FTEXT　数Ｂ

例題問題集

Ⅰ　数　列

1　数列の一般項と和

2　漸化式

3　数学的帰納法

Ⅱ　ベクトル

1　ベクトルの定義と基本演算

2　平面ベクトルと平面図形

3　空間ベクトルの演算

I　数　列

1　数列の一般項と和

1-1　例題　漸化式から数列の項を求める

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第5項までを書き出せ.

1. $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+n^2$
2. $a_1=2$, $a_{n+1}=3a_n+2$
3. $a_1=1,\quad a_{n+1}=5a_n+2\cdot n$
4. $a_1=1, a_{n+1}=5a_n+n$
5. $a_1=2, a_2=5, a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$
6. $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{2a_n+2}{a_n+3}$

[解答]

1. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5　$1, 1+2^2=5, 5+3^2=14, 14+4^2=30, 30+5^2=55$

より, $1,5,14,30,55$ である.

2. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5　$2, 3\cdot 2+2=8, 3\cdot 8+2=26, 3\cdot 26+2=80, 3\cdot 80+2=242$

より, $2,8,26,80,242$ である.

3. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5　$1, 5\cdot 1+2\cdot 1=7, 5\cdot 7+2\cdot 2=39, 5\cdot 39+2\cdot 3=203, 5\cdot 203+2\cdot 4=1031$

より, $1,7,39,203,1031$ である.

4. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5　$1, 5\cdot 1+1=6, 5\cdot 6+2=32, 5\cdot 32+3=163, 5\cdot 163+4=819$

より, $1,6,32,163,819$ である.

5. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5　$2, 5, 5\cdot 5-6\cdot 2=13, 5\cdot 13-6\cdot 5=35, 5\cdot 35-6\cdot 13=97$

より, $2,5,13,35,97$ である.

6. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5　$2, \dfrac{2\cdot 2+2}{2+3}=\dfrac{6}{5}, \dfrac{2\cdot\frac{6}{5}+2}{\frac{6}{5}+3}=\dfrac{22}{21}, \dfrac{2\cdot\frac{22}{21}+2}{\frac{22}{21}+3}=\dfrac{86}{85},$

$\dfrac{2\cdot\frac{86}{85}+2}{\frac{86}{85}+3}=\dfrac{342}{341}$ より, $2, \dfrac{6}{5}, \dfrac{22}{21}, \dfrac{86}{85}, \dfrac{342}{341}$ である.

1-2　例題　数列の一般項

数列{ a_n }の一般項が，次の式で与えられているとき，初項から第 5 項までを書き出せ.

1.　$a_n=2n$　　2.　$a_n=2^n$　　3.　$a_n=\dfrac{2n+1}{n}$　　4.　$a_n=\dfrac{2^n}{n+1}$

[**解答**]

1．　$2,4,6,8,10$　、**2．**　$2,4,8,16,32$　、**3．**　$3,\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{3},\dfrac{9}{4},\dfrac{11}{5}$　、**4．**　$1,\dfrac{4}{3},2,\dfrac{16}{5},\dfrac{16}{3}$

1-3　例題　等差数列の一般項～その１～

次の等差数列{ a_n }の一般項 a_n を求めよ．また，第 10 項を求めよ.

1. $2,5,8,11,14,\cdots$
2. $100,98,96,94,92,\cdots$

[解答]

(1) 初項が 2，公差が 3 の等差数列であり，第 n 項（一般項）

は初項 a_1 に公差 d を $n-1$ 回加えることによって求められるので

$$a_n=2+(n-1)3=3n-1$$

また，第10 項は $a_{10}=3\cdot10-1=29$ である.

(2) 初項が100，公差が−2 の等差数列だから

$$a_n=100+(n-1)\cdot(-2)=-2n+102$$

また，第10 項は $a_{10}=-2\cdot10+102=82$ である.

1-4　例題　等差数列の一般項～その２～

次の条件を満たす等差数列{ a_n }の一般項を求めよ.

1. 初項が 13、第 4 項が 22、
2. 第 3 項が 1 、第 10 項が -13

[解答]

(1) 等差数列は公差が一定であるので，条件からまず公差を求めよう．初項から第 4 項までは，

公差が 3 回足されるので，公差を d とすると

$$3d=a_4-a_1=22-13=9 \qquad \therefore \qquad d=3$$

よって，$a_n=13+(n-1)\cdot3=3n-10$ となる.

[別解]

等差数列の一般項は　$a_n = a_1 + (n-1)d$　として与えられるので，問題の条件から　a_1　と　d　の連立方程式を立てることができる．初項を　a　，公差を　d　とすると

$$a_1 = a = 13 \quad , \quad a_4 = a + 3d = 22$$

となる．これらを連立させて解くと

$$a = 13 \quad ; \quad d = 3$$

よって，　$a_n = 13 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 10$　となる．

(2) 第3 項から第10 項までは，公差が7 回足されるので，公差を　d　とすると
$7d = a_{10} - a_3 = -13 - 1 = -14$

第10 項から第　n　項までは，公差が　$n-10$　回足されるので

$$a_n = a_{10} + (n-10)d = -13 + (n-10) \cdot (-2) = -2n + 7$$

[別解]

初項を　a　，公差を　d　とすると初項が3 であるから　$a + 2d = 1$

第10 項が　-13　であるから　$a + 9d = -13$　となる．これらを連立させて解くと

$$a = 5 \quad ; \quad d = -2$$

よって，　$a_n = 5 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 7$　となる．

1-5　例題　等差数列の一般項～その３～

第 12 項が 43，第 27 項が 223 である等差数列がある．このとき， 295 はこの数列の第何項か．

[解答]

この数列の初項を　a　，公差を　d　とすると

$$a_n = a + (n-1)d$$

ここで　$a_{12} = 43, a_{27} = 223$　であるから

$$43 = a + 11d \quad , \quad 223 = a + 26d$$

これを解いて，　$a = -89$　;　$d = 12$　.

よって一般項　a_n　は

$$a_n = -89 + (n-1) \cdot 12 = 12n - 77$$

ここで　295　が第　n　項であるとすると

$$295 = 12n - 77$$

これを解いて，　$n = 32$　.

したがって，　295　はこの数列の第　32　項である．

1-6　例題　等差数列の和～その１～

次の等差数列　a_n

の初項から第　n　項までの和　S_n　を求めよ．また，　S_{10}　を求めよ．

1.　$2,5,8,11,14,\cdots$
2.　$100,98,96,94,92,\cdots$

[解答]

(1) 初項が 2，公差が 3 の等差数列だから，この数列の般項　a_n　は

$$a_n=2+(n-1)3=3n-1$$

よって，初項から第　n　項までの和　S_n　は

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n(3n+1)}{2}$$

また，初項から第10 項までの和　S_{10}　は

$$S_{10}=\frac{10\cdot(3\cdot 10+1)}{2}=155$$

(2) 初項が　100　，公差が　-2　の等差数列だから，この数列の一般項　a_n　は

$$a_n=100+(n-1)\cdot(-2)=-2n+102$$

よって，初項から第　n　項までの和　S_n　は

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=n(101-n)$$

また，初項から第 10 項までの和　S_{10}　は

$$S_{10}=10\cdot(101-10)=910$$

1-7　例題　等差数列の和～その２～

1 から 50 までの整数のうち，次のような数の和を求めよ．

1. 2 の倍数
2. 3 の倍数
3. 2 または 3 の倍数

【解答】

(1)　$A_2=2,4,6,\cdots,50$　は，初項2，項数25，末項50 の等差数列であるから，求める和　S_2　は

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot 25(2+50)=650$$

(2)　$A_3=3,6,9,\cdots,48$　は，初項　3　，項数　16　，末項　48　の等差数列であるから，
求める和　S_3　は

$$S_3=\frac{1}{2}\cdot 16(3+48)=408$$

(3)　2　または　3　の倍数の和　S　は，　$S=S_2+S_3-S_6$　で与えられるので，　S_6　を求めればよい

$A_6=6,12,18,\cdot\cdot\cdot,48$ は，初項 6 ，項数 8 ，末項 48 の等差数列であるから，

S_6 は $S_6=\frac{1}{2}\cdot 8(6+48)=216$

よって $S_6=650+408-216=842$

1-8　例題　等差数列の和の最大値

一般項 a_n が a_n+120 である数列 a_n について，以下の問に答えよ．

1. 初めて負になる項は第何項目か．
2. 初項からの和が最大になるのは，第何項目までの和か．また，その和の最大値を求めよ．

[解答]

(1) $a_n=-6n+120$ が負になるのは

$$-6n+120<0 \iff 6n>120 \iff n>20$$

つまり， $n=21$ のとき a_n は負となる．よって，初めて負になるのは第 21 項目である．

(2) (1) より，初項から第 20 項までの項は，すべて正あるいは 0 なので， S_{20} が初項からの和の最大値となる．また， $a_{20}=0$ であるから， $S_{20}=S_{19}$ であり，こちらも最大値である．よって，和が最大になるのは，第 19 項目または第 20 項目である．

このとき，最大値は

$$S_{19}=\frac{19}{2}\cdot(a_1+a_{19})=\frac{20}{2}\cdot(114+6)=1140$$

【別解】

一般項が $a_n=-6n+120$ である等差数列の和 S_n は

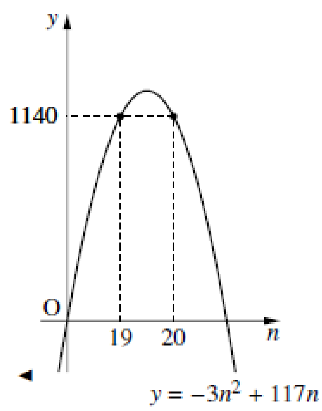
$$S_n=\frac{n}{2}114+(-6n+120)=\frac{1}{2}(-6n+234)$$

$$=\ -3n^2+117n$$

となり， S_n が2次関数で与えられていることがわかる．

右図のグラフより， n が整数であることに注意すると，

この S_n が最大値をとるのは $n=19,20$ のときである．



1-9　例題　等比数列の一般項～その１～

次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．また，第 10 項を求めよ．

1.　$2,6,18,54,162,\cdots$

2.　$81,-27,9,-3,1,\cdots$

[解答]

(1) 初項が 2 ，公比が 3 の等比数列であり，第 n 項（一般項）は初項 a_1 に公比 r を $n-1$ 回かけることによって求められるので

$$a_n=2\cdot 3(n-1)$$

また，第 10 項は $a_{10}=2\cdot 39=39366$ である.

(2) 初項が 81 ，公比が -13 の等比数列だから

$a_n=81\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ また，第 10 項は $a_{10}=81\left(-\frac{1}{3}\right)^{9} = -\frac{1}{243}$ である。

1-10 例題 等比数列の一般項～その２～

次の条件を満たす等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

1. 初項が 2 ，第 4 項が -54 ，

2. 第 3 項が 34 ，第 7 項が 364

[解答]

(1) 等比数列は公比が一定であるので，条件からまず公比を求めよう．初項から第 4 項までは，公比が $(4-1=)$ 3 回掛けられるので，公比を r とすると

$$a_1r^3=a_4 \iff r^3=\frac{a_4}{a_1}=\frac{-54}{2}=-27 \quad \therefore \quad r=-3$$

よって， $a_n=2(-3)^{n-1}$ となる.

[別解]

(1) 等比数列の一般項は $a_n=a_1r^{n-1}$ として与えられるので，問題の条件から a_1 と r の連立方程式を立てることができる．初項を a ，公比を r とすると

$$a_1=a=2$$
$$a_4=ar^3=-54$$

となる．これらを連立させて解くと

$$a=2\,;r=-3$$

よって， $a_n=2(-3)^{n-1}$ となる.

2. 第 3 項から第 7 項までは，公比が $7-3=4$ 回かけられるので，公比を r とすると

$$a_3r^4=a_7 \iff r^4=\frac{a_7}{a_3}=\frac{3}{64}\div\frac{3}{4}=\frac{1}{16} \qquad \therefore \quad r=\pm\frac{1}{2}$$

第 3 項から第 n 項までは，公比の $n-3$ 乗がかかるので

$$a_n=a_3r^{n-3} = \frac{3}{4}\left(\pm\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

[別解]

初項を a ，公比を r とすると第 3 項が $\frac{3}{4}$ であるから $ar^2=\frac{3}{4}$ 第7 項が $\frac{3}{64}$ であるから

$$ar^6=\frac{3}{64}$$ となる.

これらを連立させて解くと

$a=3$, $r=\pm\frac{1}{2}$ よって， $a_n=3\left(\pm\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となる.

1-11　例題　等比数列の一般項～その１

次の等比数列 a_n の一般項 a_n を求めよ。また、第 10 項を求めよ。

(1) $2, 6, 18, 54, 162, \cdots$

(2) $81, -27, 9, -3, 1, \cdots$

[解答]

(1)　初項が2、公比が3の等比数列であり、初項から第 n (一般項)は初項 a_1 に公比 r を $n-1$ 回かけることによって求められるので

$$a_n=2\cdot 3^{n-1}$$

また，第10 項は $a_{10}=2\cdot 3^9=39366$ である.

(2) 初項が81，公比が -13 の等比数列だから

$a_n=81\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$ また、第10項は $a_{10}=81\left(-\frac{1}{3}\right)^9=-\frac{1}{243}$ である。

1-12　例題　等比数列の和～その２～

次の条件を満たす等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) 初項が 2 ，第 4 項が -54

(2) 第 3 項が $\frac{3}{4}$ ，第 7 項が $\frac{3}{64}$

[解答]　等比数列は公比が一定であるので，条件からまず公比を求めよう．初項から第 4 項までは，公比が $(4-1)=3$ 回掛けられるので，公比を r とすると

$$a_1r^3=a_4 \quad\Leftrightarrow\quad r^3=\frac{a_4}{a_1}=-\frac{54}{2}=-27$$

$\therefore\ r=-3$

よって， $a_n=2(-3)^{n-1}$ となる.

【別解】

等比数列の一般項は $a_n=a_1r^{n-1}$ として与えられるので，問題の条件から a_1 と r の

連立方程式を立てることができる．初項を a ，公比を r とすると

$a_1=a=2$　　$a_4=ar^3=-54$

となる．これらを連立させて解くと

$a=2$ ， $r=-3$ よって， $a_n=2(-3)^{n-1}$ となる．

(2) 第 3 項から第 7 項までは，公比が $(7-3)=4$ 回かけられるので，公比を r とすると

$$a_3r^4=a_7 \quad \Leftrightarrow \quad r^4=\frac{a_7}{a_3}=\frac{3}{64}\div\frac{3}{4}=\frac{1}{16} \qquad \therefore \quad r=\pm\frac{1}{2}$$

第 3 項から第 n 項までは，公比の $n-3$ 乗がかかるので，

$$a_n=a_3r^{n-3}$$

$$=\frac{3}{4}\left(\pm\frac{1}{2}\right)^{n-3}=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

【別解】 初項を a ，公比を r とすると第 3 項が $\frac{3}{4}$ であるから $ar^2=\frac{3}{4}$

第 7 項が $\frac{3}{64}$ であるから $ar^6=\frac{3}{64}$

となる．これらを連立させて解くと

$a=3$ ， $r=\pm\frac{1}{2}$ よって， $a_n=3\left(\pm\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となる．

1-13 例題 等比数列の和～その１～

次の等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．また， S_6 を求めよ．

(1) $2, 6, 18, 54, 162, \cdots$

(2) $81, -27, 9, -3, 1, \cdots$

【解答】

(1) 初項が 2 ，公比が 3 の等比数列だから，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=2\frac{(3n-1)}{3-1}=3^n-1$$

また， $S_6=3^6-1=728$ である．

(2) 初項が 81 ，公比が -13 の等比数列だから，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{81\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{243}{4}\left\{1-\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^n\right\}$$

また， $S_6=\frac{243}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^6\right\} = \frac{243}{4}\left(1+\frac{1}{729}\right) = \frac{365}{6}$

1-14　例題：等比数列の和～その２～

毎年の初めに $\mathbf{100}$ 万円ずつ，年利 $\mathbf{3}$ %，1 年ごとの複利法で $\mathbf{10}$ 年積み立てたときの元利合計 $\boldsymbol{S}$ 円を求めよ．ただし $\mathbf{1.03^{10}=1.34}$ とする．なお，複利法とは1 年ごとに利子を元金にくり入れ，その合計額を次年の元金として利子を計算する手法のことである．

【解答】

毎年の元利がいくらになるかを考えると

1 年目：　$\mathbf{100\times1.03}$

2 年目：　$\mathbf{(100+100\times1.03)\times1.03}$　＝　$\mathbf{100\times1.03+100\times1.032}$

3 年目：　$\mathbf{(100+100\times1.03+100\times1.032)\times1.03}$　＝　$\mathbf{100\times1.03+100\times1.032+100\times1033}$

10 年目：　$\mathbf{100\times1.03+100\times1.032+100\times1.033+\cdots+100\times1.0310}$

これは初項 $\mathbf{100\times1.03}$ ，公比 $\mathbf{1.03}$ ，項数 $\mathbf{10}$ の等比数列の和なので

$$S_{10}=\frac{100\times1.03(1.03^{10}-1)}{1.03-1}$$

$$=\frac{100\times1.03(1.34-1)}{1.03-1}$$

$$=\frac{100\times1.03\times0.34}{0.03}\fallingdotseq1167$$

1-15　例題　Σ 記号の練習～その１～

次の和を，**Σ** 記号を用いずに表せ（計算はしなくてよい）．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}(2k-1)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{4}3k^2$　(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}3$　(4) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}3^j$　(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}(2n-1)$

【解答】

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}(2k-1)$　＝　$\mathbf{1+3+5}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{4}3k^2$　＝　$\mathbf{3\cdot2^2+3\cdot3^2+3\cdot4^2}$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}3$　＝　$\mathbf{3+3+3+\cdots+3}$　(　$\mathbf{3}$ は全部で $\boldsymbol{n}$ 個ある

(4) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}3^j$　＝　$\mathbf{3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}(2n-1)$　＝　$(2n-1)+(2n-1)+(2n-1)$

1-16 例題　Σ 記号の練習～その２～

次の和を，Σ 記号を用いて表せ.

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2$

(2) $3+5+7+\cdots+(2n+1)$

(3) $3+3+3+\cdots+3$　（ 3 は全部で n 個あるとする）

(4) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+5\cdot 7$

【解答】

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2 \ = \ \sum_{k=1}^{7} k^2$

(2) $3+5+7+\cdots+(2n+1) \ = \ \sum_{k=1}^{n} (2k+1)$

(3) $3+3+3+\cdots+3 \ = \ \sum_{k=1}^{n} 3$

(4) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+5\cdot 7 \ = \ \sum_{k=1}^{5} k(k+2)$

1-17　例題　基本的なΣ の計算～その１～

次の数列の和を求めよ．ただし， c は定数とする.

(1) $\sum_{k=1}^{n} c$　　(2) $\sum_{k=1}^{n} k$

【解答】

(1) $\sum_{k=1}^{n} c \ = \ c+c+c+\cdots+c=nc$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k \ = \ 1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

1-18 基本的なΣ の計算～その２～

等式 $k(k+1)=\dfrac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$ を利用して

$\sum_{k=1}^{n} k^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を証明せよ.

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\} \\
&= \frac{1}{3}[(\cancel{1\cdot2\cdot3}-0\cdot1\cdot2)+(\cancel{2\cdot3\cdot4}-\cancel{1\cdot2\cdot3})+(\cancel{3\cdot4\cdot5}-\cancel{2\cdot3\cdot4})+\cdots \\
&= \ +\{\cancel{(n-1)n(n+1)}-\cancel{(n-2)(n-1)n}\}+\{n(n+1)(n+2)-\cancel{(n-1)n(n+1)}\}] \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \iff \sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)
$$

$$
\iff \sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)
$$

$$
\iff \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\sum_{k=1}^{n}k
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\sum_{k=1}^{n}k &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{6}2n(n+1)(n+2)-\frac{1}{6}3n(n+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\} \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

1-19 例題 Σ の計算

次の数列の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k-1}^{n}k(k+1)$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2$

[解答]

(1)
$$
\begin{aligned}
\sum_{k-1}^{n}k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\} \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(4k^2+4k+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1 \\
&= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n \\
&= \frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)+6(n+1)+3\} = \frac{1}{3}n(4n^2+12n+11)
\end{aligned}
$$

1-20 例題 等比数列のΣ 計算

次の数列の和を求めよ.

(1) $\sum_{k=1}^{n} 3^k$ (2) $\sum_{k-1}^{n-1} 3^k$ (3) $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ (4) $\sum_{k=2}^{n} 3^{k-1}$ (5) $\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1}$

[解答]

(1) $\sum_{k=1}^{n} 3^k = 3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n=\frac{3(1-3^n)}{1-3} = \frac{3(3^n-1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}=\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} = \frac{3(3^{n-1}-1)}{2}$

(3) $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = 3^2+3^3+\cdots+3^n=\frac{3^2(1-3^{n-2})}{1-3} = \frac{9(3^{n-2}-1)}{2}$

(4) $\sum_{k=2}^{n} 3^{k-1} = 3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}=\frac{3(1-3^n)}{1-3} = \frac{3(3^n-1)}{2}$

(5) $\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1} = 3^2+3^4+3^6+\cdots+3^{2n}=9+9^2+9^3+\cdots+9^n$

$$= \frac{9(1-9^n)}{1-9}=\frac{9(9^n-1)}{8}$$

1-21 例題 等差×等比型数列の和～その１～

次の和S を求めよ.

$$S=1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}$$

【解答】

公比を掛けて差をとると

$$S=1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}$$

$$2S=1\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+(2n-3)\cdot 2^{n-1}+(2n-1)+2^n$$

より

$$-S=1+2(2+2^2+\cdots 2^{n-1})-(2n-1)\cdot 2^n$$

$$= 1+2\cdot\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(2n-1)\cdot 2^n$$

$$= 1+2\cdot(2^n-2)-(2n-1)\cdot 2^n$$

$$= -3-(2n-3)2^n$$

よって, $S=3+(2n-3)\cdot 2^n$ である.

1-22 例題 等差× 等比型数列の和～その２～

次の和S を求めよ.

$$S=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

【解答】

$x=1$ ， $x\neq 1$ で場合わけを行なう.

1） $x=1$ のとき

$$S=1+2+3+\cdots+n$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

2） $x\neq 1$ のとき

$$S=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$
$$xS=x+2x^2+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$$

より

$$(1-x)S=1+(x+x^2+\cdots+x^{n-1})-nx^n$$
$$=1+\frac{x(1-x^{n-1})}{1-x}-nx^n$$

◄ 初項 x ，公比 x ，項数 $n-1$ の等比数列の和

よって

$$S=\frac{1-nx^n}{1-x}+\frac{x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}=\frac{(1-nx^n)(1-x)+x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

1-23 例題 分数数列の和

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ.

$$\frac{1}{1\cdot 3},\frac{1}{3\cdot 5},\frac{1}{5\cdot 7},\cdots$$

【解答】

一般項を求めて部分分数に分解する.

一般項 $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ より

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

よって

$$S_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}$$

1-24　例題　階差数列の定義

数列　$1, 2, 6, 13, 23, 36$　の階差数列を書け.

【解答】

階差数列　$\{b_n\}$　は

$$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$b_2 = a_3 - a_2 = 6 - 2 = 4$$
$$b_3 = a_4 - a_3 = 13 - 6 = 7$$
$$b_4 = a_5 - a_4 = 23 - 13 = 10$$
$$b_5 = a_6 - a_5 = 36 - 23 = 13$$

よって，階差数列は　$\{1, 4, 7, 10, 13\}$　で与えられる.

1-25　例題：階差数列{*bn*}から一般項　a_n　を求める

次の数列の一般項　a_n　を求めよ.

$1, 2, 5, 10, 17, 26, \cdot\cdot\cdot$

【解答】

階差数列　$b_n = 1, 3, 5, 7, 9, \cdot\cdot\cdot$　より

$$b_n = 2n - 1$$

よって　$n \geq 2$　において

$$a_n = a_1 + \sum_{k-1}^{n-1} b_k \quad = \quad 1 + \sum_{k-1}^{n-1} (2k - 1)$$
$$= \quad 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) \quad = \quad n^2 - 2n + 2$$

$n = 1$　を代入したとき　$1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$　となり，　a_1　と等しくなるので，

$n \geq 1$　において　$a_n = n^2 - 2n + 2$　と表せる

1-26　例題　数列の和から一般項を求める

初項から第　$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$　項までの和が次の式で表される数列の第　n　項を求めよ

$$S_n = n^3$$

【解答】

$n \geq 2$　において　　$a_n = S_n - S_n - 1 \quad = \quad n^3 - (n-1)^3$

$$= \quad 3n^2 - 3n + 1 \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \text{①}$$

ここで，　$a_1 = S_1 = 1$　であり，①は　$n = 1$　のときでも成立する.

よって，　$n = 1$　において　$a_n = 3n^2 - 3n + 1$　となる.

1-27　例題　群数列

次の数列について各問題に答えよ

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{5}{6}$$

(1) $\frac{18}{25}$ ははじめから数えて第何項目にあるか.

(2) はじめから数えて第 666 項目にある分数は何か.

(3) 初項から第 666 項までの和を求めよ.

【解答】

(1) 次のように群分けをおこなう.

$$\overbrace{\left(\overset{①}{\frac{1}{2}}\right)}^{❶},\ \overbrace{\left(\overset{②}{\frac{2}{3}},\ \overset{③}{\frac{1}{3}}\right)}^{❷},\ \overbrace{\left(\overset{④}{\frac{3}{4}},\ \overset{⑤}{\frac{2}{4}},\ \overset{⑥}{\frac{1}{4}}\right)}^{❸},\ \overbrace{\left(\overset{⑦}{\frac{4}{5}},\ \cdots\right.}^{❹}$$

規則より, $\frac{18}{25}$ は第 24 群に存在していることがわかる. 第 n 群に含まれる項数が n であることを考えると, 第 23 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots+23=\frac{1}{2}\cdot 23(1+23) = 276$$

よって, 第 24 群の第 1 項は, 最初から数えて 277 番目になる.

$\frac{18}{25}$ は第 24 群の第 7 項なので $277+7-1=283$

以上より, $\frac{18}{25}$ は最初から数えて 283 番目の項となる.

(2) 第 666 項が含まれる群を求める. 666 項が第 n 群に含まれるとすると

(第 $n-1$ 群までの項数) < 666 < (第 n 群までの項数)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(n-1)n<666<\frac{1}{2}n(n+1)$$

これを満たす n は $n=36$ である. $\frac{1}{2}(36-1)35=630$ より, 第 36 群の第 1 項は, 最初から数えて 631 番目である. $666-631+1=36$ なので, 最初から数えて第 666 項目の分数は, 第 36 群の第 36 であり, 137

(3) 第 n 群に含まれる項の和 S_n は

$$\begin{aligned}
S &= \frac{n}{n+1}+\frac{n-1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n+1}\{n+(n+1)+\cdots+1\} = \frac{1}{n+1}(1+2+\cdots+n) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

よって, 第 666 項までの和は第 36 群までの和で

$$\sum_{k-1}^{36}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}36\cdot 37 = 333$$

1-28　例題　数列の増減

$a_n = n\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$　の増減を調べよ

【解答】

一般項　a_n　に関する漸化式をつくると

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^n\frac{1}{4}-n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4} \;=\; \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4}\left\{\frac{3}{4}(n+1)-n\right\}$$

$$=\;\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}n+\frac{3}{4}\right)$$

よって

$a_{n+1}-a_n>0$　を満たす　n　は，　$n<3$

$a_{n+1}-a_n=0$　を満たす　n　は，　$n=3$

$a_{n+1}-a_n<0$　を満たす　n　は，　$n>3$

すなわち，　$a_1<a_2<a_3=a_4>a_5>a_6>a_7>\cdots$　となる.

2　漸化式

■階差型漸化式：　$a_{n+1}=a_n+f(n)$　の解法

2-1　例題　階差型漸化式：　$a_{n+1}=a_n+f(n)$　～その１～

$a_1=1$　，　$a_{n+1}=a_n+n^2$　　$(n\geq 1)$　で定まる数列　$\{a_n\}$　の一般項　a_n　を　n　の式で表せ.

[解答]

このようなタイプの漸化式は，　a_n　を移項して

$$a_{n+1}=a_n+n^2 \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1}-a_n=n^2$$

と変形すると，数列　$\{a_n\}$　の階差数列　$\{b_n\}$　の一般項 が　$b_n=n^2$　として与えられているものだと考えられる．よって，階差数列の公式を利用してやれば，　$n=2$　で

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$=\quad 1+\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \quad=\quad 1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

となる．また，この式の右辺の　n　に　1　を代入すると，　1　となり　a_1　に一致するから，

この式は　$n=1$　でも成立する.

以上から，　$n\geq 1$　で　a_n　$=$　$1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$　となる.

ポイントは「階差数列の一般項が与えられている」と気づくことである.

2-2　例題　階差型漸化式～その２～

$a_1=1$　，　$a_{n+1}=a_n+3n^2+n$　　$(n\geq 1)$　で定まる数列　$\{a_n\}$　の一般項　a_n　を　n　の式で表せ.

[解答]

漸化式　$a_{n+1}=a_n+3n^2+n$　を変形すると

$$a_{n+1}=a_n+3n^2+n \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1}-a_n=3n^2+n$$

☚ 階差型漸化式の特徴は，　a_{n+1}　と　a_n　の係数が等しいことにある

となるので，数列　$\{a_n\}$　の階差数列を　$\{b_n\}$　とすれば

$$b_n=a_{n+1}-a_n=3n^2+n$$

であることがわかる.

ここで，　$n\geq 2$　のとき　　☚ 階差数列の公式は，　$n\geq 2$　でないと使えない

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

☚『階差数列の一般項』

$$=\quad 1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+k) \quad=\quad 1+3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\quad 1+\frac{1}{2}(n-1)n\{(2n-1)+1\} \quad=\quad 1+(n-1)n^2$$

この式の右辺の　n　に　1　を代入すると，　　☚　$n=1$　でもあてはまるか代入してチェックする

1 となり，これは a_1 に一致する．
したがって，求める一般項は $a_n=1+(n-1)n^2$

[参考]階差型漸化式の解法

STEP1

漸化式 $a_n+1=a_n+f(n)$ を次のように変形する．

$$a_{n+1}-a_n=f(n)$$

STEP2

このとき，式 $f(n)$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項となっているので，階差数列の公式を用いて a_n を求める．

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

STEP3

$n=1$ での成立を忘れずにチェックして完成．

■ 線形2 項間漸化式： $a_{n+1}=p\,a_n+q$

2-3　例題　線形2 項間漸化式～その１～

$a_1=1$ ， $a_{n+1}=3a_n+2$ $(n\geq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

[解法手順]

まず，上の式の n に $n=1,2,3,4,5,6,\cdots,n$ を代入し，具体的に数列を書き並べてみると

$n:1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\cdots n$

$\{a_n\}:1\quad 5\quad 17\quad 53\quad 161\quad 485\cdots ?$

となるが，数列 $\{a_n\}$ は等差数列でも等比数列でもないので，？の部分はすぐにはわからない．

■等比数列の漸化式に帰着させる

漸化式

$$a_{n+1}=3a_n+2 \quad \cdots ①$$

において注目すべきは a_n の係数(＝ 3) である．具体的に数列を書き並べていくと，数列 $\{a_n\}$ は約 3 倍ずつ増えていっていることがわかるだろう．
しかし,さきほど述べたように，純粋に 3 倍されているわけではないので等比数列ではない．
原因は漸化式①で定数(＝ 2) が加えられているためである．そこで，この定数をうまく消去して，最終的に等比数列の性質から一般項を求める方針で考えてみよう．
定数(＝ 2) を消去するために， a_{n+1} と a_n を x に置きなおした等式(特性方程式)

を考える.

$$x=3x+2 \quad \cdots ②$$

①と②の式を並べて引き算する.

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=3a_n+2 \\ -) & x=3x+2 \\ \hline & a_{n+1}-x=3(a_n-x) \end{array}$$

これで定数部分を消去することができた.

また, $a_n-x=b_n$ と置きなおすと, $b_{n+1}=3b_n$ となることからもわかるように, 等比数列の漸化式に帰着することができた.

2-4 例題 線形2 項間漸化式～その２～

$a_1=1$, $a_{n+1}=4a_n+6$ $(n\geq1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答】

漸化式 $a_{n+1}=4a_n+6$ から, 式

$$x=4x+6 \quad \cdots ①$$

を辺々ひくと

$$a_{n+1}-x=p(a_n-x) \quad \cdots ②$$

ここで, ①を解くと、 $x=4x+6 \Leftrightarrow -3x=6$ $\therefore x=-2$

となるから, ②の x にこの値を代入し

$$a_{n+1}-(-2)=3\{a_n-(-2)\}$$

☚ $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$

$$\therefore \quad a_{n+1}+2=3(a_n+2)$$

を得る.

☚ $b_n=a_n+2$ とおくと $b_{n+1}=3b_n$ と表せ, 等比数列であることがわかる

これは, 数列 $\{a_n+2\}$ が, 初項 $(a_1+2)=3$, 公比 4 の等比数列であることを表している.

☚ 数列 $\{a_n+2\}$ の初項は a_1 ではなく, a_1+2 である

よって

$$a_n+2=(a_1+2)\cdot4^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n=3\cdot4^{n-1}-2$$

[参考]線形2 項間漸化式の解法

STEP1

漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ から方程式 $x=px+q$ をつくる.

STEP2

漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ から方程式 $x=px+q$ を引き

$$a_{n+1}-x=p(a_n-x)$$

を得る.

STEP3

方程式の解 を求め，**STEP2** で得られた漸化式に代入する.

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

STEP4

等比数列の公式を用いて，漸化式を解き， a_n を求めれば完成.

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

$\therefore \quad a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$ ☚ 等比数列の一般項の公式を用いた

よって， $a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$ となる.

■変形階差型漸化式: $a_{n+1}=p\,a_n+f(n)$ の解法

階差型漸化式 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ と似ているが， a_n の前に係数 p $(p\neq 1)$ がかかった形,

つまり $a_{n+1}=p\,a_n+f(n)$

という形をしている漸化式の解法について考えてみよう.

このようなタイプの漸化式は $f(n)$ の形により，解法を分類しておくのがよい.

以下，次の2 タイプに分けて考えてみよう.

$f(n)=r^n$ (指数タイプ)

$f(n)=n^k$ $(k\in N)$ (k 次式タイプ)

■ $f(n)=r^n$ の場合の解法

2-4 例題 変形階差型漸化式： $a_{n+1}=p\,a_n+f(n)$

$a_1=1$, $a_{n+1}=5\,a_n+2^n$ $(n\geq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答1：線形2 項間漸化式に帰着させる方法】

この解法では，漸化式 $a_{n+1}=p\,a_n+r^n$ の r の部分，つまりこの例題では 2 に着目して,

漸化式を 2^{n+1} で割ることにより，**線形2 項間漸化式(例題2-4)**に帰着させる.

まず，漸化式 $a_{n+1}=5\,a_n+2^n$ の両辺を 2^{n+1} で割る.

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{5\,a_n}{2^{n+1}}+\frac{2^n}{2^{n+1}} \iff \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{5\,a_n}{2\cdot 2^n}+\frac{2^n}{2\cdot 2^n}$$

$$\therefore \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

ここで， $\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと，漸化式は

$$b_{n+1}=\frac{5}{2}b_n+\frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

と変形される．この漸化式は線形2 項間漸化式になっているので，以下その方法に準じて漸化式を解けばよい．

ここで，方程式 $\alpha=\frac{5}{2}\alpha+\frac{1}{2}$ (特性方程式)

を解くと $\alpha=\frac{5}{2}\alpha+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha=5\alpha+1 \Leftrightarrow 3\alpha=-1$

$$\therefore \quad \alpha=-\frac{1}{3}$$

となるので，これを利用して①は

$$b_{n+1}=\frac{5}{2}b_n+\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b_{n+1}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{2}\left\{b_n-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$\therefore \quad b_{n+1}+\frac{1}{3}=\frac{5}{2}\left(b_n+\frac{1}{3}\right)$$

と変形できる．

これより，数列 $\left\{b_n+\frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $\left(b_1+\frac{1}{3}\right)$,公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列とわかるので

$$b_n+\frac{1}{3}=\left(b_1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{a_1}{2^1}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{6}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} = \frac{5^n}{3\cdot 2^n}$$

ここで， $b_n=\frac{a_n}{2^n}$ であったから，もとに戻して

$$\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{3}=\frac{5^n}{3\cdot 2^n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_n}{2^n}=\frac{5^n}{3\cdot 2^n}-\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad a_n=\frac{5^n}{3}-\frac{2^n}{3}$$

【解答 2：階差型漸化式に帰着させる方法】

この解法では，漸化式 $a_{n+1}=p\,a_n+r^n$ の p の部分，つまりこの例題では 5 に着目して，

漸化式を 5_{n+1} で割ることにより，**階差型漸化式(例題2-2)** に帰着させる．

まず，漸化式 $a_{n+1}=5a_n+2^n$ の両辺を 5^{n+1} で割る．

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{5a_n}{5^{n+1}}+\frac{2^n}{5^{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{5a_n}{5\cdot 5^n}+\frac{2^n}{5\cdot 5^n}$$

$$\therefore \quad \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{a_n}{5^n}+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

ここで， $\frac{a_n}{5^n}=b_n$ とおくと，漸化式は

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad b_{n+1}-b_n=\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

と変形される．この漸化式は階差型漸化式になっているので，以下その方法に準じて漸化式を解けばよい．

この漸化式より，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすれば， $c_n=\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ となっていることがわかるので，

$2 \leq n$ では

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = \frac{a_1}{5^1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^k$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{15} - \frac{2}{15}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3 \cdot 5^n}$$

この式の右辺の n に 1 を代入すると, 1 となり, a_1 と一致するので, この式は $n=1$ のときにも成立する. よって $n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3 \cdot 5^n}$$

が成り立つ. ここで, $\frac{a_n}{5^n} = b_n$ であったから

$$\frac{a_n}{5^n} = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3 \cdot 5^n} \qquad \therefore \quad a_n = \frac{5^n}{3} - \frac{2^n}{3}$$

[参考] $f(n) = r^n$ タイプの変形階差型漸化式の解法

変形階差型漸化式 $a_{n+1} = p\,a_n + r^n$ について.

【解答1：線形2 項間漸化式に帰着させる方法】

STEP1

漸化式の両辺を, r^{n+1} で割ることにより

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{p}{r} \cdot \frac{a_n}{r^n} + \frac{q}{r}$$

として, 線形2 項間漸化式を導く.

STEP2

(以下, 線形2 項間漸化式の解法(例題2-4 に準じる)

【解答2：階差型漸化式に帰着させる方法】

STEP1

漸化式の両辺を, p^{n+1} で割ることにより

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{r}{p}\right)^n$$

として, 階差型漸化式を導く.

STEP2

（以下，階差型漸化式の解法(**例題2-2**) に準じる）

■　$f(n)=n^k$　　**($k \in$ N) の場合の解法**

2-5　例題　変形階差型漸化式～その２～

$a_1=1$　，　$a_{n+1}=5a_n+n$　$(n \geq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答1：等比数列に帰着させる方法】

この解法では，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+n^k$ の k の部分(整式 $f(n)$ の次数)，つまりこの例題では 1 に着目して，適当な1 次式を用いて漸化式を変形することにより，等比数列に帰着させる．具体的には次のようにする.

n の1 次式 $g(n)=sn+t$ を用いて，漸化式 $a_{n+1}=5a_n+n$ が

$a_{n+1}-\{s(n+1)+t\}=5\{a_n-(sn+t)\}$　・・・①

と変形できたとすれば，$b_n=a_n-(sn+t)$ とおくことにより，漸化式は

$b_{n+1}=5b_n$

と変形される．この漸化式は等比数列を表しているので，以下その方法に準じて漸化式を解けばよい.

このような s, t を求めるためには，①を展開・整理して

$$a_{n+1}-\{s(n+1)+t\}=5\{a_n-(sn+t)\}$$
$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1}=5\{a_n-(sn+t)\}+\{s(n+1)+t\}$$
$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1}=5a_n-5(sn+t)+s(n+1)+t$$
$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1}=5a_n-5sn-5t+sn+s+t$$
$$\therefore \quad a_{n+1}=5a_n-4sn+(s-4t)$$

としておいて，これと漸化式 $a_{n+1}=5a_n+n$ を比較して

$$\begin{cases} -4s=1 \\ s-4t=0 \end{cases}$$

を解けばよい.

【解答2：階差型漸化式に帰着させる方法】

この解法では，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+n^k$ の p の部分，つまりこの例題では 5 に着目して，漸化式を5^{n+1} で割ることにより，階差型漸化式(**例題2-2**) に帰着させる.

具体的には次のようにする.

まず，漸化式 $a_{n+1}=5a_n+n$ の両辺を 5^{n+1} で割る.

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{5a_n}{5^{n+1}}+\frac{n}{5^{n+1}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{5a_n}{5 \cdot 5^n}+\frac{n}{5^{n+1}}$$

$$\therefore \quad \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{a_n}{5^n}+n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

ここで， $\dfrac{a_n}{5^n}=b_n$ とおくと，漸化式は $b_{n+1}=b_n+n\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$

と変形される．この漸化式は階差型漸化式になっているので，以下その方法に準じて漸化式を解けばよい．

2-6　例題　変形階差型漸化式～その２～（再掲）

$a_1=1$　,　$a_{n+1}=5a_n+n$　$(n\geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答1：等比数列に帰着させる方法】

$a_{n+1}=5a_n+n$ を変形して，$f(n)$ が 1 次式であることに着目して，同じ1 次式 $sn+t$ を考える

$$a_{n+1}=5a_n+n \iff a_{n+1}-\{s(n+1)+t\}=5\{a_n-(sn+t)\}$$

となるような，$s,t\in R$ を求める.

そのためには，まずこの式を展開・整理して

$$a_{n+1}-\{s(n+1)+t\}=5\{a_n-(sn+t)\} \quad \cdots②$$

$$\iff \quad a_{n+1}=5\{a_n-(sn+t)\}+\{s(n+1)+t\}$$

$$\iff \quad a_{n+1}=5a_n-5(sn+t)+s(n+1)+t$$

$$\iff \quad a_{n+1}=5a_n-5sn-5\mathrm{t}+sn+s+t$$

$$\therefore \quad a_{n+1}=5a_n-4sn+(s-4t) \quad \cdots③$$

この③と，もとの漸化式 $a_{n+1}=5a_n+n$ を比べて

$$\begin{cases} -4s=1 \cdots ④ \\ s-4t=0 \cdots ⑤ \end{cases}$$

を解けばよい.

まず，④より $s=-\dfrac{1}{4}$ であり，これを⑤に代入して

$$-\frac{1}{4}-4q=0 \iff t=-\frac{1}{16}$$

を得る．この s,t を②に代入して

$$a_{n+1}-\left\{-\frac{1}{4}(n+1)-\frac{1}{16}\right\}=5\left\{a_n-\left(-\frac{1}{4}n-\frac{1}{16}\right)\right\} \quad \cdots⑥$$

を得る.

ここで，$b_n=a_n-\left(-\dfrac{1}{4}n-\dfrac{1}{16}\right)$

とおくと，⑥は $b_{n+1}=5b_n$ となり，数列 $\{b_n\}$ は初項

$$b_1=a_1-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right) \;=\; 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16} \;=\; \frac{21}{16}$$

公比 5 の等比数列となるのがわかる．よって

$$b_n=b_1\cdot 5^{n-1} \;=\; \frac{21}{16}\cdot 5^{n-1}$$

$$b_n=a_n-\left(-\frac{1}{4}n-\frac{1}{16}\right)$$

$$a_n-\left(-\frac{1}{4}n-\frac{1}{16}\right)=\frac{21}{16}\cdot 5^{n-1} \qquad \therefore \quad a_n=-\frac{1}{4}n-\frac{1}{16}+\frac{21}{16}\cdot 5^{n-1}$$

[解答2：階差型漸化式に帰着させる方法]

漸化式　$a_{n+1}=5a_n+n$　の両辺を　5^{n+1}　で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{5a_n}{5^{n+1}}+\frac{n}{5^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{5a_n}{5\cdot 5^n}+\frac{n}{5^{n+1}}$$

$$\therefore\quad \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{a_n}{5^n}+n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

ここで，　$\dfrac{a_n}{5^n}=b_n$　とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow\quad b_{n+1}-b_n=n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

この漸化式より，数列　$\{b_n\}$　の階差数列を　$\{c_n\}$　とすれば，

$$c_n=n\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

となっていることがわかるので，　$n\geq 2$　では

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k$$

$$=\ \frac{a_1}{5^1}+\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}\ =\ \begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\cdots③\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n\cdots④\end{cases}\quad\cdots①$$

ここで

$$\begin{array}{rl}
A= & \left(\frac{1}{5}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n \\
-\ )\ \frac{1}{5}A= & \qquad\qquad\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots+(n-2)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \\
\hline
\left(\frac{4}{5}\right)A= & \left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{5}\right)^n-(n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}
\end{array}$$

より

$$\frac{4}{5}A=\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{5}\right)^n-(n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

$$=\ \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{5}}-(n-1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

$$=\ \frac{1}{20}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}-\frac{n-1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n\ =\ \frac{1}{20}-\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}-\frac{n-1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$=\ \frac{1}{20}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n-\frac{n-1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n\ =\ \frac{1}{20}-\left(\frac{1}{4}+\frac{n-1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$= \frac{1}{20} - \frac{5+4n-4}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{20} - \frac{4n+1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

よって

$$A = \frac{1}{16} - \frac{4n+1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

であるから，①は

$$b_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{16} - \frac{4n+1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{21}{80} - \frac{4n+1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

ここで，$b_n = \dfrac{a_n}{5^n}$ であったから

$$\frac{a_n}{5^n} = \frac{21}{80} - \frac{4n+1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n = \frac{21}{80} \cdot 5^n - \frac{4n+1}{16}$$

$$\therefore \quad a_n = -\frac{1}{4}n - \frac{1}{16} + \frac{21}{16}5^{n-1}$$

この式の右辺の n に 1 を代入すると，1 となり，a_1 と一致するので，この式は $n=1$ のときにも成立する.

[参考] $f(n) = n^k \quad (k \in N)$ **のタイプの変形階差型漸化式の解法**

変形階差型漸化式 $a_{n+1} = p\,a_n + n^k \quad (k \in N)$ について.

【解答1：等比数列に帰着させる方法】

STEP1

漸化式 $a_{n+1} = p\,a_n + n^k$ を変形して

$$a_{n+1} - g(n+1) = p\,a_n - g(n)$$

となるような，k 次式 $g(n)$ を求める.

STEP2

(以下，等比数列の一般項の求め方に準じる)

【解答2：階差型漸化式に帰着させる方法】

STEP1

漸化式の両辺を，p^{n+1} で割ることにより

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + n\left(\frac{1}{p}\right)^{n+1}$$

として，階差型漸化式を導く.

STEP2

(以下，階差型漸化式の解法(**例題2-2**) に準じる)

■線形3 項間漸化式： $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ の解法

2-7　例題　線形3 項間漸化式の解法

$a_1=2$　,　$a_2=5$　,　$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$　$(n\geq 1)$　で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答】

漸化式 $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ は，方程式

$$x^2=5x-6$$

を満たす x ，つまり

$$x^2-5x+6=0 \iff (x-2)(x-3)=0$$

$$\therefore \quad x=2,3$$

を用いて

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n) \quad \cdots ①$$

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n) \quad \cdots ②$$

と2 通りに変形できる.

1) ①について

$b_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は $b_{n+1}=3b_n$ を

満たすので

$$b_n=b_1\cdot 3^{n-1} \iff a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)3^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_{n+1}-2a_n=3^{n-1} \quad \cdots ①'$$

2) ②について

$c_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は $c_{n+1}=2c_n$ を満たすので

$$c_n=c_1\cdot 2_{n-1}$$

$$\iff a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)2^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_{n+1}-3a_n=-2^{n-1} \quad \cdots ②'$$

①'-②'より

$$a_n=3^{n-1}+2^{n-1}$$

[参考]線形*3* 項間漸化式*:* $a_{n+2}=p\,a_{n+1}+q\,a_n$ **の解法**

STEP1

漸化式 $a_{n+2}=p\,a_{n+1}+q\,a_n$ から特性方程式 $x^2=px+q$ をつくる.

STEP2

特性方程式の解 $x=\alpha,\beta$ を利用して，漸化式 $a_{n+2}=p\,a_{n+1}+q\,a_n$ を

$$a_{n+2}-\alpha\,a_{n+1}=\beta\left(a_{n+1}-\alpha\,a_n\right)$$

$$a_{n+2}-\beta\,a_{n+1}=\alpha\left(a_{n+1}-\beta\,a_n\right)$$

と2 通りに変形する.

STEP3

$b_n=a_{n+1}-\alpha\,a_n$,　$c_n=a_{n+1}-\beta\,a_n$ とおき，2 本の漸化式を書き換えて

$$b_{n+1}=\beta\,b_n$$

$$c_{n+1}=\alpha\,c_n$$

等比数列の一般項の公式を使い，数列 $\{b_n\}$ ，$\{c_n\}$ の一般項を求める.

$$b_n=b_1\,\beta^{n-1}$$

$$c_n=c_1\,\alpha^{n-1}$$

STEP4

置き換えた数列をもとに戻して

$$a_{n+1}-\alpha\,a_n=\left(a_2-\alpha\,a_1\right)\beta^{n-1}$$

$$a_{n+1}-\beta\,a_n=\left(a_2-\beta\,a_1\right)\alpha^{n-1}$$

a_{n+1} を消すため，辺々引き算する.

$$-\alpha\,a_n-\left(-\beta\,a_n\right)=\left(a_2-\alpha\,a_1\right)\beta^{n-1}-\left(a_2-\beta\,a_1\right)\alpha^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(\beta-\alpha\right)a_n=\left(a_2-\alpha\,a_1\right)\beta^{n-1}-\left(a_2-\beta\,a_1\right)\alpha^{n-1}$$

STEP5

a_n について解けば完成.

$$a_n=\frac{a_2-\alpha\,a_1}{\beta-\alpha}\,\beta^{n-1}-\frac{a_2-\beta\,a_1}{\beta-\alpha}\,\alpha^{n-1}$$

–

■分数型漸化式： $a_{n+1}=\dfrac{p\,a_n+q}{r\,a_n+s}$ の解法

■簡単な分数型漸化式（ $q=0$ の場合）

分数型漸化式が $a_{n+1}=\dfrac{p\,a_n}{r\,a_n+s}$ のような形をしている場合は，両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{r\,a_n+s}{p\,a_n} \qquad \therefore \quad \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{s}{p}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{r}{p}$$

と変形し， $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくことにより

$$b_{n+1}=\frac{s}{p}\cdot b_n+\frac{r}{p}$$

となり線形2 項間漸化式へ帰着される．

【解答1：等比数列に帰着させる方法】

分数型漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{p\,a_n+q}{r\,a_n+s}$ の t に関する

$$t=\frac{pt+q}{rt+s}$$

という方程式が異なる2 つの実数解 $t=\alpha,\beta$ をもつとき

$$b_n=\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$$

とおくと， $\{b_n\}$ が等比数列となることを利用する．

【解答2：簡単な分数型漸化式に帰着させる方法】

t に関する $t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ という方程式が実数解 t をもつとき(2 解あるときはどちらでもよい)，

この式より t は

$$t=\frac{pt+q}{rt+s}$$

$$\Leftrightarrow \quad t(rt+s)=pt+q$$

$$\Leftrightarrow \quad (p-rt)t=st-q \quad \cdots ①$$

となるのを利用して， $a_{n+1}-t$ を計算すると

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-t &= \frac{p\,a_n+q}{r\,a_n+s}-t \\
&= \frac{p\,a_n+q-t(r\,a_n+s)}{r\,a_n+s} = \frac{(p-rt)a_n-(st-q)}{r\,a_n+s} \\
&= \frac{(p-rt)a_n-(p-rt)t}{r\,a_n+s} \\
&= \frac{(p-rt)(a_n-t)}{r\,a_n+s}
\end{aligned}$$ ¿

となる．ここで， $b_n=a_n-t$ とおくと

$$b_{n+1}=\frac{(p-rt)b_n}{r(b_n+t)+s}$$
$$=\frac{(p-rt)b_n}{rb_n+(rt+s)}$$

となり，簡単な分数型漸化式(q = 0 の場合) に帰着される.

■簡単な分数型漸化式の解法

2-8　例題：分数漸化式～その１～

$a_1=\frac{1}{2}$ ，$a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n+5}$ $(n\geq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答】

漸化式 $a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n+5}$

の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4a_n+5}{a_n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}}=5\cdot\frac{1}{a_n}+4$$

となるので， $b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は

$b_{n+1}=5b_n+4$ ･･･①　　☚ 線形2 項間漸化式に帰着された

を満たす.

ここで， $\alpha=5\alpha+4$ を満たす α つまり， $\alpha=-1$ を用いて① は

$$b_{n+1}=5(b_n+1)$$

と変形できる. $c_n=b_n+1$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は

$c_{n+1}=5c_n$　　☚ 等比数列に帰着された

を満たすので， c_n は

$$c_n=c_1 5^{n-1}$$
$$=(b_1+1)5^{n-1}=\left(\frac{1}{a_1}+1\right)5^{n-1}$$
$$=3\cdot 5^{n-1}$$

$c_n=b_n+1$ であったから $b_{n+1}=3\cdot 5^{n-1}$

$$\therefore\ b_n=3\cdot 5^{n-1}-1$$

さらに， $b_n=\frac{1}{a_n}$ であったから

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{3\cdot 5^{n-1}-1}$$

■一般の分数型漸化式の解法

2-9　例題　分数漸化式～その２～

$a_1=2$ ，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n+2}{a_n+3}$ $(n\geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答1：等比数列に帰着させる方法】

まず，特性方程式 $t=\dfrac{2t+2}{t+3}$ を解く.

$$t=\frac{2t+2}{t+3} \iff t(t+3)=2t+2$$
$$\iff t^2+t-2=0 \iff (t+2)(t-1)=0$$
$$\therefore \quad t=-2,1$$

この異なる2 解を利用して，

$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+2}$ とおくと　☚ 2 解，α,β を用いて $b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと，b_n は必ず等比数列になる

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+2}$$
$$=\frac{\dfrac{2a_n+2}{a_n+3}-1}{\dfrac{2a_n+2}{a_n+3}+2}=\frac{a_n-1}{4a_n+8}$$

☚ ここから $b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+2}$ の塊をくくりだすのがポイント

$$=\frac{a_n-1}{4(a_n+2)}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot b_n$$

☚ 数列 $\{b_n\}$ は等比数列になっている

となり，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{a_1-1}{a_1+2}=\dfrac{1}{4}$ ，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列となるので

$$b_n=b_1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ここで，$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+2}$ であったから

$$b_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n \iff \frac{a_n-1}{a_n+2}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$\iff (a_n-1)4^n=a_n+2 \iff (4^n-1)a_n=4^n+2$$
$$\therefore \quad a_n=\frac{4^n+2}{4^n-1}$$

■連立漸化式 $\begin{cases} a_{n+1}=p\,a_n+q\,b_n \\ b_{n+1}=r\,a_n+s\,b_n \end{cases}$ の解法

連立漸化式では一般的に, a_{n+1} と b_{n+1} がそれぞれ a_n と b_n から成り立つ式を与えられるので，そこから数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めることになる.

一般項を求める方法としては,

(1) 連立方程式をうまく組み合わせて等比数列に帰着させる方法

(2) 3 項間漸化式に帰着させる方法

が存在する.

【解答1：等比数列に帰着させる方法】

$$\begin{cases} a_{n+1}=p\,a_n+q\,b_n \cdots ① \\ b_{n+1}=r\,a_n+s\,b_n \cdots ② \end{cases}$$

x を後から決める定数として，①+②× x より

$$a_{n+1}+x\,b_{n+1}=(p+r\,x)a_n+(q+s\,x)b_n$$

をつくり, $1:x=(p+r\,x):(q+s\,x)$ となるように x を定め，その値が異なる α,β ならば

$$\begin{cases} a_{n+1}=p\,a_n+q\,b_n \cdots ③ \\ b_{n+1}=r\,a_n+s\,b_n \cdots ④ \end{cases}$$

となり，等比数列の漸化式に帰着されることを利用する.

【解答2：3 項間漸化式に帰着させる方法】

$$\begin{cases} a_{n+1}=p\,a_n+q\,b_n \cdots ③ \\ b_{n+1}=r\,a_n+s\,b_n \cdots ④ \end{cases}$$

③より

$$b_n=\frac{1}{q}a_{n+1}-\frac{p}{q}a_n$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{q}a_{n+2}-\frac{p}{q}a_{n+1}$$

となるので，この2 式を④に用いて**3 項間漸化式**に帰着されることを利用する.

2-10　例題　連立漸化式

$\begin{cases} a_1=1 \\ b_1=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} a_{n+1}=2\,a_n+b_n \\ b_{n+1}=-2\,a_n+5\,b_n \end{cases}$ $(n>-1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ および数列 $\{b_n\}$ の一般項 a_n および b_n を n の式で表せ.

【解答1：等比数列に帰着させる方法】

漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=2\,a_n+b_n \cdots ⑤ \\ b_{n+1}=-2\,a_n+5\,b_n \cdots ⑥ \end{cases}$$

において，⑤+ x × ⑥ より

$$a_{n+1}+x b_{n+1}=2 a_n+b_n+x(-2 a_n+5 b_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1}+x b_{n+1}=(2-2x) a_n+(1+5x) b_n \quad \cdots ⑦$$

ここで

$$1:x=2-2x:1+5x$$

となる x を求める，つまり方程式 $x(2-2x)=1+5x$ を解くと

$$x(2-2x)=1+5x \quad \Leftrightarrow \quad 2x-2x^2=1+5x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2+3x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)(2x+1)=0 \qquad \therefore \quad x=-1, -\frac{1}{2}$$

となるので，これらの値のとき数列 $\{a_n+x b_n\}$ は等比数列となる.

i) $x=-1$ のとき

⑦は $a_{n+1}-b_{n+1}=4(a_n-b_n)$

となるので， $c_n=a_n-b_n$ とおくと

$$c_{n+1}=4 c_n$$

より，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $c_1=a_1-b_1=-3$ ，公比 4 の等比数列となっている.

よって

$$c_n=c_1 4^{n-1}=-3 \cdot 4^{n-1}$$

ここで， $c_n=a_n-b_n$ であったから

$$c_n=-3 \cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n-b_n=-3 \cdot 4^{n-1} \quad \cdots ⑧$$

ii) $x=-\frac{1}{2}$ のとき

⑦は $a_{n+1}-\frac{1}{2} b_{n+1}=3\left(a_n-\frac{1}{2} b_n\right)$

となるので， $d_n=a_n-\frac{1}{2} b_n$ とおくと

$$d_{n+1}=3 d_n$$

より，数列 $\{d_n\}$ は，初項 $d_1=a_1-\frac{1}{2} b_1=-1$ ，公比 3 の等比数列となっている．よって

$$d_n=d_1 3^{n-1}=-3^{n-1}$$

ここで， $d_n=a_n-\frac{1}{2} b_n$ であったから

$$d_n=-1 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n-\frac{1}{2} b_n=-3^{n-1} \quad \cdots ⑨$$

⑨－⑧より

$$a_n-\frac{1}{2} b_n-(a_n-b_n)=-3^{n-1}-(-3 \cdot 4^{n-1}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} b_n=-3^{n-1}+3 \cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore \quad b_n=-2 \cdot 3^{n-1}+6 \cdot 4^{n-1}$$

また，これを⑧に代入して

$$a_n-(-2\cdot 3^{n-1}+6\cdot 4^{n-1})=-3\cdot 4^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n=-3\cdot 4^{n-1}+(-2\cdot 3^{n-1}+6\cdot 4^{n-1})$$

$$\therefore \quad a_n=-2\cdot 3^{n-1}+3\cdot 4^{n-1}$$

【解答2：線形3 項間漸化式に帰着させる方法】

漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \cdots ① \\ b_{n+1}=-2a_n+5b_n \cdots ② \end{cases}$$

において，①より

$$b_n=a_{n+1}-2a_n \quad \cdots ③$$

また，この式で n のかわりに $n+1$ とおくと

$$b_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1} \quad \cdots ④$$

③と④を，それぞれ②に代入すると

$$b_{n+1}=-2a_n+5b_n$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{n+2}-2a_{n+1}=-2a_n+5(a_{n+1}-2a_n)$$

$$\therefore \quad a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$$

また，①より

$$a_2=4a_1-2b_1=4-2(-1)=6$$

☚ 3 項間漸化式を解く際に，第2 項も必要となるので
ここで求めておく

である.

ここで，漸化式 $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$ は

$$t^2-7t+12=0$$

を満たす t ，つまり

$$t^2-7t+12=0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-3)(t-4)=0 \qquad \therefore \quad t=3,4$$

を用いて

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=4(a_{n+1}-3a_n) \quad \cdots ⑤$$

$$a_{n+2}-4a_{n+1}=3(a_{n+1}-4a_n) \quad \cdots ⑥$$

と2 通りに変形できる.

i) ⑤について

$c_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は $c_{n+1}=4c_n$ を

満たすので

$$c_n=c_1 4^{n-1} = (a_2-3a_1)4^{n-1} = 3\cdot 4^{n-1}$$

ここで， $c_n=a_{n+1}-3a_n$ であるから

$$a_{n+1}-3a_n=3\cdot 4^{n-1} \quad \cdots ⑤'$$

ii) ⑥について

$d_n=a_{n+1}-4a_n$ とおくと，数列 $\{d_n\}$ は $d_{n+1}=4d_n$ を満たすので

$$d_n=d_1 3^{n-1}$$
$$=(a_2-4a_1)3^{n-1}$$
$$=2\cdot 3^{n-1}$$

ここで， $c_n=a_{n+1}-4a_n$ であるから

$$a_{n+1}-4a_n=2\cdot 3^{n-1} \quad \cdots ⑥'$$

⑤′-⑥′より、

$$a_n=3\cdot 4^{n-1}-2\cdot 3^{n-1} \quad \cdots ⑦$$

また，この式で n のかわりに $n+1$ とおくと

$$a_{n+1}=3\cdot 4^n-2\cdot 3^n \quad \cdots ⑧$$

⑦と⑧を③に代入して

$$b_n=3\cdot 4^n-2\cdot 3^n-2(3\cdot 4^{n-1}-2\cdot 3^{n-1})$$
$$\Leftrightarrow \quad b_n=12\cdot 4^{n-1}-6\cdot 3^{n-1}-2(3\cdot 4^{n-1}-2\cdot 3^{n-1})$$
$$\therefore \quad b_n=-2\cdot 3^{n-1}+6\cdot 4^{n-1}$$

3　数学的帰納法

3-1　例題　基本的な数学的帰納法～その１～

すべての自然数 n において

$$\sum_{k-1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad \cdots①$$

を証明せよ.

【解答】

1)　$n=1$　のとき

（左辺） = $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=1\cdot 2=2$

（右辺） = $\displaystyle\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=2$

となるので，確かに①は成り立つ.

2)　$n=m$　のとき（ m はある自然数とする）①が成り立つと仮定する。つまり

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}m(m+1)(m+2) \quad \cdots②$$

を仮定する.

このとき，①で $n=m+1$ とおいた等式

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1)=\frac{1}{3}(m+1)(m+2)(m+3) \quad \cdots③$$

が成り立つことを以下に示す.

$$
\begin{aligned}
(\text{③の左辺}) &= \sum_{k=1}^{m+1} k(k+1) \\
&= 1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+m(m+1)+(m+1)(m+2) \\
&= \sum_{k=1}^{m} k(k+1)+(m+1)(m+2) \\
&= \frac{1}{3}m(m+1)(m+2)+(m+1)(m+2) \\
&= (m+1)(m+2)\left(\frac{1}{3}m+1\right) \\
&= (m+1)(m+2)\frac{m+3}{3} \\
&= \frac{1}{3}(m+1)(m+2)(m+3) \\
&= \text{③の右辺}
\end{aligned}
$$

よって， $n=m$ のとき①が成り立つと仮定すれば， $n=m+1$ の場合も①が成り立つことがいえた.

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，①は成り立つ.

■不等式の数学的帰納法

3-2　例題　基本的な数学的帰納法～その２～

すべての自然数 n において

$3^n > n+1$ ・・・①

が成り立つことを証明せよ.

【解答】

1)　$n=1$ のとき

（左辺）＝ $3^1=3$

（右辺）＝ $1+1=2$

となるので，確かに①は成り立つ.

2)　$n=m$ のとき（ m はある自然数とする）①が成り立つと仮定する，つまり

$3^m > m+1$ ・・・②

を仮定する.

このとき，①で $n=m+1$ とおいた不等式

$3^{m+1} > m+2$ ・・・③

が成り立つことを以下に示す.

（③の左辺）＝ $3^{m+1}=3\cdot 3^m > 3\cdot(m+1)$ 　∵②

＝ $3m+3$

＝ $m+2+(2m+1) > m+2$ 　∵ $2m+1>0$

＝（③の右辺）

よって， $n=m$ のとき①が成り立つと仮定すれば，

$n=m+1$ の場合も①が成り立つことがいえる.

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，①は成り立つ.

■一般の命題の数学的帰納法

3-3　例題　基本的な数学的帰納法～その３～

2 以上の自然数 n において

p の整式 $p^n+(1-p)n-1$ は $(1-p)^2$ で割りきれる・・・①

ことを証明せよ.

【解答】

1)　$n=2$ のとき

$p^2+(1-p)\cdot 2-1 = p^2-2p+1 = (1-p)^2$

となるので，確かに①は成り立つ.

2)　$n=m$ のとき（ m はある自然数とする）①が成り立つと仮定する，つまり

$$p^m+(1-p)m-1=(1-p)^2Q(p) \quad \cdots②$$

を満たす p の整式 $Q(p)$ が存在すると仮定する.

このとき，①で $n=m+1$ とおいた場合の成立，つまり

$$p^{m+1}+(1-p)(m+1)-1=(1-p)^2R(p) \quad \cdots③$$

を満たす p の整式 $R(p)$ が存在することを以下に示す.

$$
\begin{aligned}
(\text{③の左辺}) &= p\cdot p^m+m+1-pm-p-1\\
&= p\cdot p^m+m-pm-p\\
&= p\{p^m+(1-p)m-1\}-p\{(1-p)m-1\}+m-pm-p\\
&= p(1-p)^2Q(p)-mp(1-p)+p+m-pm-p \qquad \because ②\\
&= p(1-p)^2Q(p)+m(p^2-2p+1)\\
&= p(1-p)^2Q(p)+m(1-p)^2\\
&= (1-p)^2(pQ(p)+m)
\end{aligned}
$$

$Q(p)$ は整式だから $pQ(p)+m$ も整式となり，これを $R(p)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&= (1-p)^2R(p)\\
&= (\text{③の右辺})
\end{aligned}
$$

よって， $n=m$ のとき①が成り立つと仮定すれば，

$n=m+1$ の場合も①が成り立つことがいえた.

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，①は成り立つ.

■答えを推定してから数学的帰納法で証明する

「証明せよ」という問題でなくても，答えを予想できれば，それを証明することによって解答になる.

3-4　例題　いろいろな数学的帰納法～その１～

漸化式

$$a_1=2 \quad , \quad a_{n+1}=\frac{2a_n}{1+a_n} \quad (\ n=1,2,3,\cdots\ ) \cdots①$$

で定められる数列の一般項 a_n を n の式で表せ.

【解答】

漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1+a_n}$ に $n=1$ を代入すると

$$a^2=\frac{2a_1}{1+a_1} = \frac{2\cdot 2}{1+2}=\frac{4}{3}$$

また， $n=2$ を代入すると

$$a_3=\frac{2a_2}{1+a_2} = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}}=\frac{8}{7}$$

また， $n=3$ を代入すると

$$a_4=\frac{2a_3}{1+a_3}=\frac{2\cdot\frac{8}{7}}{1+\frac{8}{7}} = \frac{16}{15}$$

となるので

$$a_n=\frac{2^n}{2^n-1} \quad \cdots②$$

と推定できる.

以下，この推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明する.

1) $n=1$ のとき

$$a_1=\frac{2^1}{2^1-1}=2$$

となるので，確かに②は成り立つ.

2) $n=m$ のとき(m はある自然数とする) ②が成り立つと仮定する，つまり

$$a_m=\frac{2^m}{2^m-1} \quad \cdots③$$

が成り立つと仮定する.

このとき，②で $n=m+1$ とおいた場合の成立，つまり

$$a_{m+1}=\frac{2^{m+1}}{2^{m+1}-1} \quad \cdots④$$

か成り立つことを以下に示す.

$$\begin{aligned}(\text{④の左辺}) &= a_{m+1}=\frac{2a_m}{1+a_m} && \because ② \\ &= \frac{\frac{2\cdot 2^m}{2^m-1}}{1+\frac{2^m}{2^m-1}} && \because ③ \\ &= \frac{2\cdot 2^m}{2^m-1+2^m} = \frac{2^{m+1}}{2^{m+1}-1} = (\text{④の右辺})\end{aligned}$$

よって， $n=m$ のとき③が成り立つと仮定すれば，

$n=m+1$ の場合も③が成り立つことがいえた.

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，②は成り立つ.

■ $n=m, m+1$ を仮定して $n=m+2$ を示す

$n=m$ の場合を仮定しただけでは， $n=m+1$ の場合を証明できないときもある．このようなときは，さらに $n=m$ に加えて $n=m+1$ の場合も仮定した上で， $n=m+2$ の場合を証明してやるとよい.

3-5　例題　いろいろな数学的帰納法～その２～

$x+\frac{1}{x}$ ＝ t　とするとき，すべての自然数　n　において

式　$x^n+\frac{1}{x^n}$　は　t　の　n　次多項式で表される･･･①

ことを証明せよ.

【解答】

1)　$n=1$　のとき

$$x^1+\frac{1}{x^1}=t$$

となり，確かに①は成り立つ.

$n=2$　のとき

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$$

となり，こちらも確かに①は成り立つ.

2)　$n=m\,,m+1$　のとき(　m　はある自然数とする) ①が成り立つと仮定する，つまり

$$x^m+\frac{1}{x^m}=P_m(t)\quad\cdots②$$

$$x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}=P_{m+1}(t)\quad\cdots③$$

が成り立つと仮定する．ただし，式　$P_i(t)$　は　t　の　i　次多項式を意味するものとする.

このとき，①で　$n=m+2$　とおいた場合の成立，つまり

$$x^{m+2}+\frac{1}{x^{m+2}}=P_{m+2}(t)\quad\cdots④$$

か成り立つことを以下に示す.

$$\begin{aligned}（４°の左辺）&= x^{m+2}+\frac{1}{x^{m+2}}\\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^{m+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\\ &= t\cdot P_{m+1}(t)-P_m(t)\end{aligned}$$

$t\cdot P_{m+1}(t)-P_m(t)$　は　t　の　$m+2$　次多項式となるから，これを　$P_{m+2}(t)$　とおくと

＝（ ④の右辺）

よって，　$n=m\,,m+1$　のとき①が成り立つと仮定すれば，　$n=m+2$　の場合も①が成り立つことがいえた．1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数　n　について，①は成り立つ.

実際に問題を解く場面は，いきなり上記のようにきれいに書き始められるようなことはないと言ってよい．実際には　$n=1$　成立を確認して，　$n=m$　成立を仮定し　$n=m+1$　成立を示そうとするのだが，　$n=m+1$　成立を示そうとしたときに，前提条件が足りないことに気が付く．そこで　$n=m$　に加えて　$n=m+1$　の場合も仮定した上で，　$n=m+2$　の場合を証明するという発想に行き着くのである.

■ $n=1,2,\cdots,m$ を仮定して $n=m+1$ を示す

3-6 例題 いろいろな数学的帰納法～その３～

次の式を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \quad , \quad a_n>0 \qquad (n=1,2,3,\cdots) \quad \cdots①$$

この問題は「証明せよ」ではないので，まず実験から答えを予想するところからはじめる．予想が立てば，それを証明してやるのだが， $n=m+1$ の場合の成立をいうのに， $n=1,2,\cdots,m-1,m$ の場合の成立を仮定する必要がある.

【解答】

①に $n=1$ を代入すると

$$\left(\sum_{k=1}^{1} a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{1} a_k^3 \iff a_1^2=a_1^3 \qquad \therefore \quad a_1=1$$

また， $n=2$ を代入すると

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{2} a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{2} a_k^3 &\iff (a_1+a_2)^2=a_1^3+a_2^3\\ &\iff (1+a_2)^2=1^3+a_2^3\\ &\iff a_2^3-a_2^2-2a_2=0\\ &\iff a_2(a_2+1)(a_2-2)=0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_2=2$$

また， $n=3$ を代入すると

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{3} a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{3} a_k^3 &\iff (a_1+a_2+a_3)^2=a_1^3+a_2^3+a_3^3\\ &\iff (1+2+a_3)^2=1^3+2^3+a_3^3\\ &\iff a_3^3-a_3^2-6a_3=0\\ &\iff a_3(a_3+2)(a_3-3)=0\\ &\therefore \quad a_3=3\end{aligned}$$

となるので

$$a_n=n \quad \cdots②$$

と推定できる.

以下，この推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明する.

1） $n=1$ のとき.

$$a_1=1$$

となるので，確かに②は成り立つ.

2） $n\leq m$ （ m はある自然数とする) を満たすすべての n で，②が成り立つと仮定する，つまり

$$a_l = l \quad (1 \leq l \leq m) \quad \cdots ③$$

が成り立つと仮定する.

このとき，②で $n = m+1$ とおいた場合の成立，つまり

$$a_{m+1} = m+1 \quad \cdots ④$$

が成り立つことを以下示す.

①より

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{m+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{m+1} a_k^3 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} a_k^3 + {a_{m+1}}^3 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{k=1}^{m} k + a_{m+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} k^3 + {a_{m+1}}^3 \quad \because ③ \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\frac{m(m+1)}{2} + a_{m+1}\right\}^2 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} + {a_{m+1}}^3 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{m^2(m+1)^2}{4} + m(m+1)a_{m+1} + {a_{m+1}}^2 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} + {a_{m+1}}^3 \\
&\Leftrightarrow \quad {a_{m+1}}^3 - {a_{m+1}}^2 - m(m+1)a_{m+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_{m+1}(a_{m+1} + m)\{a_{m+1} - (m+1)\} = 0
\end{aligned}$$

$\therefore \quad a_{m+1} = m+1$ (④がいえた)

よって， $n = m$ のとき②が成り立つと仮定すれば， $n = m+1$ の場合も②が成り立つことがいえた.

1)，2) によって，数学的帰納法からすべての自然数 n について，②は成り立つ.