

10 集 合

1 集 合

- ① $A \subset B$ $x \in A$ ならば $x \in B$
 $A = B$ 要素が全く一致。 $A \subset B$ かつ $B \subset A$
- ② 共通部分 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$
 和集合 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$
 空集合 \emptyset 要素が1つもない集合
- ③ 補集合 全体集合 U に関する A の補集合 $\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \notin A\}$
 1. 性質 $A \cap \bar{A} = \emptyset, A \cup \bar{A} = U, \bar{\bar{A}} = A, A \subset B$ ならば $\bar{A} \supset \bar{B}$
 2. ド・モルガンの法則 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$



*97 集合 $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ について、次の \square に \in または \notin を入れよ。

- (1) $3 \square A$ (2) $1 \square A$ (3) $6 \square A$ (4) $7 \square A$

98 次の集合を要素を書き並べて表せ。

- (1) $\{n \mid -2 \leq n \leq 5, n \text{ は整数}\}$ *(2) $\{n^2 \mid -1 < n \leq 2, n \text{ は整数}\}$
 (3) $\{x \mid x \text{ は } 13 \text{ 以下の正の奇数}\}$ *(4) $\{x \mid x \text{ は } 24 \text{ の正の約数}\}$

*99 次の集合 A, B の間に成り立つ関係を、記号 $\subset, =$ を用いて表せ。

- (1) $A = \{2, 4, 6, 8\}, B = \{4, 8\}$
 (2) $A = \{3n-1 \mid n=1, 2\}, B = \{x \mid (x-2)(x-5)=0\}$

*100 集合 $A = \{p, q, r, s\}$ の部分集合をすべて書け。

101 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ を全体集合、 $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}, B = \{2, 3, 8, 10\}, C = \{4, 6, 8, 10\}$ とするとき、次の集合を求めよ。

- (1) $A \cap B$ *(2) $A \cup B$ (3) $A \cap C$ *(4) \bar{A}
 *(5) $A \cap \bar{B}$ *(6) $A \cup \bar{B}$ (7) $\overline{A \cup B}$ *(8) $\overline{A \cap B}$
 (9) $\bar{A} \cap \bar{B}$ *(10) $\bar{A} \cup \bar{B}$ *(11) $A \cup B \cup C$ (12) $A \cap B \cap C$



102 1 から 8 までの自然数のうち、8 の約数全体の集合を A 、偶数全体の集合を B とする。次の集合の要素を書き並べて表せ。

- (1) $A \cap B$ (2) $A \cup B$
 (3) $\bar{A} \cap B$ (4) $\overline{A \cup B}$

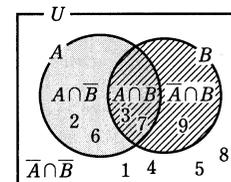
集合と要素の関係

例題 12

$U = \{n \mid 1 \leq n \leq 9, n \text{ は自然数}\}$ を全体集合とする。
 $A \cap B = \{3, 7\}, A \cup B = \{2, 3, 6, 7, 9\}, \bar{A} \cap B = \{9\}$
 であるとき、 $A, \bar{B}, \bar{A} \cup B$ を求めよ。

指針▶ 集合の決定 図をかいて考えるとわかりやすい。右の図を「ベン図」という。

解答▶ 条件から右の図のようになる。この図から
 $A = \{2, 3, 6, 7\}$ 罫
 $\bar{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$ 罫
 $\bar{A} \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ 罫



103 $S = \{x \mid x \text{ は } 1 \text{ 桁の正の奇数}\}$ とする。次の集合を、要素を書き並べて表せ。

- (1) $\{2x+3 \mid x \in S\}$ (2) $\{x^2 \mid x \in S\}$

*104 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ とする。次の集合のうち、集合 A の部分集合であるものはどれか。

$P = \{3, 5, 9\}, Q = \{5, 6, 7\}, R = \{2, 4, 8\}, S = \emptyset, T = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

*105 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ を全体集合とする。

$A \cap B = \{1, 2\}, \bar{A} \cap B = \{4, 7\}, \bar{A} \cap \bar{B} = \{3\}$

とするとき、 $A, B, A \cup \bar{B}$ を求めよ。

*106 $A = \{3, a, 2a+1\}, B = \{5, 6, 3a-3\}, A \cap B = \{3, 5\}$ のとき、定数 a の値と和集合 $A \cup B$ を求めよ。

*107 $A \subset B$ のとき、集合 $A \cap B, A \cup B, A \cap \bar{B}$ を簡単にせよ。

発展

108 3 の倍数の集合を A 、6 の倍数の集合を B とするとき、 $A \supset B$ を示せ。

*109 $A = \{4n+1 \mid n \text{ は整数}\}, B = \{2n-1 \mid n \text{ は整数}\}$ のとき、 $A \subset B$ を示せ。

ヒント▶ 105 例題 12 参照。

106 $A \cap B = \{3, 5\}$ から $5 \in A, 3 \in B$

108 B の要素 $6n$ が A の要素であることを示す。

11 命題と条件

条件 p, q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P, Q とする。

1 命題 $p \Rightarrow q$ の真偽と集合

- ① 命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真 $\Leftrightarrow P \subset Q$ 命題「 $p \Leftrightarrow q$ 」が真 $\Leftrightarrow P=Q$
 ② 命題が偽であることを示すには、その反例を1つあげればよい。

2 条件「かつ」、「または」の否定

- ① $\overline{p \text{ かつ } q} \Leftrightarrow \overline{p}$ または \overline{q} 集合で表すと $\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$
 ② $\overline{p \text{ または } q} \Leftrightarrow \overline{p}$ かつ \overline{q} 集合で表すと $\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$



*110 次の中から命題を選べ。また、命題についてはその真偽を調べよ。

- (1) 1.41 は $\sqrt{2}$ に近い値である。 (2) 1.41 は $\sqrt{2}$ より大きい値である。
 (3) 4^2 は 2^4 と等しい値である。 (4) -10^{24} は小さい数である。

*111 x は実数とする。集合を用いて、次の命題の真偽を調べよ。

- (1) $3 < x < 6 \Rightarrow x > 1$ (2) $x < 5 \Rightarrow -3 < x < 5$
 (3) $-2 < x < 3 \Rightarrow -3 < x < 5$ (4) $0 < x < 6 \Rightarrow 3 < x < 10$

112 n は自然数とする。次の命題の真偽を調べよ。偽のときは反例をあげよ。

- *1) n が偶数 $\Rightarrow n$ は4の倍数 (2) n が奇数 $\Rightarrow 10n+1$ は素数

113 a は実数とする。次の条件の否定をいえ。

- (1) $a = -1$ *(2) $a \geq 5$ *(3) $-2 \leq a < 1$ (4) a は正の数

*114 次の条件を満たす実数 x 全体の集合を求めよ。

- (1) $-6 < x < 5$ かつ $2 \leq x \leq 10$ (2) $-8 < x < 1$ または $-4 \leq x \leq 7$

115 x, y は実数とする。次の条件の否定をいえ。

- *1) $x=3$ かつ $y=5$ *(2) $x > 4$ または $y \geq 4$
 (3) $x > 8$ または $x < 3$ (4) $5 \leq x < 10$

Aの
まとめ

116 次の条件の否定をいえ。 m, n は整数, x, y は実数。

- (1) m, n はともに奇数
 (2) m, n の少なくとも一方は3の倍数
 (3) $x > 0$ または $y \leq 0$ (4) $x=0$ かつ $y \neq 0$

命題の真偽

次の命題の真偽を調べよ。ただし、 x, y は実数とする。

例題 13

- (1) $x+y > 0$ かつ $xy > 0$ ならば $x > 0$ かつ $y > 0$
 (2) $x+y$ と xy が整数ならば x も y も整数

指針▶ 命題 $p \Rightarrow q$ の真偽 真をいうには証明し、偽をいうなら反例 (p であって q でない例) を1つあげる。

- 解答▶ (1) $xy > 0$ ならば「 $x > 0$ かつ $y > 0$ 」または「 $x < 0$ かつ $y < 0$ 」
 このうち $x+y > 0$ を満たすものは $x > 0$ かつ $y > 0$
 よって、命題は 真 圏
 (2) $x=3+\sqrt{2}, y=3-\sqrt{2}$ とすると $x+y=6, xy=7$
 よって、命題は 偽 圏



117 自然数の全体を全体集合とする。2の倍数全体の集合を P , 3の倍数全体の集合を Q とするとき、次の条件を満たす自然数の集合を P, Q で表せ。

- *1) 6の倍数 *(2) 3の倍数で奇数 (3) 3の倍数でない奇数

*118 m, n は整数とする。次の命題の真偽を調べよ。

- (1) m は偶数 かつ n は偶数 $\Rightarrow m+n$ は偶数
 (2) m は奇数 かつ n は奇数 $\Rightarrow m+n$ は奇数
 (3) m は偶数 かつ n は偶数 $\Rightarrow mn$ は偶数
 (4) m は奇数 かつ n は奇数 $\Rightarrow mn$ は奇数

*119 x, y は実数として次の命題の真偽を調べよ。偽のときは反例をあげよ。

- (1) $xy > 0 \Rightarrow x > 0$ または $y > 0$
 (2) $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ かつ $y = 0$
 (3) $x+y > 0 \Rightarrow x > 0$ かつ $y > 0$
 (4) $x+y = 2$ かつ $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ かつ $y = 2$

*120 n は整数とする。次の命題の真偽を調べよ。偽のときは反例をあげよ。

- (1) n^2 が4の倍数 $\Rightarrow n$ は4の倍数
 (2) n が3の倍数 $\Rightarrow n^2+n$ は6の倍数

ヒント▶ 117 それぞれの条件を2の倍数, 3の倍数で言い換える。

6の倍数 \rightarrow 2の倍数かつ3の倍数, 奇数 \rightarrow 2の倍数でない

- 120 (1) n^2 が4の倍数なら n は2の倍数であればよい。
 (2) $n^2+n=n(n+1)$ n と $n+1$ のどちらかは偶数であるから積は偶数。

12 必要条件・十分条件

1 必要条件・十分条件

- ① $p \Rightarrow q$ が真であるとき q は p であるための **必要条件**
 p は q であるための **十分条件**
- ② $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ がともに真, すなわち $p \Leftrightarrow q$ が真 が成り立つとき
 q は p であるための **必要十分条件**
 p は q であるための **必要十分条件** } (p と q とは互いに **同値**)

A

*121 x, y, z は実数とする。次の 内に, 必要, 十分, 必要十分のうち最も適するものを入れよ。また, いずれでもないものには×印をつけよ。

- (1) $x=5$ かつ $y=7$ は $x+y=12$ であるための 条件
- (2) $x=2$ は $x^2-4=0$ であるための 条件
- (3) $x(x-2)=0$ は $x(x+3)=0$ であるための 条件
- (4) $x>0$ は $x>1$ であるための 条件
- (5) $x=y$ は $x+z=y+z$ であるための 条件

*122 次の p は q であるための必要条件か, 十分条件か, 必要十分条件か。最も適するものを答えよ。

- (1) $p: 2x-y=3$ かつ $x+y=3$ $q: x=2$ かつ $y=1$
- (2) $p: ma=mb$ $q: a=b$
- (3) $p: \triangle ABC \equiv \triangle PQR$ $q: \triangle ABC \sim \triangle PQR$

*123 a, b を実数とする。次のうち, 互いに同値であるものを選べ。

- ① $ab=0$ ② $ab<0$
- ③ $a=0$ かつ $b=0$ ④ $a=0$ または $b=0$
- ⑤ $a>0$ かつ $b>0$ ⑥ $a<0$ かつ $b<0$
- ⑦ $a+b>0$ かつ $ab>0$ ⑧ $a+b<0$ かつ $ab>0$

Aの
まとめ

124 次の p は q であるための必要条件か, 十分条件か, 必要十分条件か。最も適するものを答えよ。(x, y は実数)

- (1) $p: x=2$ $q: x^2-6x+8=0$
- (2) $p: x \neq 0$ $q: x^2 \neq 0$
- (3) $p: x+y$ は有理数 $q: x, y$ は有理数

必要条件, 十分条件

例題 14

a, b を実数とする。次の 内に, 必要, 十分, 必要十分のうち最も適するものを入れよ。

- (1) $a+b>0$ は $a>0$ かつ $b>0$ であるための 条件
- (2) $a>2$ は $a^2 \neq 1$ であるための 条件

指針 必要条件と十分条件 命題が真ならば証明し, 偽ならば反例をあげる。

- 解答**
- (1) $a+b>0 \Rightarrow a>0$ かつ $b>0$ について
これは 偽。反例は $a=2, b=-1$
 $a>0$ かつ $b>0 \Rightarrow a+b>0$ について
これは, 明らかに 真。 **答** 必要
 - (2) $a>2 \Rightarrow a^2 \neq 1$ について $a>2$ のとき $a^2>4$ であるから 真。
 $a^2 \neq 1 \Rightarrow a>2$ について これは 偽。反例は $a=0$
 答 十分

B

*125 a, b, c は実数とする。次の p は q であるための必要条件か, 十分条件か, 必要十分条件か, あるいはいずれでもないか。最も適するものを答えよ。

- (1) $p: ab=0$ かつ $a \neq 0$ $q: b=0$
- (2) $p: (a-b)(a-c)=0$ $q: a=b$ または $a=c$
- (3) $p: a+b>0$ $q: ab>0$
- (4) $p: a^2=b^2$ $q: |a|=|b|$

*126 次の p と q は互いに同値であることを証明せよ。ただし, a, b, k は実数とする。

$p: a>k$ かつ $b>k$ $q: a+b>2k$ かつ $(a-k)(b-k)>0$

発展

*127 次の命題の否定をいえ。また, もとの命題とその否定の真偽をいえ。

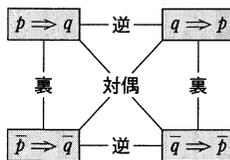
- (1) すべての実数 x について $(x+3)^2 \neq 0$
- (2) ある自然数 n について n^2+1 は奇数

ヒント 127 一般に「すべての x について p である」の否定は「ある x について p でない」
「ある x について p である」の否定は「すべての x について p でない」

13 命題と証明

1 逆・裏・対偶

- ① 命題 $p \Rightarrow q$ に対して 逆: $q \Rightarrow p$
裏: $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ 対偶: $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$
- ② 真である命題の逆は、必ずしも真ではない。
- ③ 命題の真偽とその対偶の真偽は一致する。



2 間接証明法

命題「 $p \Rightarrow q$ 」の証明(直接証明が難しいとき間接証明法が有効)

- ① 対偶「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」を証明する。
- ② 背理法 \bar{q} であると仮定して矛盾を導く。



*128 x は実数とする。次の命題の逆と対偶を述べ、それらの真偽を調べよ。

- (1) $x=2$ ならば $(x-2)(x-3)=0$
- (2) $(x-2)(x-3) \neq 0$ ならば $x \neq 2$
- (3) $(x-2)(x-3)=0$ ならば「 $x=2$ または $x=3$ 」

129 次の命題の真偽を調べよ。また、その逆・裏・対偶を述べ、それらの真偽を調べよ。

- (1) 東京都は日本の首都である。 (2) 長方形は平行四辺形である。
- (3) 3の倍数は6の倍数である。

*130 x, y は実数とする。対偶を考えて、次の命題を証明せよ。

- (1) $x+y > 5$ ならば「 $x > 3$ または $y > 2$ 」
- (2) $y^2 \neq y$ ならば $y \neq 1$

131 $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて、次の数が無理数であることを背理法で証明せよ。

- (1) $1+\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{12}$ *(3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Aの
まとめ

132 x, y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また、その逆・裏・対偶を述べ、それらの真偽を調べよ。

- (1) 「 $x > 0$ かつ $y > 0$ 」ならば $xy > 0$
- (2) $(x-3)(y-6)=0$ ならば「 $x=3$ または $y=6$ 」

整数に関する命題

例題 15

m, n が整数のとき、次の命題を証明せよ。

- (1) mn が奇数ならば、 m, n はともに奇数である。
- (2) m^2+n^2 が奇数ならば、 mn は偶数である。

指針▶ 対偶による証明 k を整数として(偶数) $=2k$, (奇数) $=2k+1$ などと表される。ここでは対偶を利用して証明する。

解答▶ (1) 対偶: m, n の少なくとも一方が偶数ならば、 mn は偶数である。これを証明する。

k を整数として $m=2k$ とおける。ゆえに $mn=(2k) \cdot n=2(kn)$ kn は整数であるから、 mn は偶数である。

よって、対偶が真であるから、もとの命題も真である。☒

(2) 対偶: mn が奇数ならば、 m^2+n^2 は偶数である。これを証明する。

(1) から、 mn が奇数のとき、 m, n はともに奇数である。

ゆえに、 k, l を整数として $m=2k+1, n=2l+1$ とおける。

よって $m^2+n^2=(2k+1)^2+(2l+1)^2=2(2k^2+2k+2l^2+2l+1)$ $2k^2+2k+2l^2+2l+1$ は整数であるから、 m^2+n^2 は偶数である。

ゆえに、対偶が真であるから、もとの命題も真である。☒



*133 a, b は実数とする。対偶を考えて、次の命題を証明せよ。

- (1) $ab=1$ ならば $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ である。
- (2) $a+b=1$ ならば $a > 0$ または $b > 0$ である。

134 m, n が整数のとき、次の命題を証明せよ。

- * (1) n^3+1 が奇数ならば、 n は偶数である。
- * (2) $2m=3n$ ならば、 m は3の倍数である。
- (3) mn が3の倍数ならば、 m または n は3の倍数である。

*135 (1) $\sqrt{5}$ が無理数であることを、背理法を用いて証明せよ。

- (2) $\sqrt{5}$ が無理数であることを用いて、 $\sqrt{3}+\sqrt{15}$ が無理数であることを証明せよ。

*136 (1) a, b が有理数、 u が無理数で、 $a+bu=0$ であるならば、 $a=0$ かつ $b=0$ であることを証明せよ。

(2) 次の等式を満たす有理数 p, q の値を求めよ。

[1] $(p-3)+(q+2)\sqrt{5}=0$ [2] $(1+\sqrt{5})p+(3-2\sqrt{5})q=0$

14 第1章 演習問題

式の値

例題 16

- (1) $x + \frac{1}{x} = 5$ のとき $x - \frac{1}{x}$ の値を求めよ。
 (2) $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ のとき $x^5 + 3x^4$ の値を求めよ。

指針 式の値の求め方 (1) $(x - \frac{1}{x})^2 = (x + \frac{1}{x})^2 - 4$ に着目。
 (2) 次数の高い式は、次数を下げることを考える。

解答 (1) $(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = (x + \frac{1}{x})^2 - 4 = 5^2 - 4 = 21$ から $x - \frac{1}{x} = \pm\sqrt{21}$ 図
 (2) $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ から $2x + 1 = \sqrt{5}$ 両辺を平方すると $(2x + 1)^2 = 5$
 整理すると $x^2 + x - 1 = 0$ よって $x^2 = -x + 1$ さらに
 $x^4 = (x^2)^2 = (-x + 1)^2 = x^2 - 2x + 1 = (-x + 1) - 2x + 1 = -3x + 2$
 よって $x^5 + 3x^4 = x^4(x + 3) = (-3x + 2)(x + 3) = -3x^2 - 7x + 6$
 $= -3(-x + 1) - 7x + 6 = -4x + 3$
 $= -4 \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 3 = 5 - 2\sqrt{5}$ 図

B

- *137 ある整式から $3x^2 - xy + 2y^2$ を引くところを、誤ってこの式を加えたため、誤った結果 $2x^2 + xy - y^2$ が得られた。正しい結果を求めよ。
 *138 $(5x^3 - 6x^2 + 3x - 4)(2x^4 + 3x^3 - x^2 - 7x + 8)$ を展開したとき、 x^5 の係数と x^2 の係数を求めよ。
 *139 次の式を因数分解せよ。
 (1) $2x^2 - 3xy - 2y^2 - 10x + 5y + 12$ *(2) 箱 $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$
 *(3) $(a^2 + 3a - 2)(a^2 + 3a + 4) - 27$ (4) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
 *(5) 箱 $x^3 + x^2 - xy + y^3 + y^2$ (6) $x^3y - x^2y + x^2 - xy^3 + y^3 - y^2$
 *140 (1) $a + \frac{1}{a} = 3$ のとき $a^2 + \frac{1}{a^2}$, $(a - \frac{1}{a})^2$, $a - \frac{1}{a}$ の値を求めよ。
 (2) $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ のとき $x^3 - 2x^2$, $x^4 - 3x^3$ の値を求めよ。

整数問題

例題 17

a, b, c は整数とする。 $a^2 + b^2 = c^2$ ならば、 a, b のうち少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。

指針 背理法による証明 a, b の両方を奇数と仮定して矛盾を導く。

解答 a, b の両方も奇数と仮定する。
 このとき、 $a = 2l + 1, b = 2m + 1$ (l, m は整数) と表される。
 $a^2 + b^2 = (2l + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4(l^2 + l + m^2 + m) + 2 \dots\dots$ ①
 一方、 c は奇数か偶数のどちらかである。
 c が奇数ならば $c = 2n + 1$ (n は整数) と表される。
 このとき $c^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1$
 c が偶数ならば $c = 2n$ (n は整数) と表される。このとき $c^2 = (2n)^2 = 4n^2$
 よって、 c が奇数であっても偶数であっても①のような $4t + 2$ (t は整数) の形で表されることはないので、 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすことはない(矛盾)。
 したがって、 a, b の少なくとも一方は偶数である。図

B

- *141 $x = a^2 + 1$ ($a > 0$) のとき、 $\sqrt{x + 2a} - \sqrt{x - 2a}$ を a で表せ。
 *142 a を定数とするとき、方程式 $a^2x + 1 = a(x + 1)$ を解け。
 *143 100 円、10 円、5 円の硬貨が合わせて 50 枚、合計金額で 2000 円あるならば、それぞれの枚数は幾らか。
 *144 x, y は実数とする。次の p は q であるための必要条件か、十分条件か、必要十分条件か。最も適するものを答えよ。
 (1) $p: 0 < x < 2$ $q: x^2 < 4$
 (2) $p: x + y > 2$ かつ $xy > 1$ $q: x > 1$ かつ $y > 1$
 *145 次の命題の真偽をいえ。真のものは証明し、偽のものは反例をあげよ。
 (1) n は整数とする。 n^2 が 9 の倍数ならば n は 9 の倍数である。
 (2) n は整数とする。 n^2 が 5 の倍数ならば n は 5 の倍数である。
 (3) a は実数とする。 a^2 が 5 の倍数ならば a は 5 の倍数である。
 (4) a は実数とする。 a^2 が無理数ならば a は無理数である。
 (5) a は実数とする。 a^2 が有理数ならば a は有理数である。
 *146 a, b は整数とする。 $a^2 + b^2$ が 3 で割り切れるならば、 a と b はともに 3 で割り切れることを証明せよ。

答と略解

- ① 問題の要求している答の数値, 図などを記載し, 略解・略証は [] に入れて付した。
 ② [] の中には, 本文にない文字でも断らずに用いている場合もあるので注意してほしい。
 ③ [] の中には答案形式ではないので, 諸君が独力で考え, 完全な答案にしてほしい。

- 1 (1) 係数 2, 次数 5 (2) 係数 1, 次数 3
 (3) 係数 -1, 次数 4 (4) 係数 6, 次数 0
 (5) $[x]$ …係数 $8ay^3$, 次数 2
 $[y]$ …係数 $8ax^2$, 次数 3
 $[x$ と $y]$ …係数 $8a$, 次数 5
 (6) $[x]$ …係数 $-\frac{3y}{4}$, 次数 2
 $[x$ と $y]$ …係数 $-\frac{3}{4}$, 次数 3
 $[z]$ …係数 $-\frac{3x^2y}{4}$, 次数 0
 2 (1) $-3x^2-x+3$ (2) $5a+3b-5c$
 (3) $-x^2+2xy-2y^2$ (4) $-ab-2ca$
 3 (1) 3 次式, 定数項 -1
 (2) $[x]$ …2 次式, 定数項 $y-5$
 $[y]$ …3 次式, 定数項 $5x^2-5$
 $[x$ と $y]$ …4 次式, 定数項 -5
 4 (1) $-x^3+4x^2+3x-2$
 (2) x について… $x^2+(4-3y)x+(y^3-5y+1)$
 y について… $y^3-(3x+5)y+(x^2+4x+1)$
 5 (1) $A+B=2x-7y$, $A-B=3y-2z$
 (2) $A+B=5x^2+5x$, $A-B=3x^2-11x+2$
 6 (1) $-4x^2-3x+3$ (2) 次数 2, 定数項 3
 (3) $A-B=-5x^2+5x+1$
 7 (1) $14x-6$ (2) $3x-2y$
 (3) $6x^2-12x-2$ (4) $-10xy-2y^2+3$
 $[k$ を数とすると, 一般に
 $k(a+b)=ka+kb$, $-k(a-b)=-ka+kb$
 として, かっこをははずす]
 8 (1) $-11t+12$ (2) $-6x+2y+9z$
 9 (1) $-4x^2-7x-4$ (2) $-2x^2+3$
 $[2]$ 求める式のかっこをははずして簡単にすると $-A-B+C]$
 10 (1) $-2x-1$ (2) $-x^2+5x+3$

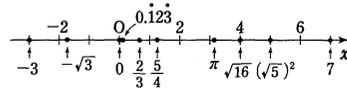
- (3) x^2-3x-6 [(2) $X-(-x^2+4x+3)=x$
 (3) $x^2-2x-5-X=x+1]$
 11 (1) a^7 (2) a^{12} (3) a^4b^4
 (4) $-15x^6$ (5) $16a^{12}b^8$ (6) $-72x^8y^7$
 12 (1) $8x^4+6x^3$ (2) $-12a^2b+8ab^2$
 (3) $4a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3$ (4) x^2y-xy^2
 (5) $-8x^2y^2+12y^3$ (6) $-\frac{1}{3}ac+\frac{1}{6}bc-c^2$
 13 (1) $ax+ay+bx+by$
 (2) $6xy-2x+9y-3$ (3) t^3-t
 (4) $6x^2-5x-4$ (5) $4x^2+3xy-10y^2$
 (6) $-5x^2y^2-2x^3y+3xy^3$
 14 (1) $-9a^8b^9$ (2) $4a^3b^2-\frac{8}{3}a^2b^3+2ab^4$
 (3) $px+py+qx+qy$ (4) x^3+6x^2+8x
 15 (1) x^3-5x^2+4x+6
 (2) $2a^4+a^3-6a^2-28a-5$
 (3) $2x^4-3x^3-23x^2-3x+20$
 (4) x^4-2x^3+2x-1 (5) $x^3-5x^2y+4xy^2+6y^3$
 (6) $2x^4-3x^3y-23x^2y^2-3xy^3+20y^4$
 $[$ 例題 2 参照。① 1 つの文字について降べきの順に整理 ② 項がないところは空ける]
 16 (1) x^5-1 (2) x^6-1
 (3) $x^3+6xy+8y^3-1$ [$]例題 2$ 参照]
 17 (1) x の係数 5, x^2 の係数 5 (2) -13
 $[$ (1) $[x]$ … $x\cdot 3+1\cdot 2x$ $[x^2]$ … $x^2\cdot 3+x\cdot 2x$
 (2) $[x^3y]$ … $2x^2\cdot (-2xy)+(-3xy)\cdot 3x^2]$
 18 (1) x^2+4x+4 (2) x^2-6x+9
 (3) $4x^2+12x+9$ (4) $4x^2-20xy+25y^2$
 (5) x^2-4 (6) x^2-9 (7) a^2-4b^2
 (8) a^2-16b^2 (9) $x^2+9x+20$
 (10) $x^2-9x+20$ (11) x^2-x-20
 (12) x^2+x-20
 19 (1) $4a^2-4ab+b^2$ (2) x^4-y^4

- (3) $x^2+xy-12y^2$ (4) $a^2-3ab-10b^2$
 (5) $15x^2-19x+6$ (6) $6x^2+5x-6$
 (7) $8x^2+26xy+15y^2$ (8) $15x^2-22xy+8y^2$
 (9) $18x^2-3xy-10y^2$
 20 (1) $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$
 (2) $x^2-6xy+9y^2+8x-24y+16$
 (3) $x^4-4x^3+10x^2-12x+9$
 21 (1) x^4-9 (2) x^4-18x^2+81
 (3) x^4-16 (4) $x^4+4x^2y^2+16y^4$
 22 (1) $4x^2-12xy+9y^2$ (2) $9x^2-16y^2$
 (3) $8x^2+2x-15$
 (4) $x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx$
 (5) x^4-81 (6) t^4+t^2+1
 23 (1) $x^4+8x^3+20x^2+16x+3$
 (2) $x^4+5x^3+4x^2-5x+1$
 (3) $x^2-4y^2+12yz-9z^2$
 (4) $a^4-a^2b^2+2ab^3-b^4$
 (5) $x^4+10x^3+31x^2+30x$
 (6) $x^4-x^3-12x^2+6x+36$
 (7) x^4-13x^2+36 (8) x^4-10x^2+9
 (9) $x^4-6x^3+7x^2+6x-8$
 (10) $x^4+12x^3+47x^2+72x+36$
 (11) x^8-32x^4+256 (12) x^8-a^8
 $[$ (1) $x^2+4x=A$ とおく。(2) $x^2-1=A$
 (3) $\{x+(2y-3z)\}\{x-(2y-3z)\}$
 $=x^2-(2y-3z)^2$
 (4) $\{a^2-(ab-b^2)\}\{a^2+(ab-b^2)\}$
 (5) $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$ $x^2+5x=A$
 (6) $x^2-6=A$
 (7) $(x+3)(x-3)=x^2-9$ $x^2=A$
 (8) $\{(x-3)(x+3)\}\{(x-1)(x+1)\}$ $x^2=A$
 (9) $\{(x+1)(x-4)\}\{(x-1)(x-2)\}$ $x^2-3x=A$
 (10) $\{(x+1)(x+6)\}\{(x+2)(x+3)\}$ $x^2+6=A$
 (11) $\{(x-2)(x+2)(x^2+4)\}^2$
 $=\{(x^2-4)(x^2+4)\}^2$ (12) 前から順に計算]
 24 (1) a^3+3a^2+3a+1 (2) $8x^3+12x^2+6x+1$
 (3) $a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3$
 (4) $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$
 (5) $8x^3-12x^2+6x-1$
 (6) $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$
 25 (1) x^3+27 (2) x^3-64 (3) $8a^3+b^3$

- (4) $8x^3-125y^3$
 $[$ (1) $(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=x^3+3^3]$
 26 (1) $x^6-12x^4+48x^2-64$ (2) x^6-1
 $[$ (1) $\{(x+2)(x-2)\}^3=(x^2-4)^3$
 (2) $\{(x-1)(x^2+x+1)\}\{(x+1)(x^2-x+1)\}$
 $=(x^3-1)(x^3+1)]$
 27 (1) $x^8+x^4y^4+y^8$ (2) $8ac$
 $[$ (1) $(x^4+x^2y^2+y^4)(x^4-x^2y^2+y^4)$
 (2) $(b+c-a)^2=a^2-2(b+c)a+(b+c)^2$ など
 (別解) $(A^2-B^2)+(C^2-D^2)$
 $=(A+B)(A-B)+(C+D)(C-D)$ を利用。
 次項目「因数分解」を参照]
 28 (2) $x^3+y^3+3xy-1$
 $[$ (1) (左辺) $=a(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
 $+b(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
 $+c(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
 を計算して右辺を導く
 (2) (1) で $a=x$, $b=y$, $c=-1$ とおく]
 29 (1) $mab(m-a)$ (2) $6x^2(x^2+2)$
 (3) $3ac(3b^2-2ac-bc)$ (4) $x(x+2y+2z)$
 (5) $(a+b)(x-y)$ (6) $(a-3b)(2a+b)$
 30 (1) $(a+2)^2$ (2) $(x-\frac{1}{2})^2$ (3) $(3a-2b)^2$
 31 (1) $(3x+5)(3x-5)$ (2) $(10+a)(10-a)$
 (3) $(6a+5b)(6a-5b)$ (4) $2(3x+4y)(3x-4y)$
 (5) $6ab(a+2b)(a-2b)$
 (6) $(x+y-1)(x-y+1)$
 $[$ (6) $\{x+(y-1)\}\{x-(y-1)\}]$
 32 (1) $(x+1)(x+20)$ (2) $(x-1)(x-20)$
 (3) $(x+2)(x+10)$ (4) $(x-2)(x-10)$
 (5) $(x+4)(x+5)$ (6) $(x-4)(x-5)$
 (7) $(x-1)(x+20)$ (8) $(x+1)(x-20)$
 (9) $(x-2)(x+10)$ (10) $(x+2)(x-10)$
 (11) $(x-4)(x+5)$ (12) $(x+4)(x-5)$
 33 (1) $(x+1)(x+3)$ (2) $(x-2)(x-4)$
 (3) $(x-1)(x+9)$ (4) $(x+4)(x-6)$
 (5) $(x-2y)(x+3y)$ (6) $(x+y)(x-18y)$
 34 (1) $(2x+1)(x+6)$ (2) $(2x-1)(x-6)$
 (3) $(2x-3)(x+2)$ (4) $(2x+3)(x-2)$
 (5) $(2x+3)(x+2)$ (6) $(2x-3y)(x-2y)$
 35 (1) $(2x-1)(x-1)$ (2) $(3x-4)(2x+3)$
 (3) $(3x+4y)(2x+3y)$

- 36 (1) $(a+b+1)(a-b+1)$
 (2) $(x^2+4)(x^2-7)$ (3) $(x^2+4)(x+2)(x-2)$
- 37 (1) $(a-4)(5a+2)$ (2) $(4x-3y)^2$
 (3) $(2+a-b)(2-a+b)$
 (4) $(x-6y)(x-9y)$ (5) $(3a+2b)(2a-7b)$
 (6) $(x^2+9)(x+2)(x-2)$
- 38 (1) $(x+y+3)(x+y-6)$
 (2) $(10x-3)(2x-3)$
 (3) $(x+6)(x-2)(x+2)^2$
 (4) $(x+6a-3b)(x-2a+b)$
 [(1) $x+y=A$ とおくと $A^2-3A-18$
 (2), (3) も同様。(3) 例題 4 (1) 参照。
 (4) $2a-b=A$ とおくと $x^2+2Ax-3A^2$]
- 39 (1) $(2a+b+4)(2a+b-4)$
 (2) $(x^2+8)(x-4)(x+2)$
 (3) $(a+b)(a-b)(x+1)(x-1)$
 (4) $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)$
 $\times (a+b-c)$
 [(1) $2a+b=A$ とおくと A^2-4^2
 (2) $x^2-x=A$, $x+8=B$ とおくと
 (3) $(a^2-b^2)x^2-(a^2-b^2)$
 (4) $(2ac)^2-(c^2+a^2-b^2)^2$
 $= (a^2+2ac+c^2-b^2)(-a^2+2ac-c^2+b^2)$]
- 40 (1) $(x+2y+2z)(x+2y-2z)$
 (2) $(x+3y-1)(x-3y+1)$
 (3) $(x-y+1)(x-y-2)$
 (4) $(x+2y+3)(x+2y+2)$
 [(1) $(x+2y)^2-(2z)^2$ (2) $x^2-(3y-1)^2$
 (3) $(x-y)^2-(x-y)-2$
 (4) $(x+2y)^2+5(x+2y)+6$]
- 41 (1) $(a+2)(a^2-2a+4)$
 (2) $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$
 (3) $(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$
 (4) $(5ab+2)(25a^2b^2-10ab+4)$
- 42 (1) $(x+1)(x-1)(x+3)$
 (2) $(x+2)(x-2)(x-5)$
 (3) $(x-2)(x^2-x+4)$
 (4) $(2x+1)(4x^2+x+1)$ (5) $(x+1)^3$
 (6) $(2x-3)^3$ [(1) $x^2(x+3)-(x+3)$
 (2) $x^2(x-5)-4(x-5)$ (3) $(x^3-8)-3x(x-2)$
 (4) $(8x^3+1)+3x(2x+1)$
 (5) $(x^3+1)+3x(x+1)$

- $= (x+1)\{(x^2-x+1)+3x\}$
 (別解) $x^3+3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2+1^3=(x+1)^3$
 (参考) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$]
- 43 (1) $(a+1)(b+1)$ (2) $(x-z)(y-u)$
 (3) $(x+y)(x-y)(y-z)$
 (4) $(a-c)(b-ac+c^2)$
 [(1) $(b+1)a+(b+1)$ (2) $(y-u)x+(zu-yz)$
 (3) $(y^2-x^2)z+(x^2y-y^3)$
 (4) b について整理する。
 $(a-c)b-a^2c+2ac^2-c^3$
 $= (a-c)b-c(a-c)^2=(a-c)\{b-c(a-c)\}$]
- 44 (1) $(x+y)(x+y-1)$
 (2) $(x-y-2)(x-2y+1)$
 (3) $(x-2y-1)(x+y+3)$ (4) $(ax+b)(bx+a)$
 (5) $(2x+y-1)(x-2y+3)$
 (6) $(3x-2y-1)(2x+3y+1)$
 [(3) $x^2-(y-2)x-(2y+1)(y+3)$
 (5) $2x^2-(3y-5)x-(2y-3)(y-1)$
 (6) $6x^2+(5y+1)x-(3y+1)(2y+1)$]
- 45 (1) $-(a-b)(b-c)(c-a)$
 (2) $(a+b)(b+c)(c+a)$
 (3) $(a+b)(b+c)(c+a)$
 (4) $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
 [(1) $(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$
 $= (b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
 (2) $(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+bc(b+c)$
 $= (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
 (3) $(b+c)a^2+\{(b-c)^2+4bc\}a+bc^2+b^2c$
 $= (b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
 $= (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
 (4) $(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)$
 $= \{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$]
- 46 (1) $(x+3)(x-1)(x^2+2x-1)$
 (2) $(xy+x+1)(xy+y+1)$
 (3) $(x-2)(x-6)(x^2-8x+10)$
 (4) $(x^2+4x+6)(x^2+8x+6)$
 [(1) $x^2+2x=A$ とおくと
 (2) $(xy+1)\{(xy+1)+x+y\}+xy$
 $= (xy+1)^2+(x+y)(xy+1)+xy$
 (3) $\{(x^2-8x)+7\}\{(x^2-8x)+15\}+15$
 (4) $\{(x^2+6)+7x\}\{(x^2+6)+5x\}-3x^2$

- 47 (1) $(3x+2y)(3x-2y)(9x^2+4y^2)$
 (2) $(x+3y)(x-3y)(x^2+4y^2)$
- 48 (1) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
 (2) $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$
 (3) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
 (4) $(x^2+5xy-y^2)(x^2-5xy-y^2)$
 [(1) $(x^2+1)^2-x^2$ (2) $(x^2+y^2)^2-9x^2y^2$
 (3) $(x^2+2)^2-4x^2$ (4) $(x^2-y^2)^2-25x^2y^2$]
- 49 (1) $3(a-b)(b-c)(c-a)$
 (2) $3(x+y)(y+z)(z+x)$
 (3) $(a+1)(a-2)(a^2-a+1)(a^2+2a+4)$
 (4) $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$
 [(1) $\{(a-b)^3+(b-c)^3\}+(c-a)^3$
 前の 2 つの項をまず因数分解する
 (2) $\{(x+y+z)^3-x^3\}-(y^3+z^3)$
 前の 2 つ, 後ろの 2 つの項をそれぞれ因数分解し, 共通因数でくくると
 (3) $(a^3)^2-7a^3-8$
 (4) $(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$ ある \forall b
 $(a^3)^3-(b^3)^3=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$
 $= (a^2-b^2)\{(a^2+b^2)^2-a^2b^2\}$]
- 50 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
 $[(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$
 $= \{(a+b)^3+c^3\}-3ab(a+b+c)$
 問題 28 (1) 参照]
- 51 (1) $(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1)$
 (2) $(1-2x-3y)(4x^2-6xy+9y^2+2x+3y+1)$
 [(1) 問題 50 において $a \rightarrow x$, $b \rightarrow y$,
 $c \rightarrow 1$ とおき換えるとよい]
- 52 (1) 0.15 (2) 0.15 (3) 1.16 (4) 1.148
- 53 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{3}{1}$ (3) $\frac{-2}{5}$ (4) $\frac{-31}{25}$
 (5) $\frac{8}{9}$ (6) $\frac{5}{33}$ (7) $\frac{26}{111}$ (8) $\frac{29}{198}$
- 54 (1) 正しい
 (2) 正しくない, $(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}=1$
 (3) 正しくない, $0 \times \sqrt{2}=0$
 (4) 正しくない, $\sqrt{2} \times \sqrt{2}=2$
- 55 
 (1) $7, \sqrt{16}, (\sqrt{5})^2$

- (2) $-3, 0, 7, \sqrt{16}, (\sqrt{5})^2$
 (3) $-3, 0, 7, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, 0.123, \sqrt{16}, (\sqrt{5})^2$
 (4) $-\sqrt{3}, \pi$ (5) $\frac{5}{4}$ (6) $\frac{2}{3}, 0.123$
- 56 (1) 4 (2) 6 (3) $4-\pi$ (4) $2-\sqrt{2}$
 [(3) $\pi-4 < 0$ (4) $\sqrt{2}-2 < 0$]
- 57 (1) 17 (2) 11 (3) 13 (4) 6
- 58 $-\frac{7}{9} = \frac{-7}{9}, 0.5 = \frac{5}{10}$
 $|\frac{-1}{4}| = \frac{1}{4}, -\sqrt{4} = \frac{-2}{1}$
- 59 (1) ± 10 (2) $\pm\sqrt{10}$ (3) ± 1 (4) 0
 (5) 7 (6) 7 (7) 7 (8) 7
- 60 (1) $2\sqrt{3}$ (2) 60 (3) $2\sqrt{5}$ (4) $\frac{5}{2}$
 (5) $\sqrt{5}$ (6) $3\sqrt{5}$ (7) $6\sqrt{2}$ (8) $14\sqrt{6}$
- 61 (1) 18 (2) $-20+10\sqrt{2}$ (3) $7+2\sqrt{10}$
 (4) $35-12\sqrt{6}$ (5) 4 (6) -4
 (7) $48+13\sqrt{15}$ (8) $4+10\sqrt{35}$
- 62 (1) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
 (3) $-3-2\sqrt{2}$ (4) $-\frac{6-5\sqrt{2}}{2}$
- 63 (1) $3\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) $-3-2\sqrt{2}$
 (4) $-3\sqrt{5}$
- 64 (1) $x+y=10, xy=1$ (2) 98 (3) 970
 [対称式は基本対称式 $x+y, xy$ で表される。
 (2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
 (3) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$]
- 65 (1) [1] $-2\sqrt{10}$ [2] 38 [3] $74\sqrt{10}$
 (2) $2\sqrt{5}$ [(1) $\frac{1}{x} = \frac{1}{3-\sqrt{10}} = -3\sqrt{10}$
 $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2,$
 $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x})$]
- 66 (1) 63.2 (2) 0.632 (3) 0.2
 (4) 0.158 (5) 12.32 (6) 4.44
 [(1) $\sqrt{40 \times 10^2} = 10\sqrt{40}$
 (2) $\sqrt{40 \times \frac{1}{10^2}} = \frac{\sqrt{40}}{10}$ (3) $\sqrt{4 \times \frac{1}{10^4}} = \frac{2}{10}$
 (4)~(6) 分母の有理化 (4) $\frac{\sqrt{40}}{40}$

(5) $\sqrt{40}+6$ (6) $\frac{7+2\sqrt{10}}{3}=\frac{7+\sqrt{40}}{3}$

67 (1) $a=1, b=2-\sqrt{3}$ (2) $8-4\sqrt{3}$

(3) $2+\sqrt{3}$ $\left[\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=3-\sqrt{3} \right]$

$\sqrt{3}$ は $1(=\sqrt{1^2})$ と $2(=\sqrt{2^2})$ の間にあるから $\sqrt{3}=1. \dots$ したがって

$3-\sqrt{3}=1. \dots$ から $a=1, b=(3-\sqrt{3})-a$

68 (1) $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$ (2) $2\sqrt{6}$

(3) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}$ (4) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(5) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ (6) $2+\sqrt{6}$

[(3) $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2$ に着目して、分子・分母に $(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}$ を掛ける。(4)~(6)についても同様]

69 (1) $\sqrt{3}+1$ (2) $4-\sqrt{3}$ (3) $2\sqrt{2}-2$

(4) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (5) $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}$

(6) $\frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}}{2}$ (7) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(8) $5-2\sqrt{6}$ (9) $\frac{11\sqrt{2}+5\sqrt{10}}{2}$

[(1) $\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3}\cdot 1}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{1})^2}$

(2) $\sqrt{(16+3)-2\sqrt{16}\cdot 3}=\sqrt{(\sqrt{16}-\sqrt{3})^2}$

(3) $\sqrt{12-2\sqrt{32}}=\sqrt{(8+4)-2\sqrt{8}\cdot 4}$

(4) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(3+2)+2\sqrt{3}\cdot 2}$

(5) $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(7+3)-2\sqrt{7}\cdot 3}}{\sqrt{2}}$

(6) $\frac{\sqrt{20+2\sqrt{75}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(15+5)+2\sqrt{15}\cdot 5}}{\sqrt{2}}$

(7) $\frac{1}{\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3}\cdot 1}}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$

(8) $\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(9) $\sqrt{9-\sqrt{80}}=\sqrt{9-2\sqrt{20}}=\sqrt{5}-\sqrt{4}$

$\sqrt{7+3\sqrt{5}}=\sqrt{7+\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{14+2\sqrt{45}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{9+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$ から $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)} \right]$

70 (1) $x+5>2x$ (2) $8x+100\leq 3000$

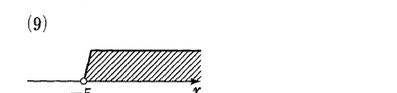
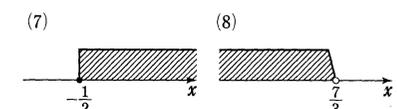
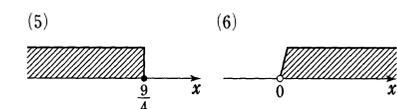
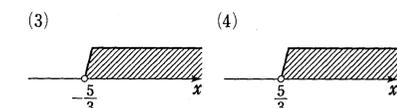
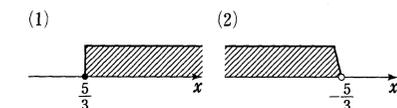
71 (1) $<$ (2) $<$ (3) $<$ (4) $<$
(5) $>$ (6) $<$ (7) $<$ (8) $>$ (9) $>$

72 (1) ③, ④ (2) ①, ② (3) ②, ③, ④

73 (1) $x\geq \frac{5}{3}$ (2) $x<-\frac{5}{3}$ (3) $x>-\frac{5}{3}$

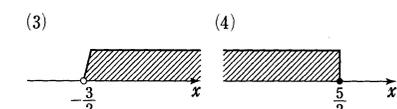
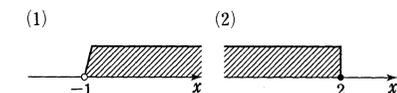
(4) $x>\frac{5}{3}$ (5) $x\leq \frac{9}{4}$ (6) $x>0$

(7) $x\geq -\frac{1}{2}$ (8) $x<\frac{7}{3}$ (9) $x>-5$



74 (1) $x>-1$ (2) $x\leq 2$ (3) $x>-\frac{3}{2}$

(4) $x\leq \frac{5}{2}$



75 (1) $x>18$ (2) $x\leq -\frac{27}{11}$

(3) $x\geq -\frac{3}{2}$ (4) $x<\frac{12}{5}$

[(1), (2) ヒント参照 (4) $0.5=\frac{1}{2}$ から 2

と3の最小公倍数6を掛ける]

76 (1) $k=-3$ (2) $k<3$

[(1) $\frac{3-k}{6}=1$ (2) $\frac{3-k}{6}>0$]

77 (1) 3個 (2) 6個

[(1) $x\leq \frac{10}{3}$ (2) $x<7$]

78 $n=3$ [不等式を解くと $n>2$]

79 (1) $a>0$ のとき $x>\frac{3}{a}$, $a=0$ のとき 解

はない, $a<0$ のとき $x<\frac{3}{a}$

(2) $a>4$ のとき $x\leq -2$, $a=4$ のとき 解はすべての実数, $a<4$ のとき $x\geq -2$

[ヒント参照。(2) $(a-4)x\leq -2(a-4)$]

80 (1) $-5\leq x<3$ (2) $x<-5$ (3) $x\geq 5$

(4) 解はない (5) $5<x<7$

(6) $-1<x\leq \frac{18}{5}$ (7) $x\geq 31$ (8) $2\leq x<\frac{8}{3}$

(9) $-1<x<3$ (10) $x=2$

81 12歳以下 [現在の一郎君の年齢を x 歳とすると $x+25>\frac{1}{2}(4x+25)$]

82 (1) [1] $x\geq 9$ [2] $\frac{1}{7}<x\leq \frac{3}{2}$

(2) $x=11, 12$

83 (1) $21<3x+5y<35, 0<4x-2y<14$

(2) $12\leq xy<27$

(3) $-24<3x-5y<-16, 29.25\leq xy<41.25$

[例題10参照]

84 $\frac{17}{8}\leq x<\frac{23}{8}$ $\left[2.5\leq \frac{4x-1}{3}<3.5 \right]$

85 $-4\leq a<-3$

$\left[1-a\leq x<\frac{11}{2} \right]$ により $4<1-a\leq 5$

86 33個 [りんごを x 個買うとすると $70x+40(50-x)\leq 3000$]

87 12km以上 $\left[\frac{x}{4}+\frac{24-x}{3}\leq 7 \right]$

88 55脚以上63脚以下

[長いすの数を x とすると高校生の数は

$8x+10$ から $9(x-6)<8x+10\leq 9(x-5)$]

89 (1) 5 (2) 5 (3) $\sqrt{3}-1$ (4) $\pi-\sqrt{6}$

(5) $x\geq 1$ のとき $x-1$, $x<1$ のとき $-x+1$

(6) $x\geq -3$ のとき $x+3$, $x<-3$ のとき $-x-3$

(7) $x\geq \frac{5}{2}$ のとき $2x-5$, $x<\frac{5}{2}$ のとき $-2x+5$

(8) $x\geq -\frac{5}{3}$ のとき $3x+5$,

$x<-\frac{5}{3}$ のとき $-3x-5$

90 (1) $x=\pm 6$ (2) $-6<x<6$

(3) $x<-6, 6<x$ (4) $x\leq -6, 6\leq x$

(5) $x=11, -5$ (6) $-5<x<11$

(7) $x<-5, 11<x$ (8) $-5\leq x\leq 11$

91 (1) $x=6, 4$ (2) $-10<x<-2$

(3) $x<-\frac{1}{3}, 5<x$ (4) $-\frac{13}{4}\leq x\leq -\frac{1}{4}$

92 (1) $x=3$ (2) 解はすべての実数

(3) 解はない (4) $x=3$

93 (1) $|x|$ (2) $|x-3|$ (3) $|x+4|$

(4) $|2x+3|$

94 (1) [1] $4-\sqrt{6}$ [2] $\sqrt{6}-2$

[3] $x\geq -\frac{9}{2}$ のとき $2x+9$,

$x<-\frac{9}{2}$ のとき $-2x-9$

(2) [1] $x<-\frac{10}{3}, -\frac{8}{3}<x$ [2] $\frac{3}{2}\leq x\leq 3$

[3] $x=-3$ (3) $|x-4|$

95 (1) $x=2, 6$ (2) $x<2, 6<x$

(3) $2\leq x\leq 6$ (4) $x=-1$ (5) $x\geq -1$

(6) $x<-1$ (7) $x=\frac{3}{4}$ (8) $x<\frac{3}{4}$

(9) $x\geq \frac{3}{4}$ [(1)~(3) $x\geq 3, x<3$ で場合分け]

96 (1) $x=4, -1$ (2) $x<-1, 4<x$

(3) $-1\leq x\leq 4$ (4) $x=\frac{4}{3}, 4$

(5) $x\leq \frac{4}{3}, 4\leq x$ (6) $\frac{4}{3}<x<4$

[(1)~(3) $x<0, 0\leq x<3, 3\leq x$ で場合分け]

97 (1) \in (2) \notin (3) \in (4) \in

98 (1) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

(2) $\{0, 1, 4\}$ (3) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

(4) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

99 (1) $B\subset A$ (2) $A=B$

[(2) $A=\{2, 5\}, B=\{2, 5\}$]

100 $\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{s\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{p, s\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{r, s\}, \{p, q, r\}, \{p, q, r, s\}$

$\{p, q, s\}, \{p, r, s\}, \{q, r, s\}, \{p, q, r, s\}$
 [要素の個数が0個の場合, 1個の場合, ..., 4個の場合を順に書き並べるとよい]

- 101 (1) $\{2, 3\}$ (2) $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 10\}$
 (3) \emptyset (4) $\{4, 6, 8, 9, 10\}$
 (5) $\{1, 5, 7\}$ (6) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
 (7) $\{4, 6, 9\}$ (8) $\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 (9) $\{4, 6, 9\}$ (10) $\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 (11) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ (12) \emptyset
 [(7), (9) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
 (8), (10) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$]

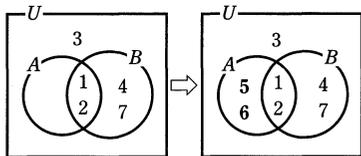
- 102 (1) $\{2, 4, 8\}$ (2) $\{1, 2, 4, 6, 8\}$
 (3) $\{6\}$ (4) $\{3, 5, 7\}$

$[A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{2, 4, 6, 8\}]$

- 103 (1) $\{5, 9, 13, 17, 21\}$
 (2) $\{1, 9, 25, 49, 81\}$ [Sの要素を書き並べると $S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$]

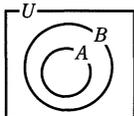
104 P, S, T [それぞれの集合の要素をみて, すべての要素が集合Aの要素である集合を選ぶ。ただし, 空集合は, どんな集合に対してもその部分集合であるから, 選ぶ必要がある]

- 105 $A = \{1, 2, 5, 6\}, B = \{1, 2, 4, 7\}$
 $A \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
 $[A \cap B = \{1, 2\}, \overline{A} \cap B = \{4, 7\},$
 $\overline{A} \cap \overline{B} = \{3\}]$ をベン図でかくと下の左の図のようになる。 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ であるから, $A \cap \overline{B} = \{5, 6\}$ となり, 下の右の図のようになる]



- 106 $a=2, A \cup B = \{2, 3, 5, 6\}$
 [ヒントから $3 \in B$ よって $3a - 3 = 3$ から $a=2$ このとき $2a+1=5$ 条件を満たす]

107 $A \cap B = A, A \cup B = B, A \cap \overline{B} = \emptyset$
 [ベン図で考えるとわかりやすい。右の図参照]



- 108 $[B \supseteq 6n (n \text{ は整数}) \text{ とすると } 6n = 3 \cdot 2n \in A]$
- 109 $[A \supseteq a = 4n + 1 (n \text{ は整数}) \text{ とすると}$

$4n + 1 = 2(2n + 1) - 1 \in B$ よって $A \subset B]$

- 110 命題は (2), (3)
 真偽は (2) 偽 (3) 真
 [(1) 1.41 は 1.4 と比べると $\sqrt{2}$ に近いが 1.414 と比べると $\sqrt{2}$ に近い。よって, 真偽が明確に決まらないので命題ではない]

- 111 (1) 真 (2) 偽 (3) 真 (4) 偽
 [(1) $P = \{x | 3 < x < 6\}, Q = \{x | x > 1\}$ とすると $P \subset Q$ よって 真]

- 112 (1) 偽 (反例) $n=6$ (2) 偽 (反例) $n=5$

- 113 (1) $a \neq -1$ (2) $a < 5$
 (3) $a < -2$ または $1 \leq a$ (4) $a \leq 0$

- 114 (1) $\{x | 2 \leq x < 5\}$ (2) $\{x | -8 < x \leq 7\}$

- 115 (1) $x \neq 3$ または $y \neq 5$
 (2) $x \leq 4$ かつ $y < 4$
 (3) $x \leq 8$ かつ $x \geq 3 (3 \leq x \leq 8)$
 (4) $x < 5$ または $x \geq 10$

- 116 (1) m, n の少なくとも一方は偶数
 (2) m, n はともに 3 の倍数でない
 (3) $x \leq 0$ かつ $y > 0$ (4) $x \neq 0$ または $y = 0$

- 117 (1) $P \cap Q$ (2) $\overline{P} \cap Q$ (3) $\overline{P} \cap \overline{Q}$
 [(1) (2 の倍数) かつ (3 の倍数)
 (2) (3 の倍数) かつ (2 の倍数でない)
 (3) (3 の倍数でなく) かつ (2 の倍数でない)]

- 118 (1) 真 (2) 偽 (3) 真 (4) 真
 [k, l を整数とする。(1) $m=2k, n=2l$ とすると $m+n=2(k+l)$

- (2) $m=2k+1, n=2l+1$ とすると $m+n=2(k+l+1)$
 (あるいは反例: $m=3, n=5$)
 (3) $m=2k, n=2l$ とすると $mn=2(2kl)$
 (4) $m=2k+1, n=2l+1$ とすると $mn=2(2kl+k+l)+1]$

- 119 (1) 偽 (反例: $x=-1, y=-1$)
 (2) 偽 (反例: $x=3, y=0$)
 (3) 偽 (反例: $x=3, y=-1$)
 (4) 偽 (反例: $x=2, y=0$)

- 120 (1) 偽 (反例: $n=6$) (2) 真
 [(2) $n^2+n=n(n+1)$ n と $n+1$ のどちらかは 2 の倍数であるから n^2+n は 2 の倍数。
 n は 3 の倍数であるから n^2+n は 3 の倍数]

- 121 (1) 十分 (2) 十分 (3) \times

- (4) 必要 (5) 必要十分

- 122 (1) 必要十分条件 (2) 必要条件
 (3) 十分条件

- 123 ① と ④, ⑤ と ⑦, ⑥ と ⑧

- 124 (1) 十分条件 (2) 必要十分条件
 (3) 必要条件 [(3) $p \Rightarrow q$ は成り立たない。
 反例: $x = \sqrt{2} + 1, y = -\sqrt{2}]$

- 125 (1) 十分条件 (2) 必要十分条件
 (3) いずれでもない (4) 必要十分条件

- 126 [(\Rightarrow) $a-k > 0, b-k > 0$ から。
 (\Leftarrow) $(a-k)(b-k) > 0$ から $a-k$ と $b-k$ は同符号。さらに $(a-k) + (b-k) > 0$ から $a-k > 0, b-k > 0$]

- 127 (1) 否定: ある実数 x について $(x+3)^2 = 0$;
 もとの命題 (偽), 否定の命題 (真)
 (2) 否定: すべての自然数 n について n^2+1 は偶数; もとの命題 (真), 否定の命題 (偽)

- 128 (1) 逆: $(x-2)(x-3) = 0$ ならば $x=2$ (偽)
 対偶: $(x-2)(x-3) \neq 0$ ならば $x \neq 2$ (真)
 (2) 逆: $x \neq 2$ ならば $(x-2)(x-3) \neq 0$ (偽)
 対偶: $x=2$ ならば $(x-2)(x-3) = 0$ (真)
 (3) 逆: 「 $x=2$ または $x=3$ 」ならば $(x-2)(x-3) = 0$ (真)
 対偶: 「 $x \neq 2$ かつ $x \neq 3$ 」ならば $(x-2)(x-3) \neq 0$ (真)

- 129 (1) もとの命題は真;
 逆: 日本の首都は東京都である (真)
 裏: 東京都でなければ日本の首都でない (真)
 対偶: 日本の首都でなければ東京都でない (真)

- (2) もとの命題は真;
 逆: 平行四辺形は長方形である (偽)
 裏: 長方形でなければ平行四辺形でない (偽)
 対偶: 平行四辺形でなければ長方形でない (真)
 (3) もとの命題は偽;

- 逆: 6 の倍数は 3 の倍数である (真)
 裏: 3 の倍数でなければ 6 の倍数でない (真)
 対偶: 6 の倍数でなければ, 3 の倍数でない (偽)

- 130 [(1) 対偶: 「 $x \leq 3$ かつ $y \leq 2$ 」ならば $x+y \leq 5$ (2) 対偶: $y=1$ ならば $y^2=y$]

- 131 [それぞれを有理数 r に等しいと仮定すると (1) $\sqrt{3} = r-1$ (2) $\sqrt{3} = \frac{r}{2}$

- (3) $\sqrt{3} = \frac{3}{2}r$ (または $\sqrt{3} = \frac{2}{r}$)
 となり, $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾]

- 132 (1) もとの命題は真;
 逆: $xy > 0$ ならば 「 $x > 0$ かつ $y > 0$ 」 (偽)
 裏: 「 $x \leq 0$ または $y \leq 0$ 」ならば $xy \leq 0$ (偽)
 対偶: $xy \leq 0$ ならば 「 $x \leq 0$ または $y \leq 0$ 」 (真)
 (2) もとの命題は真;

- 逆: 「 $x=3$ または $y=6$ 」ならば $(x-3)(y-6) = 0$ (真)
 裏: $(x-3)(y-6) \neq 0$ ならば 「 $x \neq 3$ かつ $y \neq 6$ 」 (真)
 対偶: 「 $x \neq 3$ かつ $y \neq 6$ 」ならば $(x-3)(y-6) \neq 0$ (真)

- 133 [(1) 対偶: $a=0$ または $b=0$ ならば $ab \neq 1$
 (2) 対偶: $a \leq 0$ かつ $b \leq 0$ ならば $a+b \neq 1$]

- 134 [(1) 対偶: n が奇数ならば, n^3+1 は偶数である。
 k を整数として $n=2k+1$ とおける。
 $n^3+1 = (2k+1)^3+1 = 2(4k^3+6k^2+3k+1)$
 (2) 対偶: m が 3 の倍数でないならば $2m \neq 3n$ k を整数として [1] $m=3k+1$ ならば $2m=2(3k+1)=3(2k)+2 \neq 3n$
 [2] $m=3k+2$ ならば $2m=2(3k+2)=3(2k+1)+1 \neq 3n$
 (3) 対偶: m かつ n が 3 の倍数でないならば, mn は 3 の倍数でない。
 k, l を整数として
 [1] $m=3k+1, n=3l+1$ ならば $mn=3(3kl+k+l)+1$ 以下同様に
 [2] $m=3k+1, n=3l+2$
 [3] $m=3k+2, n=3l+1$
 [4] $m=3k+2, n=3l+2$ を調べる]

- 135 [(1) $\sqrt{5}$ が無理数でないを仮定すると $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ (a, b は 1 以外に公約数をもたない自然数) よって $a = \sqrt{5}b$
 $a^2 = 5b^2$ から a^2 は 5 の倍数。このとき a も 5 の倍数 (問題 145 (2) 参照)。 $a = 5p$ (p は自然数) と表され $5p^2 = b^2$ ゆえに, b も 5 の倍数。これは矛盾。
 (2) $\sqrt{3} + \sqrt{15} = r$ (r は有理数) と仮定する。

両辺を平方とすると $18+6\sqrt{5}=r^2$ よって $\sqrt{5}=\frac{r^2-18}{6}$ となり、 $\sqrt{5}$ が無理数であることに矛盾]

136 (2) [1] $p=3, q=-2$ [2] $p=0, q=0$

[(1) まず、 $b \neq 0$ とすると $u=-\frac{a}{b}$ (矛盾)

よって $b=0$

$b=0$ ならば、 $a+bu=0$ から $a=0$

(2) [1] $p-3=0, q+2=0$

[2] 与式から $p+3q+(p-2q)\sqrt{5}=0$

よって $p+3q=0, p-2q=0$]

137 $-4x^2+3xy-5y^2$

[ある整式を A とすると、題意から

$A+(3x^2-xy+2y^2)=2x^2+xy-y^2$

正しい結果は $A-(3x^2-xy+2y^2)$]

138 x^5 の係数は -17 , x^2 の係数は -65

[全部展開せずに、関係のある項に着目する。

$x^5 \cdots 5x^3 \cdot (-x^2) + (-6x^2) \cdot 3x^3 + 3x \cdot 2x^4$

$x^2 \cdots (-6x^2) \cdot 8 + 3x \cdot (-7x) + (-4) \cdot (-x^2)$]

139 (1) $(x-2y-3)(2x+y-4)$

(2) $-(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$

(3) $(a^2+3a+7)(a^2+3a-5)$

(4) $(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(5) $(x+y+1)(x^2-xy+y^2)$

(6) $(x+y)(x-y)(xy-y+1)$

[(1) x について整理すると

$2x^2-(3y+10)x-(2y^2-5y-12)$

$=2x^2-(3y+10)x-(2y+3)(y-4)$

(2) まず、 x について整理して共通因数

$(y-z)$ をくくり出す。次に y について整理

(4) $x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1)$

$= (x+1)(x^4+x^2+1) = (x+1)\{(x^2+1)^2-x^2\}$

(5) $(x^3+y^3)+(x^2-xy+y^2)$

$= (x+y)(x^2-xy+y^2)+(x^2-xy+y^2)$

(6) $(x^3y-xy^3)+(y^3-x^2y)+(x^2-y^2)$

$= xy(x^2-y^2)-y(x^2-y^2)+(x^2-y^2)$]

140 (1) $a^2+\frac{1}{a^2}=7, \left(a-\frac{1}{a}\right)^2=5,$

$a-\frac{1}{a}=\pm\sqrt{5}$

(2) $x^3-2x^2=2-\sqrt{5}, x^4-3x^3=\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}$

[(1) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$

$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2$

(2) $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ から $2x-3=-\sqrt{5}$

両辺を平方して整理すると $x^2-3x+1=0$

$x^2=3x-1$

$x^3=x^2 \cdot x=(3x-1)x=3x^2-x=\cdots=8x-3$

$x^4=(x^2)^2=(3x-1)^2=9x^2-6x+1=\cdots=21x-8$

よって $x^3-2x^2=(8x-3)-2(3x-1)=\cdots$

$x^4-3x^3=(21x-8)-3(8x-3)=\cdots]$

141 $0 < a < 1$ のとき $2a, 1 \leq a$ のとき 2

[(与式) $=\sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{(a-1)^2}$

$=|a+1|-|a-1|]$

142 $a \neq 1, a \neq 0$ のとき $x=\frac{1}{a}; a=1$ のとき

すべての実数; $a=0$ のとき 解はない

$[a(a-1)x=a-1$

$a=1$ のとき $0 \cdot x=0$

どのような x の値に対しても等式が成り立つ。

$a=0$ のとき $0 \cdot x=-1$

どのような x の値に対しても等式が成り立たない。

(参考) x について整理し、 $Ax=B$ の形にする。

$A \neq 0$ のとき $x=\frac{B}{A}$

$A=0$ のとき $B=0$ なら解はすべての実数

$B \neq 0$ なら解はない]

143 (100円, 10円, 5円)

$= (17枚, 27枚, 6枚), (18枚, 8枚, 24枚)$

[100円, 10円, 5円硬貨の枚数をそれぞれ

x, y, z とすると

$x+y+z=50, 100x+10y+5z=2000$

よって $y=350-19x, z=18x-300$

$y \geq 0, z \geq 0, x$ は自然数から $x=17, 18]$

144 (1) 十分条件 (2) 必要条件

[(1) $p \Rightarrow q$ (真);

$q \Rightarrow p$ (偽) 反例: $x=-1$

(2) $q \Rightarrow p$ (真);

$p \Rightarrow q$ (偽) 反例: $x=\frac{1}{2}, y=4]$

145 (1) 偽 (反例) $n=6$ (2) 真

(3) 偽 (反例) $a=2\sqrt{5}$ (4) 真

(5) 偽 (反例) $a=\sqrt{2}$

[(2) 背理法で考える。 n が 5 の倍数でない

とすると $n=5k+r$ (k は整数, $r=1, 2, 3, 4$)

$n^2=(5k+r)^2=5(5k^2+2kr)+r^2$
 r^2 は 5 の倍数とならないから、 n^2 は 5 の倍数ではない、矛盾。

(4) 対偶を考える。 a が有理数ならば $a^2 \cdots$]

146 [a と b の少なくとも一方が 3 の倍数でない

とすると、 h, k を整数として

$a=3h+p, b=3k+q$ ($p, q=0, 1, 2$

ただし $p=q=0$ の場合を除く)

a^2+b^2 を計算すると、 $3l$ (l は整数) の形には

表されないから、矛盾]