる。

$$(1) x^2-5x+4 \leq 0 \text{ から } (x-1)(x-4) \leq 0$$

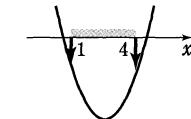
よって  $1 \leq x \leq 4$

条件を満たすためには、 $1 \leq x \leq 4$  が  $x^2+2ax+3 \leq 0$  の解に含まれればよい。

$$f(x)=x^2+2ax+3 \text{ とおくと}, \\ f(1) \leq 0, f(4) \leq 0$$

したがって  $1^2+2a \cdot 1+3 \leq 0$ ,  $4^2+2a \cdot 4+3 \leq 0$

よって  $a \leq -\frac{19}{8}$  番



(2)  $1 \leq x \leq 4$  において、 $f(x) \geq 0$  となるためには、 $f(x)$  の軸に着目して

$$(軸) < 1 \text{ のとき } f(1) \geq 0$$

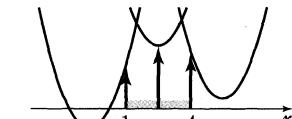
$1 \leq (軸) \leq 4$  のとき  $f(x)$  は  $x$  軸上かそれより上側

$$4 < (軸) \text{ のとき } f(4) \geq 0$$

したがって  $-a < 1$  のとき  $1^2+2a \cdot 1+3 \geq 0$  よって  $a > -1$

$$1 \leq -a \leq 4 \text{ のとき } D=(2a)^2-4 \cdot 1 \cdot 3 \leq 0 \text{ よって } -\sqrt{3} \leq a \leq 1$$

$$4 < -a \text{ のとき } 4^2+2a \cdot 4+3 \geq 0 \text{ よって } a \text{ の値はない}$$



以上から  $a \geq -\sqrt{3}$  番

### 発展

**262** 不等式  $(x+1)(x-2) < 0$  を満たすすべての  $x$  に対して、次の不等式を満たすように定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

$$(1) (x-a)(x-a-5) < 0 \quad (2) (x-a)(x-a-5) > 0$$

**\*263** 不等式  $x^2-6x+8 \leq 0$  を満たすすべての  $x$  に対して、次の不等式を満たすように定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

$$(1) x^2+4ax+5 \leq 0 \quad (2) x^2+4ax+5 \geq 0$$

**ヒント** 262  $-1, 2, a, a+5$  の大小関係を考える。

## 最大・最小(条件つき)

**例題 33**  $x^2+y^2=16$  のとき,  $P=6x+y^2$  の最大値, 最小値, およびそのときの  $x, y$  の値を求めよ。

**指針** 条件つき最大・最小 (表面に出ていない) 変域の制限に注意。

**解答**  $x^2+y^2=16$  から  $y^2=16-x^2$  ..... ①

$$y^2 \geq 0 \text{ であるから } 16-x^2 \geq 0$$

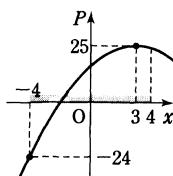
$$\text{よって } -4 \leq x \leq 4$$

また, ①から

$$\begin{aligned} P &= 6x + y^2 = 6x + (16-x^2) \\ &= -(x^2-6x)+16 \\ &= -(x-3)^2+3^2+16 \\ &= -(x-3)^2+25 \end{aligned}$$

$-4 \leq x \leq 4$  であるから,  $P$  は  $x=3$  で最大,  $x=-4$  で最小。

$$\left. \begin{array}{l} x=3 \text{ のとき, ①から } y=\pm\sqrt{7} \text{ このとき 最大値 } P=25 \\ x=-4 \text{ のとき, ①から } y=0 \text{ このとき 最小値 } P=-24 \end{array} \right\} \text{図}$$



## 発展

**264** 次の式の最大値と最小値, およびそのときの  $x, y$  の値を求めよ。

(1)  $x^2+y^2=1$  のとき  $x^2+4y$

(2)  $x^2+y^2=1$  のとき  $x^2-y^2+2x$

**265** (1)  $x$  の 2 次関数  $P=x^2+2kx+2k^2-2x-6k+8$  の最小値  $m$  は  $k$  のどのような関数になるか。また, 関数  $m$  は  $k$  のどんな値に対して最小となるか。

(2)  $x^2-xy+y^2+x-2y+6$  の最小値を求めよ。

**\*266** 各辺の長さの和が 4 の直方体 ABCD-EFGH がある。

(1)  $AB=a$ ,  $AD=x$ ,  $AE=y$  として,  $y$  を  $x, a$  で表せ。

(2) 直方体の表面積を  $x, a$  で表せ。また, 表面積を最大にするときの  $x$  を  $a$  で表せ。

(3) この直方体は, 表面積が最大となるとき, どんな立体になるか。

**ヒント** 264 例題 33 参照。

265 (1) の考え方を利用する。 $y$  を定数と考えて,  $x$  の 2 次関数と考える。

## 25 絶対値を含む関数のグラフ

## グラフと実数解

**例題 34** (1) 関数  $y=(x+1)|x-3|$  のグラフをかけ。  
(2) 方程式  $(x+1)|x-3|=a$  の実数解の個数を求めよ。

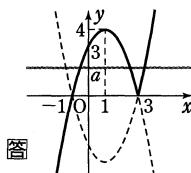
**指針** 絶対値を含む関数のグラフ 絶対値記号の中にある式を正, 0 または負の 2 つの場合に分け, 絶対値記号をはずす。

(1)  $x-3 \geq 0$  すなわち  $x \geq 3$  のとき  
 $y=(x+1)|x-3|=(x+1)(x-3)$   
 $x-3<0$  すなわち  $x<3$  のとき  
 $y=(x+1)|x-3|=-(x+1)(x-3)$

よって, この関数のグラフは右の図の実線部分である。図

(2) 方程式  $(x+1)|x-3|=a$  の実数解の個数は,  
 $y=(x+1)|x-3|$  と  $y=a$  のグラフの交点の個数と一致する。

右の図から  $a>4$  のとき 1 個,  $a=4$  のとき 2 個,  $0<a<4$  のとき 3 個,  
 $a=0$  のとき 2 個,  $a<0$  のとき 1 個



## B

■次の関数のグラフをかけ。[267~269]

267 (1)  $y=|x-3|$  (2)  $y=|x+4|$  (3)  $y=|2x-1|$  (4)  $y=-|x+1|$

\*268 (1)  $y=|x-2|+x$  (2)  $y=|x+1|+|x-2|$   
(3)  $y=|x-3|-|x+2|$  (4)  $y=||x+1|-2|$

269 \* (1)  $y=|x^2-2x-3|$  (2)  $y=-|x^2-4|$   
(3)  $y=|x+3|(x-2)$  (4)  $y=x^2-3|x|$

■グラフを利用して次の方程式, 不等式を解け。[270, 271] (95, 96 の再録)

270 \* (1)  $|2x-6|=x$  (2)  $|2x-6|>x$  (3)  $|2x-6|\leq x$   
(4)  $|2x+5|=-3x$  \* (5)  $|2x+5|\geq-3x$  (6)  $|2x+5|<-3x$   
(7)  $|2x-3|=2x$  (8)  $|2x-3|>2x$  \* (9)  $|2x-3|\leq 2x$

271 \* (1)  $|x|+|x-3|=5$  (2)  $|x|+|x-3|>5$  \* (3)  $|x|+|x-3|\leq 5$   
(4)  $|x|+|2x-4|=2x$  (5)  $|x|+|2x-4|\geq 2x$  \* (6)  $|x|+|2x-4|<2x$

272 次の方程式の実数解の個数を求めよ。

(1)  $|x-4|=a$  (2)  $|x^2-6x+5|=a$  \* (3)  $|x-1|(x+5)=a$

## 26 第2章 演習問題

### 最大・最小(文字係数)

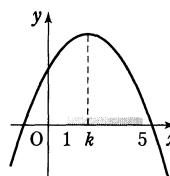
**例題 35** 関数  $y = -x^2 + 2kx + l$  ( $1 \leq x \leq 5$ ) の最大値が 15, 最小値が -3 であるように、定数  $k, l$  の値を定めよ。

**指針** 文字係数つきの最大・最小 軸と区間の位置関係で場合分けする。

$$y = -(x-k)^2 + k^2 + l \quad (1 \leq x \leq 5)$$

- [1]  $k \leq 1$  のとき  $x=1$  で最大,  $x=5$  で最小  
よって  $-1+2k+l=15, -25+10k+l=-3$
- [2]  $1 < k \leq 3$  のとき  $x=k$  で最大,  $x=5$  で最小  
よって  $k^2+l=15, -25+10k+l=-3$
- [3]  $3 < k \leq 5$  のとき  $x=k$  で最大,  $x=1$  で最小  
よって  $k^2+l=15, -1+2k+l=-3$
- [4]  $k > 5$  のとき  $x=5$  で最大,  $x=1$  で最小  
よって  $-25+10k+l=15, -1+2k+l=-3$

[1]～[4]から  $(k, l) = \left(\frac{3}{4}, \frac{29}{2}\right), \left(\frac{21}{4}, -\frac{25}{2}\right)$  答



**B**

**273** 2次関数  $y = x^2 - mx + m + 3$  のグラフの頂点が  $x > 0$  かつ  $y > 0$  の範囲(第1象限)にあるとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

**\*274** 次の条件を満たすように、定数  $a, b$  の値を定めよ。

- (1) 2次関数  $y = ax^2 + 2ax + b$  ( $-2 \leq x \leq 1$ ) の最大値が 5, 最小値が 1
- (2) 2次関数  $y = x^2 - 2ax + b$  ( $0 \leq x \leq 6$ ) の最大値が 10, 最小値が -6

**275** 次の関数の最大値  $M(a)$  を求めよ。また  $M(a)$  のグラフをかけ。

- (1)  $y = -x^2 + 2x + 1$  ( $0 \leq x \leq a$ ) ただし,  $a > 0$  とする。
- (2)  $y = -x^2 + (a+1)x + 1$  ( $0 \leq x \leq a$ ) ただし,  $a > 0$  とする。

**\*276**  $x$  の2次方程式  $x^2 + (a-2)x - 3(a+1) = 0$  …… ① が重解をもつとき、実数の定数  $a$  の値を次の方法で求めよ。

- [1] ①の2つの解  $\alpha, \beta$  を求め、 $\alpha = \beta$  として  $a$  の値を求める。
- [2] ①の判別式  $D$  について、 $D = 0$  として  $a$  の値を求める。

**ヒント 276** 重解と判別式  $D$  の関係を確認する。

### 解の範囲と係数(少なくとも)

#### 例題 36

$x$  の方程式  $x^2 - 2ax + 3 = 0$  が  $x > 1$  の解を少なくとも 1 つもつように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

**指針** 少なくとも 1 つ 2 つの解を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha \leq \beta$ ) とすると

- ①  $1 < \alpha \leq \beta$  と  $\alpha < 1 < \beta$  と  $\alpha = 1 < \beta$  の場合がある。
- ② 「実数解をもつ場合」から「 $\alpha \leq \beta \leq 1$  の場合」を除く。

$$f(x) = x^2 - 2ax + 3$$

- [1] 2解がともに  $x > 1$  のとき  $D = 4a^2 - 12 \geq 0, a > 1, f(1) > 0$

よって  $a \leq -\sqrt{3}, \sqrt{3} \leq a; a > 1; 4 - 2a > 0$  ゆえに  $\sqrt{3} \leq a < 2$

- [2] 1つの解が  $x > 1$ , もう1つの解が  $x < 1$  のとき  $f(1) < 0$  から  $a > 2$

[3] 1つの解が  $x > 1$ , もう1つの解が  $x = 1$  のとき  $f(1) = 0$  から  $a = 2$   
このとき、方程式は  $x^2 - 4x + 3 = 0$  から  $x = 1, 3$  (条件を満たす)

- [1]～[3]から  $a \geq \sqrt{3}$  答

(別解) 実数解をもつとき  $4a^2 - 12 \geq 0$  から  $a \leq -\sqrt{3}, \sqrt{3} \leq a \dots \textcircled{A}$

2つの解がともに  $x \leq 1$  のとき  $4a^2 - 12 \geq 0, a \leq 1, f(1) \geq 0$  から  
 $a \leq -\sqrt{3} \dots \textcircled{B}$   $\textcircled{A}$  から  $\textcircled{B}$  を除くと  $a \geq \sqrt{3}$  答

**B**

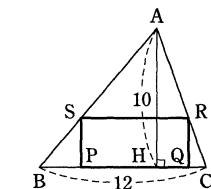
**\*277**  $x$  についての不等式  $3kx^2 + 4kx - k + 8 > 0$  …… ① について

- (1) すべての実数  $x$  に対して、常に ① が成り立つ整数  $k$  の値を求めよ。
- (2) すべての整数  $x$  に対して、常に ① が成り立つ実数  $k$  の値の範囲を求めよ。

**\*278** 右の図のように、底辺  $BC = 12$ , 高さ  $AH = 10$  の鋭角三角形  $ABC$  に長方形  $PQRS$  が内接している。

$PQ = x$  として、次の問いに答えよ。

- (1) 長方形  $PQRS$  の面積を最大にする  $x$  の値を求めよ。
- (2) 長方形  $PQRS$  が正方形となる  $x$  の値を求めよ。



**発展**

**279**  $x$  の方程式  $4x^2 - 8ax + a = 0$  が、次の条件を満たすように定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

- (1)  $x > 1$  において少なくとも 1 つの解をもつ。
- (2)  $0 < x < 1$  において少なくとも 1 つの解をもつ。

152 (1)  $y=10x$ , 定義域  $x>0$

(2)  $y=x(5-x)$ , 定義域  $0<x<5$

(3)  $y=\frac{10}{x}$ , 定義域  $x>0$

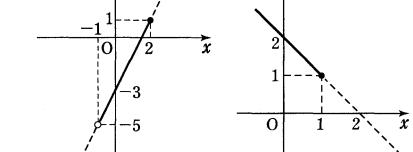
(4)  $y$  は  $x$  では表せない

153 (1) [1], [2] [図]

(2) [1]  $x=2$  のとき最大値 1, 最小値はない

[2] 最大値はない,  $x=1$  のとき最小値 1

(1) [1]



154 (1)  $6a+2 \leq y \leq 2$  (2)  $9 \leq y < 25$

(3)  $-16 < y \leq 0$

[1]  $a < 0$  から, グラフは右下がりの線分  
[2], [3] グラフをかいて調べる]

155 (1)  $a=2, b=-1$  (2)  $a=-1, b=7$

(3)  $a=0, b=6$  (4)  $a=2, b=5$

[3] は増加関数 (4) は減少関数であることに  
注意する。条件から (3)  $a+2=2, b+2=8$   
(4)  $-3 \cdot (-2)+a=8, -3b+a=-13$ ]

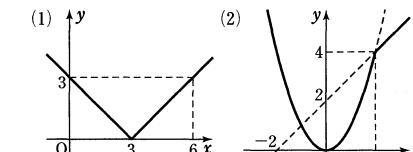
156  $a>0$  のとき  $a=1, b=0$  ;

$a<0$  のとき  $a=-1, b=4$

157  $a=\frac{3}{2}, b=-2$  または  $a=-\frac{3}{2}, b=1$

[ $a>0$  のとき  $b=-2, 2a+b=1$ ;  $a=0$  のとき  
不適;  $a<0$  のとき  $b=1, 2a+b=-2$ ]

158 (1)~(4) [図]



147 (1)  $f(0)=2, f(-1)=-1, f(2)=8$ ,

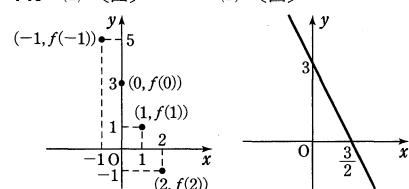
$f(a+2)=3a+8$  (2)  $f(0)=-3, f(-1)=-5$ ,

$f(2)=-5, f(a+2)=-a^2-3a-5$

148 (1) 第1象限 (2) 第4象限

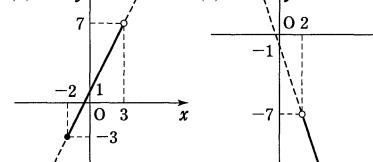
(3) 第3象限 (4) 第2象限

149 (1) [図] (2) [図]

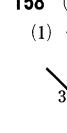


150 (1) [図],  $-3 \leq y < 7$  (2) [図],  $y < -7$

(1)



(2)

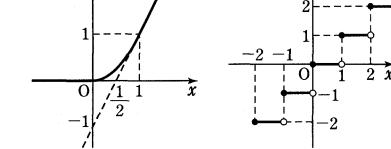
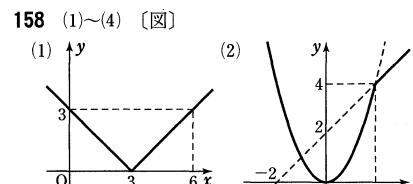


151 (1)  $0 \leq y \leq 4$ ;  $x=3$  のとき最大値 4,  
 $x=-1$  のとき最小値 0

(2)  $-4 \leq y \leq -2$ ;  $x=0$  のとき最大値  $-2$ ,  
 $x=1$  のとき最小値  $-4$

(3)  $2 < y \leq 6$ ;  $x=-2$  のとき最大値 6,  
最小値はない

(4)  $y \geq -2$ ; 最大値はない,  $x=-2$  のとき  
最小値  $-2$



152 (1)  $y=10x$ , 定義域  $x>0$

(2)  $y=x(5-x)$ , 定義域  $0<x<5$

(3)  $y=\frac{10}{x}$ , 定義域  $x>0$

(4)  $y$  は  $x$  では表せない

153 (1) [1], [2] [図]

(2) [1]  $x=2$  のとき最大値 1, 最小値はない

[2] 最大値はない,  $x=1$  のとき最小値 1

(1) [1]



154 (1)  $6a+2 \leq y \leq 2$  (2)  $9 \leq y < 25$

(3)  $-16 < y \leq 0$

[1]  $a < 0$  から, グラフは右下がりの線分  
[2], [3] グラフをかいて調べる]

155 (1)  $a=2, b=-1$  (2)  $a=-1, b=7$

(3)  $a=0, b=6$  (4)  $a=2, b=5$

[3] は増加関数 (4) は減少関数であることに  
注意する。条件から (3)  $a+2=2, b+2=8$   
(4)  $-3 \cdot (-2)+a=8, -3b+a=-13$ ]

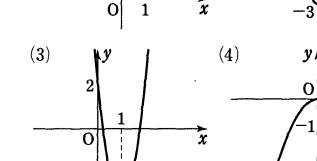
156  $a>0$  のとき  $a=1, b=0$  ;

$a<0$  のとき  $a=-1, b=4$

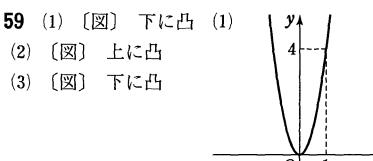
157  $a=\frac{3}{2}, b=-2$  または  $a=-\frac{3}{2}, b=1$

[ $a>0$  のとき  $b=-2, 2a+b=1$ ;  $a=0$  のとき  
不適;  $a<0$  のとき  $b=1, 2a+b=-2$ ]

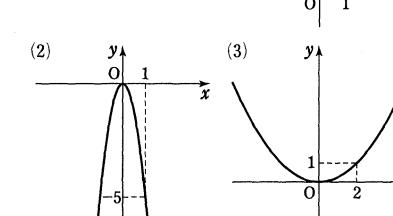
158 (1)~(4) [図]



159 (1) [図] 下に凸 (1)



(2) [図] 上に凸



160 [図], 軸, 頂点の順に

(1) [図], 直線  $x=0$ , 点  $(0, 0)$

(2) [図], 直線  $x=0$ , 点  $(0, -3)$

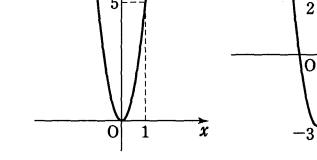
(3) [図], 直線  $x=1$ , 点  $(1, -3)$

(4) [図], 直線  $x=0$ , 点  $(0, 0)$

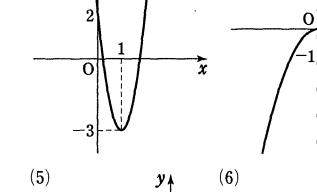
(5) [図], 直線  $x=-3$ , 点  $(-3, 0)$

(6) [図], 直線  $x=-3$ , 点  $(-3, 1)$

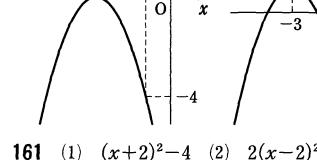
(1)



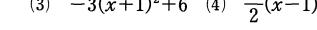
(2)



(3)



(4)



(5)



(6)



(5)  $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$  (6)  $-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$

162 [図], 軸, 頂点の順に

(1) [図], 直線  $x=1$ , 点  $(1, -3)$

(2) [図], 直線  $x=-2$ , 点  $(-2, -9)$

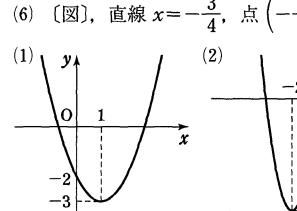
(3) [図], 直線  $x=2$ , 点  $(2, 0)$

(4) [図], 直線  $x=-3$ , 点  $(-3, -\frac{3}{2})$

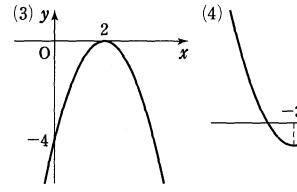
(5) [図], 直線  $x=-1$ , 点  $(-1, \frac{1}{2})$

(6) [図], 直線  $x=-\frac{3}{4}$ , 点  $(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8})$

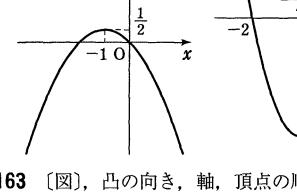
(1)



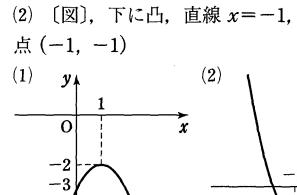
(2)



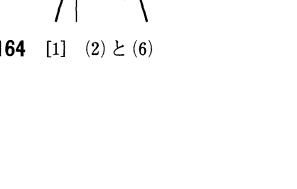
(3)



(4)



(5)



(6)



161 (1)  $(x+2)^2-4$  (2)  $2(x-2)^2-7$

(3)  $-3(x+1)^2+6$  (4)  $\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{5}{2}$

164 [1] (2) と (6)

[2] (1) と (3); (2) と (6); (4) と (5)

- 165 (1) 負 (2) 正 (3) 正 (4) 正 (5) 負  
(6) 正 [(1) 上に凸であるから  $a < 0$ ]

$$(2) \text{ 軸 } x = -\frac{b}{2a} > 0, a < 0 \text{ であるから } b > 0$$

$$(3) \text{ } y \text{ 軸との交点から } c > 0$$

(4)  $f(x) = ax^2 + bx + c$  とおくと、図から  
 $f(1) > 0$  (5)  $f(-1) < 0$  (6)  $c < 1$  である  
から  $f(1) = a + b + c < a + b + 1$

- 166  $a = -2, b = 1$  [例題 19 参照]

- 167 (1)  $k = 4$  (2)  $k = 2$

[頂点の座標は  $(-2, k-4)$ ]

$$(1) \text{ } x \text{ 軸上} \Leftrightarrow y \text{ 座標} \neq 0 \quad (2) \quad -2 = k - 4$$

- 168 (1) A  $\rightarrow$  (8, 2) B  $\rightarrow$  (3, -4)

$$O \rightarrow (3, -2)$$

(2) A  $\rightarrow$  x 軸 : (5, -4), y 軸 : (-5, 4),  
原点 : (-5, -4)

B  $\rightarrow$  x 軸 : (0, 2), y 軸 : (0, -2),  
原点 : (0, 2)

O  $\rightarrow$  x 軸 : (0, 0), y 軸 : (0, 0),  
原点 : (0, 0)

- 169 (1)  $y = 3(x-2)^2 + 3$  ( $y = 3x^2 - 12x + 15$ )

(2) [1] x 軸方向に -1, y 軸方向に -2 だけ平行移動したもの

$$[2] \text{ } x \text{ 軸方向に } -\frac{1}{6}, y \text{ 軸方向に } -\frac{13}{12} \text{ だけ平行移動したもの}$$

- 170 (1) x 軸 :  $y = -x^2$ , y 軸 :  $y = x^2$ ,

$$\text{原点 : } y = -x^2$$

(2) x 軸 :  $y = 3x^2$ , y 軸 :  $y = -3x^2$ ,

$$\text{原点 : } y = 3x^2$$

(3) x 軸 :  $y = -2x - 3$ , y 軸 :  $y = -2x + 3$ ,  
原点 :  $y = 2x - 3$

- 171 (1) 平行移動 : (8, -10), x 軸 : (5, 8),  
y 軸 : (-5, -8), 原点 : (-5, 8)

(2) 平行移動 :  $y = -2(x-3)^2 - 2$

$$(\text{y} = -2x^2 + 12x - 20),$$

x 軸 :  $y = 2x^2$ , y 軸 :  $y = -2x^2$ , 原点 :  $y = 2x^2$

- 172 (1)  $y = -2(x-2)^2 + 3$  ( $y = -2x^2 + 8x - 5$ )

$$(2) \text{ } y = (x-2)^2 + 3 \quad (\text{y} = x^2 - 4x + 7)$$

$$(3) \text{ } y = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 3 \quad \left( \text{y} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{13}{3} \right)$$

- 173 (1)  $y = x^2 + 2x$  (2)  $y = 3x + 15$

[1] 頂点 (2, -5) は点 (-1, -1) に移動

$$(\text{別解}) \quad y - 4 = (x+3)^2 - 4(x+3) - 1$$

$$(2) \quad y - 4 = 3(x+3) + 2$$

174 x 軸方向に -3, y 軸方向に 2 だけ平行移動したもの

[2] つの頂点の座標は, (-2, 3), (1, 1)]

- 175  $y = 2(x+3)^2 + 1$  ( $y = 2x^2 + 12x + 19$ )

[1] もとの放物線の頂点は (3, 1) 対称移動後の頂点は (-3, 1) から  $y = 2(x+3)^2 + 1$

$$[2] \quad x \rightarrow -x \text{ から } y = 2(-x-3)^2 + 1$$

- 176 (1) x 軸 :  $y = -x^2 - 6x - 7$

$$y \text{ 軸 : } y = x^2 - 6x + 7 \text{ 原点 : } y = -x^2 + 6x - 7$$

$$(2) \quad x \text{ 軸 : } y = -2x^2 + 3x$$

$$y \text{ 軸 : } y = 2x^2 + 3x \text{ 原点 : } y = -2x^2 - 3x$$

$$(3) \quad x \text{ 軸 : } y = -x^2 + x + 2$$

$$y \text{ 軸 : } y = x^2 + x - 2 \text{ 原点 : } y = -x^2 - x + 2$$

- 177  $y = -2x^2 - 9x - 9$  [ $y = 2x^2 - 3x + 1$  を x 軸に関して対称移動させた後, x 軸方向に -3, y 軸方向に 1 平行移動]

- 178 (1) 最大値はない,  $x = 0$  のとき最小値 5

$$(2) \quad x = 0 \text{ のとき最大値 } -2, \text{ 最小値はない}$$

$$(3) \quad \text{最大値はない, } x = -2 \text{ のとき最小値 } 1$$

$$(4) \quad \text{最大値はない, } x = 1 \text{ のとき最小値 } 2$$

$$(5) \quad x = -1 \text{ のとき最大値 } 7, \text{ 最小値はない}$$

$$(6) \quad x = \frac{5}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{29}{4}, \text{ 最小値はない}$$

- 179 (1)  $x = 3$  のとき最大値 9,

$$x = 0 \text{ のとき最小値 } 0$$

$$(2) \quad x = 3 \text{ のとき最大値 } 12,$$

$$x = 1 \text{ のとき最小値 } 0$$

$$(3) \quad x = 2 \text{ のとき最大値 } 16,$$

$$x = -1 \text{ のとき最小値 } -2$$

$$(4) \quad x = \frac{1}{2} \text{ のとき最大値 } -\frac{3}{4}, \text{ 最小値はない}$$

- 180 (1)  $a = -2$  (2)  $a = -2, 10$

$$(3) \quad a = 1 \quad (4) \quad a = 2 \quad (5) \quad a = -8$$

- 181 (1) 最大値はない,  $x = -2$  のとき最小値 1

$$(2) \quad x = 3 \text{ のとき最大値 } 3, x = 1 \text{ のとき最小値 } -1$$

$$(3) \quad x = -\frac{1}{3} \text{ のとき最大値 } \frac{13}{3}, \text{ 最小値はない}$$

- 182 (1)  $x = 2$  のとき最大値  $-4a + 5$ ,

$$x = 0 \text{ のとき最小値 } 1$$

$$(2) \quad x = 2 \text{ のとき最大値 } -4a + 5,$$

$x = a$  のとき最小値  $-a^2 + 1$

$$(3) \quad x = 0, 2 \text{ のとき最大値 } 1,$$

$$x = 1 \text{ のとき最小値 } 0$$

$$(4) \quad x = 0 \text{ のとき最大値 } 1,$$

$$x = a \text{ のとき最小値 } -a^2 + 1$$

$$(5) \quad x = 0 \text{ のとき最大値 } 1,$$

$$x = 2 \text{ のとき最小値 } -4a + 5$$

$$[y = (x-a)^2 - a^2 + 1 \text{ 軸は直線 } x = a]$$

軸と定義域の位置関係に着目]

- 183  $a \leq 0$  のとき  $x = 0$  で最大値  $-a$ ,

$$0 < a < 1$$
 のとき  $x = 3a$  で最大値  $9a^2 - a$ ,

$$1 \leq a$$
 のとき  $x = 3$  で最大値  $17a - 9$

$$[y = -(x-3a)^2 + 9a^2 - a]$$

- 184 (1)  $x = 0$  のとき最大値 5,

$$x = 1 \text{ のとき最小値 } 2$$

$$(2) \quad x = 0 \text{ のとき最大値 } 5, x = 2 \text{ のとき最小値 } 1$$

$$(3) \quad x = 0, 4 \text{ のとき最大値 } 5, x = 2 \text{ のとき最小値 } 1$$

$$(4) \quad 0 < a \leq 2 \text{ のとき } x = 0 \text{ で最大値 } 5,$$

$$x = a \text{ で最小値 } a^2 - 4a + 5$$

$$2 < a < 4 \text{ のとき } x = 0 \text{ で最大値 } 5, x = 2 \text{ で最小値 } 1$$

$$a = 4 \text{ のとき } x = 0, 4 \text{ で最大値 } 5, x = 2 \text{ で最小値 } 1$$

$$a > 4 \text{ のとき } x = a \text{ で最大値 } a^2 - 4a + 5,$$

$$x = 2 \text{ で最小値 } 1$$

$$(5) \quad x = -2 \text{ のとき最大値 } 17,$$

$$x = 1 \text{ のとき最小値 } 2$$

$$(6) \quad x = 0 \text{ のとき最大値 } 5, x = 2 \text{ のとき最小値 } 1$$

$$(7) \quad x = 4 \text{ のとき最大値 } 5, x = 2 \text{ のとき最小値 } 1$$

$$(8) \quad b \leq -1 \text{ のとき } x = b \text{ で最大値 } b^2 - 4b + 5,$$

$$x = b + 3 \text{ で最小値 } b^2 + 2b + 2$$

$$-1 < b < 0.5 \text{ のとき } x = b \text{ で最大値 } b^2 - 4b + 5, x = 2 \text{ で最小値 } 1$$

$$b = 0.5 \text{ のとき } x = 0.5, 3.5 \text{ で最大値 } 3.25,$$

$$x = 2 \text{ で最小値 } 1$$

$$0.5 < b < 2 \text{ のとき } x = b + 3 \text{ で最大値 } b^2 + 2b + 2,$$

$$x = 2 \text{ で最小値 } 1$$

$$b \geq 2 \text{ のとき } x = b + 3 \text{ で最大値 } b^2 + 2b + 2,$$

$$x = b \text{ で最小値 } b^2 - 4b + 5$$

- 185 (1) (最大値について)  $-3 < a < -1$  のとき

$$x = a \text{ で最大値 } -a^2 - 2a + 2;$$

$$-1 \leq a \text{ のとき } x = -1 \text{ で最大値 } 3$$

$$(\text{最小値について}) -3 < a < 1 \text{ のとき}$$

$$x = -3 \text{ で最小値 } -1;$$

$a = 1$  のとき  $x = -3, 1$  で最小値  $-1$ ;

$$a > 1 \text{ のとき } x = a \text{ で最小値 } -a^2 - 2a + 2$$

(2) (最大値について)  $a \leq -3$  のとき

$$x = a + 2 \text{ で最大値 } -a^2 - 6a - 6;$$

$$-3 < a < -1 \text{ のとき } x = -1 \text{ で最大値 } 3;$$

$$-1 \leq a \text{ のとき } x = a \text{ で最大値 } -a^2 - 2a + 2$$

$$a < -2 \text{ のとき } x = -2, 0 \text{ で最小値 } 2;$$

$$-2 < a \text{ のとき } x = a + 2 \text{ で最小値 } -a^2 - 6a - 6$$

$$[y = -(x+1)^2 + 3 \text{ 軸は直線 } x = -1]$$

軸と定義域の位置関係に着目する]

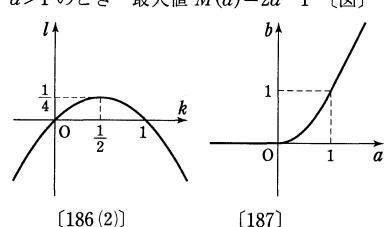
- 186 (1)  $m(k) = -k^2 + k$  (2) [図]

$$(3) \quad k = \frac{1}{2} \text{ のとき } \text{最大値 } \frac{1}{4}$$

- 187  $a < 0$  のとき 最大値  $M(a) = 0$

$$0 \leq a \leq 1$$
 のとき 最大値  $M(a) = a^2$

$$a > 1 \text{ のとき } \text{最大値 } M(a) = 2a - 1$$



$$[186(2)]$$

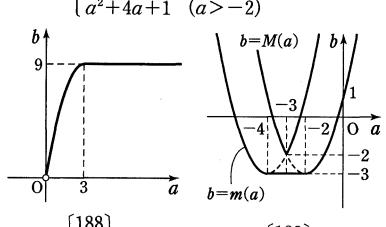
$$[187]$$

- 188  $0 < a < 3$  のとき最大値  $M(a) = -a^2 + 6a$

$$a \geq 3$$
 のとき最大値  $M(a) = 9$  [図]

$$189 \quad [\text{図}] \quad M(a) = \begin{cases} a^2 + 4a + 1 & (a \leq -3) \\ a^2 + 8a + 13 & (a > -3) \end{cases}$$

$$m(a) = \begin{cases} a^2 + 8a + 13 & (a < -4) \\ -3 & (-4 \leq a \leq -2) \\ a^2 + 4a + 1 & (a > -2) \end{cases}$$



$$[188]$$

$$[189]$$

- 190  $n = -2$  のとき最大値 22

[まず,  $n$  を実数として,  $f(n)$  のグラフを

考える。 $f(n) = -3\left(n + \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{67}{3}$   $n$  は整数であるから  $n = -2$  と  $n = -3$  のうち、軸  $n = -\frac{7}{3}$  に近い値で最大となる]

191 (1)  $x = \frac{3}{4}$ ,  $y = \frac{3}{2}$  のとき最大値  $\frac{9}{8}$

(2)  $x = 6$ ,  $y = 0$  のとき最大値 36;

$x = \frac{6}{5}$ ,  $y = \frac{12}{5}$  のとき最小値  $\frac{36}{5}$

[(1)  $y = 3 - 2x$  から

$xy = -2x^2 + 3x = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$

(2)  $x = 6 - 2y \geq 0$ ,  $y \geq 0$  から  $0 \leq y \leq 3$

$x^2 + y^2 = 5y^2 - 24y + 36 = 5\left(y - \frac{12}{5}\right)^2 + \frac{36}{5}$

192 (1)  $S = -3x^2 + 6x$  ( $0 < x < 2$ )

(2)  $P(1, 3)$  のとき最大値  $S = 3$

(3)  $P\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$  のとき最小値  $l = \frac{3\sqrt{10}}{5}$

[(1)  $S = xy = x(6 - 3x)$

$y = 6 - 3x > 0$  から  $0 < x < 2$

(2)  $S = -3(x - 1)^2 + 3$

(3)  $l > 0$  であるから  $l^2$  が最小となるとき  $l$  も最小である。したがって、 $l^2$  を考えると

$l^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (6 - 3x)^2 = 10\left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \frac{18}{5}$

193 1 辺が 5 cm の正方形

[縦の長さを  $x$  cm とすると、面積は  $x(10 - x) = -(x - 5)^2 + 25$  (cm<sup>2</sup>)]

194  $PQ = 2$  [点  $R(x, 9 - x^2)$  とおくと周の長さ  $l$  は  $l = 2(2x + 9 - x^2) = -2(x - 1)^2 + 20$ ]

195 (1)  $x = 0$  のとき最大値 3, 最小値はない

(2) 最大値はない、 $x = 1$  のとき最小値 7

[おき換えて考える。(1)  $x^2 = t$  とおくと

$y = -2(t+1)^2 + 5$  ( $t \geq 0$ )

(2)  $x^2 - 2x = t$  とおくと

$y = (t+2)^2 + 6$  ( $t \geq -1$ )

196 (1)  $a = 2$  (2)  $a = 0$ ,  $b = 4$

197 (1)  $y = -(x - 2)^2 + 3$  ( $y = -x^2 + 4x - 1$ )

(2)  $y = 2(x - 2)^2 - 4$  ( $y = 2x^2 - 8x + 4$ )

198 (1)  $y = (x + 1)^2 + 3$  ( $y = x^2 + 2x + 4$ )

(2)  $y = (x + 2)^2 - 1$  ( $y = x^2 + 4x + 3$ )

199 (1)  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $c = 3$

(2)  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ ,  $c = 1$

200 (1)  $y = 2x^2 - 3x - 4$  (2)  $y = -x^2 + 3x + 4$

[ $y = ax^2 + bx + c$  とおく]

201 (1)  $y = -2(x - 2)^2 + 1$  ( $y = -2x^2 + 8x - 7$ )

(2)  $y = -2(x + 1)^2 + 8$  ( $y = -2x^2 - 4x + 6$ )

(3)  $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$

202 (1)  $a = -6$ ,  $b = 7$  (2)  $a = 2$ ,  $b = 1$

(3)  $a = -1$ ,  $b = -2$

[(1) 頂点が (3, -2) (2) 頂点が (-1, 0)]

(3) 2 点 (-1, 0), (2, 0) を通る]

203 (1)  $y = -2x^2 - 3x + 1$

(2)  $y = -2x^2 - 4x - 2$ ,  $y = -2x^2 + 12x - 18$

[(1)  $y = -2x^2 + bx + c$  (2)  $y = -2(x+k)^2$ ]

204  $a = -2$ ,  $b = 1$  または  $a = 1$ ,  $b = 1$

[点 (0, 1) を通るから  $b = 1$  よって

$y = -(x - 2a)^2 + 4a^2 + 1$  となり、頂点の座標は  $(2a, 4a^2 + 1)$ ]

205  $a = \frac{3}{4}$ ,  $b = \frac{15}{4}$

[ $y = a(x+1)^2 - a + b$  ( $-2 \leq x \leq 1$ ),  $a > 0$  から  $x=1$  で最大,  $x=-1$  で最小。

したがって  $-a+b=3$ ,  $3a+b=6$ ]

206 (1)  $x = \pm 3$  (2)  $x = 1, 3$

(3)  $x = -4, -\frac{3}{2}$  (4)  $x = 3, -\frac{2}{3}$

207 (1)  $x = \pm \frac{3}{2}$  (2)  $x = 2 \pm \sqrt{3}$

(3)  $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$  (4)  $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

208 (1)  $x = 1 \pm \sqrt{3}$  (2)  $x = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{5}$

(3)  $x = \sqrt{3}$  (4)  $x = 1 + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3} - 3}{3}$

(4)  $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \pm (\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3}}$

209 (1)  $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$  (2)  $x = -3, -\frac{1}{2}$

(3)  $x = 4, -\frac{3}{2}$  (4)  $x = \frac{15 \pm \sqrt{177}}{4}$

[(1) 式を整理すると  $x^2 - x - 4 = 0$ ]

(2)  $x + 2 = X$  とおくと  $2X^2 - X - 3 = 0$

$(2X - 3)(X + 1) = 0$  から  $X = \frac{3}{2}, -1$

(3) 両辺を 10 倍して係数を整数にする

(4) 両辺に係数の分母の最小公倍数である 6 を掛けて係数を整数にすると  $2x^2 - 15x + 6 = 0$ ]

210 (1)  $a = -5$

(2)  $k = 0$  のとき、他の解は  $x = 4$

$k = -3$  のとき、他の解は  $x = -5$

[(1)  $x = 2$  を  $x^2 + ax + 6 = 0$  に代入]

(2)  $x = -1$  を  $x^2 - 3(k+1)x + k^2 - 4 = 0$  に代入すると  $k^2 + 3k = 0$   $k = 0, -3$

$k = 0$  のとき  $(x - 4)(x + 1) = 0$

$k = -3$  のとき  $(x + 5)(x + 1) = 0$ ]

211 (1)  $x = 1, -\frac{3}{2}$  (2)  $k = 6, -3$

[(1) [1]  $(2x + 3)(x - 1) = 0$ ]

[2]  $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$   $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2$

[3]  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$

(2)  $2 \cdot 3^2 + k \cdot 3 - k^2 = 0$

212 (1)  $a = -2$ ,  $b = -3$  (2)  $a = 4$ ,  $b = -12$

[(1)  $x$  に -1, 3 を代入すると  $1 - a + b = 0$ ,  $9 + 3a + b = 0$  (2)  $x$  に 2 を代入する]

213 (1)  $a \neq \pm 1$  のとき  $x = 1, \frac{1}{a-1}$

$a = 1$  のとき  $x = 1$

$a = -1$  のとき すべての実数

(2)  $a \neq 0$ ,  $b^2 - 4ac \geq 0$  のとき

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a \neq 0$ ,  $b^2 - 4ac < 0$  のとき 実数解はない

$a = 0$ ,  $b \neq 0$  のとき  $x = -\frac{c}{b}$

$a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c \neq 0$  のとき 解はない

$a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  のとき すべての実数

[(1)  $(a+1)((a-1)x-1)(x-1) = 0$

(2) まず、 $a \neq 0$ ,  $a = 0$  に分けて考える。

$a = 0$  のとき  $b \neq 0$ ,  $b = 0$  に分ける。

$a = 0$ ,  $b = 0$  のとき  $c \neq 0$ ,  $c = 0$  に分ける]

214  $\frac{39 + 17\sqrt{5}}{2}$  [ $a^2 - 3a + 1 = 0$  から  $a^2 = 3a - 1$

$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha(3a - 1) = 3\alpha^2 - \alpha = 3(3a - 1) - \alpha = 8\alpha - 3$ ,  $3\alpha^2 = 3(3a - 1) = 9\alpha - 3$ ]

よって  $\alpha^3 + 3\alpha^2 = 17\alpha - 6$   $\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  を代入]

215  $m = 0$  のとき共通な解は  $x = 0$ ,

$m = \frac{5}{9}$  のとき共通な解は  $x = -\frac{5}{3}$

[例題 25 参照]

216 (1) 2 個 (2) 0 個 (3) 1 個

(4) 2 個 (5) 0 個 (6) 1 個

217 (1)  $a < 5$  (2)  $a > \frac{9}{8}$  (3)  $a \leq 4$

218 (1)  $k = \frac{16}{3}$ ,  $x = \frac{4}{3}$

(2)  $k = 5$ ,  $x = -\frac{1}{2}$ ;  $k = -3$ ,  $x = \frac{1}{2}$

[(1)  $D = 0$  から  $(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k = 0$

よって  $k = \frac{16}{3}$  このとき

$3x^2 - 8x + \frac{16}{3} = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = 0$  から  $x = \frac{4}{3}$

(別解) 重解は  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \cdot 3} = \frac{4}{3}$

(2)  $D = 0$  から  $k = 5, -3$

$k = 5$  のとき  $(2x + 1)^2 = 0$

$k = -3$  のとき  $(2x - 1)^2 = 0$

(別解) 重解は  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{k-1}{8}$

219 4, 5, 6

220 (1) [1] 2 個 [2] 1 個

(2)  $a \leq \frac{9}{4}$ ;  $a = \frac{9}{4}$  のとき重解  $x = -\frac{3}{2}$

221 (1)  $a < \frac{9}{8}$  のとき 2 個,

$a = \frac{9}{8}$  のとき 1 個,  $a > \frac{9}{8}$  のとき 0 個

(2)  $a > -\frac{1}{2}$  のとき 2 個,

$a = -\frac{1}{2}$  のとき 1 個,  $a < -\frac{1}{2}$  のとき 0 個

(3)  $a < 0$ ,  $0 < a < \frac{1}{4}$  のとき 2 個;  $a = 0$ ,  $\frac{1}{4}$  のとき 1 個;  $a > \frac{1}{4}$  のとき 0 個

(4)  $a = 2$  のとき 1 個;  $a \neq 2$  のとき 2 個

[(3)  $a = 0$  のとき  $x + 1 = 0$  (実数解は 1 個)

$a \neq 0$  のときは例題 26 参照

(4) 判別式から求めてよいが、本問では、

2解が具体的に求まっているので、それを利用する。 $x = -a+1, -2a+3$   
 $-a+1 = -2a+3$  のとき重解]

222  $[D=(2a)^2-4(a^2-4) \cdot 1=16>0]$

223  $k=8, x=-\frac{1}{2}$   $[D=k(k-8)=0, k \neq 0]$

224  $900 \text{ m}^2$  [もとの花壇の1辺の長さを

$x \text{ m}$  とすると  $(x-5)(x-3)=\frac{3}{4}x^2 (x>5)$  ]

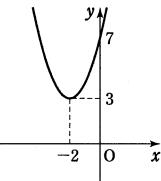
225 縦15cm, 横10cm  
[横の長さを  $x \text{ cm}$  とすると縦は  $x+5 \text{ cm}$  から  $(x-6)(x+5-6) \times 3=108$  ]

226 (1)  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  (2)  $(-1, 0), (5, 0)$   
(3)  $(-3, 0), (3, 0)$  (4)  $(-2, 0), \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$   
(5)  $\left(\frac{-5+\sqrt{33}}{4}, 0\right), \left(\frac{-5-\sqrt{33}}{4}, 0\right)$   
(6)  $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

227 (1) 1個 (2) 0個 (3) 2個  
(4) 2個 (5) 1個 (6) 0個

228 [1]  $y=(x+2)^2+3$

これを図示すると右の  
図のようになる。よって、 $x$ 軸と交わらない。



229 (1) 2個;  $(-4, 0), (7, 0)$

(2) 1個;  $(5, 0)$  (3) 0個

230  $y=-2(x+3)(x-2)$  ( $y=-2x^2-2x+12$ )  
 $[y=k(x+3)(x-2)$  のグラフが点  $(1, 8)$  を通るから  $8=k \cdot 4 \cdot (-1)$  ]

231 (1) 9 (2)  $\frac{\sqrt{65}}{2}$

(1)  $x^2-5x-14=0$  の2つの解の差の絶対値  $|\beta-\alpha|$  が求める線分の長さ。 $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5^2-4 \cdot (-14)=81$  ]

■2次関数  $y=ax^2+bx+c$ , 2次方程式  
 $ax^2+bx+c=0$ について、今後  $b^2-4ac$  に相当する式を  $D$  で表す。

232 (1)  $k < \frac{9}{8}$  (2)  $k > 1$  (3)  $k \geq -\frac{1}{16}$

(1)  $D=3^2-4 \cdot 2 \cdot k > 0$

(2)  $D=4(k-1)^2-4k(k-1) < 0$

(3)  $D=3^2-4 \cdot 2 \cdot (-2k+1) \geq 0$

233  $m < \frac{1}{4}$  のとき2個,  $m=\frac{1}{4}$  のとき1個,  
 $m > \frac{1}{4}$  のとき0個 [ $D=1-4m$  の符号によ  
って場合分け(例題27参照)]

234 (1)  $m=-2$  のとき  $(1, 0)$ ,

$m=6$  のとき  $(-3, 0)$

(2)  $m=-1, 2$  のとき  $(\sqrt{2}, 0)$

(1)  $D=m^2-4(m+3)=0$

(2)  $D=(-2\sqrt{2})^2-4(m^2-m)=0$

235 (1)  $(1, 1), (2, 4)$  (2)  $(-2, -3)$   
(3)  $(-6, -15), (2, 1)$  (4)  $(-3, 8), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$   
(5)  $(2, 2), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$  (6)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

(1) 連立方程式  $y=x^2$ ,  $y=3x-2$  を解く。  
 $x^2=3x-2$  の解が共有点の  $x$  座標]

236 (1)  $m=4$  (2)  $m > \frac{61}{4}$

(1)  $x^2-3x+m=x$  から  $x^2-4x+m=0$   
について、条件から  $D=(-4)^2-4m=0$  ]

237 (1)  $x > 3$  (2)  $x \leq \frac{5}{2}$  (3)  $x < -1, 2 < x$

(1)  $y=x-3$

(2)  $y=2x-5$

(3)  $y=(x+1)(x-2)$

のグラフにおいて

(1)  $y > 0$ , (2)  $y \leq 0$ ,

(3)  $y > 0$  の部分を調べる[図]

(2)  $y$

(3)  $y$

(1)  $y$

(2)  $D \geq 0$ , 軸:  $-\frac{m}{2} < -1$ ,  $f(-1) > 0$

255  $-\frac{24}{7} < k \leq 4 - 2\sqrt{3}$  [ $D \geq 0$ ,

軸:  $-2 < -\frac{k}{2} < 5$ ,  $f(-2) > 0$ ,  $f(5) > 0$ ]

256 (1) (7)  $m \geq 0$  (4)  $m \geq 1$

(2) (4)  $m \geq 30$  (2)  $m \geq 16$

[不等式の左辺を  $f(x)$  とする]

(1) (7)  $f(0) \geq 0$  (4)  $f(1) \geq 0$

(2) (4)  $f(-3) \geq 0$  (2)  $f(4) \geq 0$ ]

257  $m \geq -1$  [ $-m \leq 0$  のとき  $f(0) \geq 0$ ,

$0 < -m < 2$  のとき  $f(-m) \geq 0$ ,

$2 \leq -m$  のとき  $f(2) \geq 0$ ]

258 (1)  $-2 \leq m \leq 6$  (2)  $-2 \leq m \leq 2$

[(1) 整理すると  $2x^2 + (m-2)x + 2 \geq 0$

この式が常に成り立つから  $D \leq 0$

(2)  $x^2 + mx + 2 = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + 2 - \frac{m^2}{4}$

$-x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$  よって  $2 - \frac{m^2}{4} \geq 1$ ]

259 (1)  $-\frac{14}{5} < k < -\frac{2}{3}$  (2)  $k < \frac{1}{2}$

[(1)  $f(-3) > 0$ ,  $f(-1) < 0$ ,  $f(2) < 0$ ,

$f(4) > 0$  (2)  $f(1) < 0$ ]

260  $1 < k < \frac{3}{2}$  [ $f(x) = 2kx^2 - (k+2)x - 5$

とおくと  $f(-1) \cdot f(0) < 0$ ,  $f(2) \cdot f(3) < 0$ ]

261 [ $f(x) = x(x-1) + (x-1)(x-2) + (x-2)x$

とおくと  $f(0) = 2$ ,  $f(1) = -1$ ,  $f(2) = 2$

よって  $f(0) \cdot f(1) < 0$ ,  $f(1) \cdot f(2) < 0$ ]

262 (1)  $-3 \leq a \leq -1$  (2)  $a \leq -6$ ,  $2 \leq a$

$[(x+1)(x-2) < 0$  から  $-1 < x < 2$

(1)  $(x-a)(x-a-5) < 0$  から  $a < x < a+5$

条件を満たすためには

$\{x \mid -1 < x < 2\} \subset \{x \mid a < x < a+5\}$  から

$a \leq -1$  かつ  $2 \leq a+5$

(2)  $(x-a)(x-a-5) > 0$  から  $x < a$  または

$a+5 < x$  条件を満たすためには

$\{x \mid -1 < x < 2\} \subset \{x \mid x < a$  または  $a+5 < x\}$

から  $2 \leq a$  または  $a+5 \leq -1$ ]

263 (1)  $a \leq -\frac{21}{16}$  (2)  $a \geq -\frac{\sqrt{5}}{2}$  [例題32参照]

264 (1)  $x=0$ ,  $y=1$  のとき最大値 4;

$x=0$ ,  $y=-1$  のとき最小値 -4

(2)  $x=1$ ,  $y=0$  のとき最大値 3;

$x = -\frac{1}{2}$ ,  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  のとき最小値  $-\frac{3}{2}$

[(1)  $x^2 = 1 - y^2 \geq 0$  から  $-1 \leq y \leq 1$

$x^2 + 4y = (1 - y^2) + 4y = -(y-2)^2 + 5$

(2)  $y^2 = 1 - x^2 \geq 0$  から  $-1 \leq x \leq 1$

$x^2 - y^2 + 2x = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$ ]

265 (1)  $m = k^2 - 4k + 7$ ;  $k=2$  のとき最小

(2)  $x=0$ ,  $y=1$  のとき最小値 5

[(1)  $P = (x+(k-1))^2 + (k-2)^2 + 3$

(2)  $x^2 - xy + y^2 + x - 2y + 6$

$= \left(x + \frac{1-y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 + 5$ ]

266 (1)  $y = 1 - a - x$

(2) 表面積  $-2x^2 + 2x(1-a) - 2a^2 + 2a$

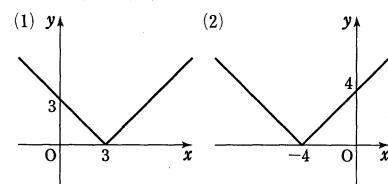
$x = \frac{1-a}{2}$  のとき最大

(3) 1辺の長さが  $\frac{1}{3}$  の立方体

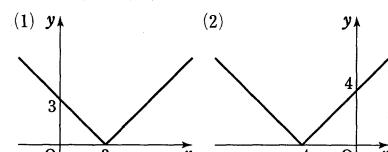
[(2)  $S = -2\left(x - \frac{1-a}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$ ]

267 (1)~(4) [図]

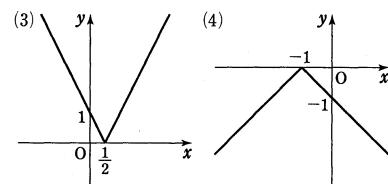
(1)



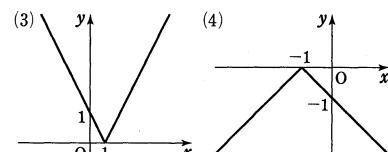
(2)



(3)



(4)



268 (1) (1)~(4) [図]

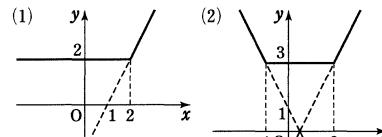
[(4) (i)  $x \geq -1$  のとき

$y = |(x+1)-2| = |x-1|$

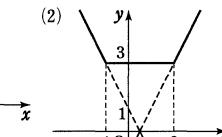
$x \geq 1$ ,  $-1 \leq x < 1$  で場合分け

(ii)  $x < -1$  も同様]

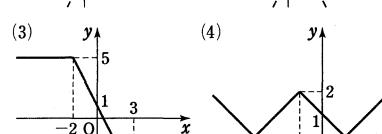
(1)



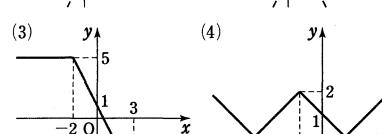
(2)



(3)

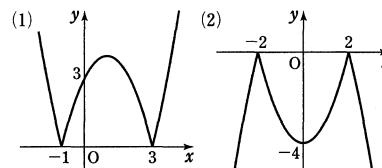


(4)

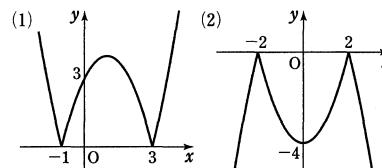


269 (1)~(4) [図]

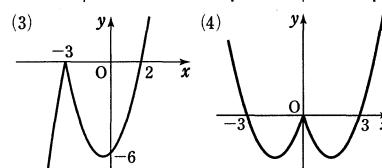
(1)



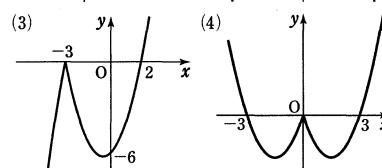
(2)



(3)



(4)



270 (1)  $x=2, 6$  (2)  $x < 2, 6 < x$

(3)  $2 \leq x \leq 6$  (4)  $x = -1$

(5)  $x \geq -1$  (6)  $x < -1$  (7)  $x = \frac{3}{4}$

(8)  $x < \frac{3}{4}$

(9)  $x \geq \frac{3}{4}$

[参考図参照。方程

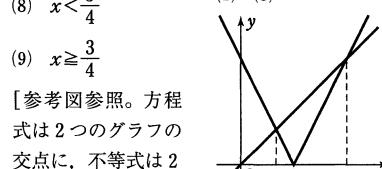
式は2つのグラフの

交点に、不等式は2

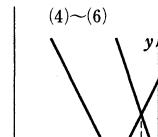
つのグラフの上下関

係に着目]

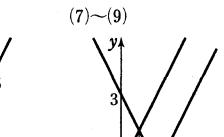
(1)~(3)



(4)~(6)



(7)~(9)

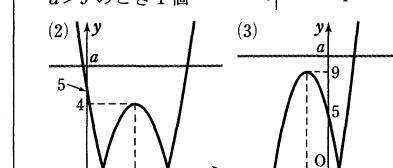
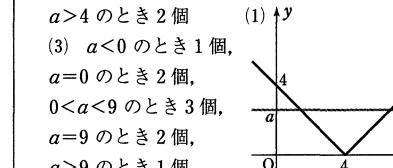
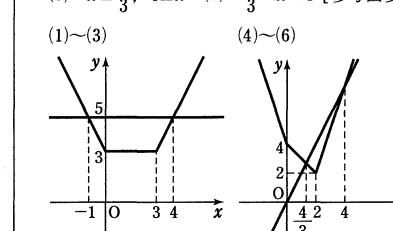


271 (1)  $x=4, -1$  (2)  $x < -1, 4 < x$

(3)  $-1 \leq x \leq 4$  (4)  $x = \frac{4}{3}, 4$

(5)  $x \leq \frac{4}{3}, 4 \leq x$  (6)  $\frac{4}{3} < x < 4$  [参考図参照]

(1)~(3) (4)~(6)



273  $0 < m < 6$   $\left[y = \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + m + 3\right]$

から頂点の座標は  $\left(\frac{m}{2}, -\frac{m^2}{4} + m + 3\right)$

条件から  $\frac{m}{2} > 0$  かつ  $-\frac{m^2}{4} + m + 3 > 0$

274 (1)  $a=1, b=2$ ;  $a=-1, b=4$

(2)  $a=2, b=-2$ ;  $a=4, b=10$

[(1)  $y=a(x+1)^2-a+b$   
 $a>0$  のとき  $3a+b=5, -a+b=1$

$a<0$  のとき  $-a+b=5, 3a+b=1$

(2)  $y=(x-a)^2+b-a^2$  ( $0 \leq x \leq 6$ ) から  $a \leq 0, 0 < a \leq 3, 3 < a \leq 6, 6 < a$  で場合分け。例えば  $0 < a \leq 3$  のとき  $x=6$  で最大値

$36-12a+b=10, x=a$  で最小値  $b-a^2=-6$ ]

275 (1)  $0 < a \leq 1$  のとき  $M(a) = -a^2 + 2a + 1$

$a > 1$  のとき  $M(a) = 2$  [図]

(2)  $0 < a \leq 1$  のとき  $M(a) = a + 1$

$a > 1$  のとき  $M(a) = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{5}{4}$  [図]

[軸と区間の位置関係で場合分け。]

(1)  $y = -(x-1)^2 + 2 (=f(x))$  から

$0 < a \leq 1$  のとき  $M(a) = f(a)$

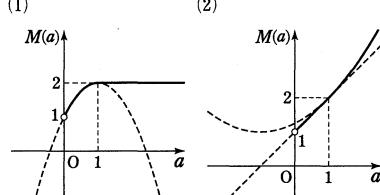
$a > 1$  のとき  $M(a) = f(1)$

(2)  $y = -\left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{a^2 + 2a + 5}{4} (=f(x))$

から  $\frac{a+1}{2} \geq a$  のとき  $M(a) = f(a)$

$\frac{a+1}{2} < a$  のとき  $M(a) = f\left(\frac{a+1}{2}\right)$  ]

(1) (2)



276  $a = -4$  [(1)  $(x-3)(x+a+1) = 0$

から  $x=3, -a-1$  よって  $3=-a-1$

[2]  $D=(a-2)^2+12(a+1)=(a+4)^2=0$  ]

277 (1)  $k=0, 1, 2, 3$  (2)  $0 \leq k < 4$

[(1)  $k > 0, D < 0$  または  $k=0$

(2)  $k > 0$  のとき  $3kx^2 + 4kx - k + 8$

$=3k\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots$  から ① の左辺は整数

$x=-1$  で最小。 $k=0$  のときは常に成り立つ。

$k < 0$  のときは成り立たない]

278 (1)  $x=6$  (2)  $x=\frac{60}{11}$  [(1) SP=y と

すると  $(10-y) : 10 = x : 12$   $y=10-\frac{5}{6}x$

から  $xy=x\left(10-\frac{5}{6}x\right)=-\frac{5}{6}(x-6)^2+30$

(2)  $x=10-\frac{5}{6}x$  ( $=y$ ) ]

279 (1)  $\frac{4}{7} < a$  (2)  $a < 0, \frac{1}{4} \leq a$

[(1) [1] 2つの解がともに  $x > 1$  のとき

$D \geq 0$ , 軸  $a > 1, f(1) > 0$  [2] 1つの解が

$x > 1$ , もう1つの解が  $x < 1$  のとき  $f(1) < 0$

[3] 1つの解が  $x > 1$ , もう1つの解が

$x=1$  のとき  $f(1)=0$

このとき  $x > 1$  の解があるかを確認する

(2) 2つの解を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha \leq \beta$ ) とすると

$0 < \alpha \leq \beta < 1, \alpha < 0 < \beta < 1, 0 < \alpha < 1 < \beta,$

$\alpha=0 < \beta < 1, 0 < \alpha < \beta=1$  ]